Università degli Studi di Palermo

Tesi di Dottorato

LA METAFORA NEL PROCESSO DI INSEGNAMENTO-APPRENDIMENTO DELLA MATEMATICA: UNA INDAGINE TEORICA E SPERIMENTALE

Dottorando

Massimo Salvi

Tutor

Prof. Aldo Brigaglia

Coordinatore

Prof. Aldo Brigaglia

co-Tutor

Prof.ssa Maria G. Bartolini Bussi

SSD: Mat04

Università degli Studi di Palermo

Dipartimento di Matematica e Informatica

Corso di Dottorato di Ricerca

in Storia e Didattica delle Matematiche, della Fisica e della Chimica (XXIV Ciclo) – 2013 *a Mary e Mila*

Ringraziamenti

Devo un grande ringraziamento ai componenti del gruppo di ricerca dell'Università di Modena e Reggio Emilia, a partire dalla Prof.ssa Maria G. Bartolini Bussi (che ha accettato di essere mia co-tutor di tesi), la Prof.ssa Michela Maschietto, la Dott.ssa Francesca Martignone e il Prof. Marcello Pergola, che mi hanno seguito ed aiutato con sapienza e pazienza.

Inoltre ringrazio :

il Prof. Aldo Brigaglia per avere accettato di essere mio tutor di tesi;

le e gli insegnanti che mi hanno hanno concesso di compiere le sperimentazioni nelle classi ed i dirigenti scolastici delle scuole: le insegnanti M. Agostini, L. Agostini, A. Gualandi, G. Paladini e T. Salvi del Polo "Montessori – Da Vinci" di Porretta Terme e il dirigente scolastico Prof. R. Fiorini, gli insegnanti G. Ferraro, S. Camerani e A. Gava della Fundaçao Torino di Belo Horizonte e la dirigente scolastica Prof.ssa G. Leone;

lo staff della biblioteca BSI dell'Università di Modena per la professionalità, la disponibilità e la comprensione che ha dimostrato;

i componenti del gruppo del Dottorato di Ricerca dell'Università di Palermo ed i colleghi di corso, in particolare Benedetto e Pietro per le piacevoli e produttive conversazioni;

Un ringraziamento speciale va alla mia famiglia che mi ha sostenuto, in diverse forme, in questo percorso.

Indice

Capitolo 5: Il secondo esperimento

Capitolo 6: riflessioni e conclusioni sul percorso

Introduzione

All’origine di questa ricerca è il desiderio dell’autore di approfondire gli strumenti della metafora e dell’analogia nella didattica della matematica e, più in generale, nella didattica delle scienze. Come insegnante ho spesso notato la loro presenza nel mio lavoro quotidiano, sia nelle parole degli studenti, o nelle mie, sia nei testi matematici. Tale presenza mi è sempre parsa non abbastanza valorizzata e non sufficientemente analizzata, perciò il principale obiettivo che avevo in principio per impegnarmi in questa indagine era quello di chiarire in quale modo la metafora potesse essere utilizzata proficuamente nel processo di insegnamento-apprendimento. La prima questione che si è posta, dall’analisi della letteratura e dai primi incontri con il Prof. Spagnolo, mio iniziale tutor, è stata il problema di chiarire di quale dei due concetti, metafora o analogia, mi sarei dovuto occupare. Infatti tali concetti non parevano sempre nettamente distinti o definiti in maniera univoca dagli autori che li utilizzavano. Pertanto la prima parte della ricerca è stata una analisi della letteratura su metafora ed analogia, non solo in didattica, con l’obiettivo di chiarire, innanzitutto a me stesso, la differenza fra tali concetti. Tale analisi ha poi ricevuto un nuovo impulso dall’incontro con la co-tutor, Prof.ssa Bartolini Bussi, ed il suo gruppo di ricerca. Da questi incontri è sorta l’opportunità di utilizzare il quadro teorico sviluppato da Bartolini Bussi e Mariotti anche per lo studio della metafora e dell’analogia in didattica della matematica, in modo da inquadrare la metafora come particolare segno che può essere sfruttato dall’insegnante durante l’attività di insegnamento-apprendimento con artefatti matematici (testi, macchine matematiche o altro). Nell’analisi dei concetti di analogia, metafora, misconcezione ed ostacolo abbiamo cercato di tenere in considerazione anche le idee che si sono sviluppate nell’ambito più generale della didattica delle scienze (in particolare della fisica) oltre a quelle specifiche della didattica della matematica, nella convinzione che un linguaggio comune, con le necessarie distinzioni, possa essere utile ad uno scambio proficuo di idee e risultati da parte degli studiosi di queste discipline. Questa iniziale analisi ci ha condotti a proporre definizioni operative di metafora ed analogia, definizioni alle quali ci riferiamo nelle domande di ricerca. Le tre domande di ricerca (le prime due formulate sin da principio e la terza formulata in seguito) che hanno orientato questa indagine sono:

1. Da quali elementi dipende la produttività ai fini didattici di una metafora?
2. Quali possono essere le conseguenze in termini di misconcezioni ed ostacoli che le analogie associate alle metafore possono generare ?
3. Come può l’insegnante utilizzare in maniera produttiva e consapevole le metafore presenti (effettivamente o potenzialmente) durante l’attività di insegnamento-apprendimento?

Le specifiche ipotesi di ricerca, che abbiamo formulato in coerenza con le più generali domande di ricerca, si sono orientate alla valutazione di alcune variabili che, secondo noi, potevano influire sul riconoscimento e sull’uso della metafora nel processo di insegnamento-apprendimento. Le diverse fasi della ricerca, dalle proposte teoriche, alla sperimentazione e successiva valutazione, sono sempre state discusse con la Prof.ssa Bartolini Bussi e i componenti del gruppo che mi hanno aiutato in tutte le fasi. Di volta in volta mi sono stati indicati materiali per approfondire alcune delle problematiche che emergevano. Per gran parte della letteratura utilizzata (articoli e testi) mi sono potuto avvalere della biblioteca BSI dell'Università di Modena e dei servizi informatici offerti che sono stati molto efficaci ed efficienti. Se siamo d'accordo nel distinguere in una ricerca, teorica e sperimentale, i seguenti elementi:

- Domande di ricerca;
- Progettazione della ricerca (quadro teorico + metodi);
- Raccolta dati;
- Analisi dei dati;
- Validazione;
- Risultati finali;
- Nuove conoscenze /nuove pratiche;

tali punti si trovano anche in questa indagine, anche se non seguono questo esatto ordine e nemmeno l'ordine che è stato dato ai capitoli che la compongono. Le prime due domande di ricerca vengono introdotte alla fine del primo capitolo, poiché, riguardando il concetto di metafora, abbiamo trovato opportuno introdurle dopo avere chiarito il senso con il quale ci riferiamo a questo concetto. La terza domanda viene introdotta nel terzo capitolo, dopo avere chiarito il quadro teorico di riferimento per questa indagine e l'importanza del ruolo dell'insegnante nel processo di insegnamento-apprendimento. La costruzione del quadro teorico si trova nei primi tre capitoli, dei quali il primo ed il secondo sono dedicati all'analisi di alcuni concetti (metafora, analogia ed ostacolo) e ad una loro rielaborazione in vista del loro utilizzo nel terzo capitolo. Nel terzo capitolo si presenta il quadro teorico di riferimento (Teoria della Mediazione Semiotica), nel quale cerchiamo di collocare e giustificare anche l'uso dei concetti elaborati nei capitoli precedenti alla luce delle domande di ricerca generali. Nel quarto e nel quinto capitolo formuliamo alcune specifiche ipotesi di ricerca, tali da poter essere studiate in maniera sperimentale e coerenti con le domande di ricerca più generali. In questi capitoli descriviamo la progettazione, l'organizzazione, la raccolta e l'analisi dei dati e la valutazione (validazione delle ipotesi) di due diversi esperimenti e ne discutiamo i risultati. Nel sesto capitolo mettiamo in evidenza quelli che, secondo noi, possono essere i contributi di questa ricerca (nuove conoscenze) e proponiamo alcuni criteri (nuove pratiche) che possono aiutare l'insegnante a sfruttare produttivamente le metafore durante il processo di insegnamento-apprendimento. Segue una sintesi più completa dei contenuti dei capitoli:

Nel *Capitolo 1* consideriamo i diversi significati dei concetti di analogia e di metafora che si trovano in letteratura, mettendo in evidenza che ci sono diverse concezioni e che metafora ed analogia appaiono comunque sempre legate. Proponiamo una possibile definizione sia di metafora che di analogia distinguendole in maniera chiara e rendendo esplicito il loro legame. Discutiamo il legame fra la metafora, definita nel modo proposto, ed altri concetti utilizzati ed oggetto di studio in didattica della matematica. Infine introduciamo le prime due domande di ricerca e le prime ipotesi di ricerca.

Nel *Capitolo 2* analizziamo i concetti di misconcezione e di ostacolo in didattica della matematica, confrontando i significati che essi hanno in altri ambiti, in particolare in didattica della fisica. Proponiamo una definizione che ci pare più adatta al quadro teorico che viene adottato. La presenza di un tale capitolo in questa tesi si giustifica con il fatto che, come viene specificato in altri capitoli, l'uso della metafora in didattica può portare a misconcezioni o può rappresentare un ostacolo. In particolare nell'ultimo capitolo discutiamo alcuni casi specifici emersi dalle sperimentazioni. Inoltre diversi autori hanno proposto particolari analogie proprio come mezzo per superare le misconcezioni degli studenti.

Nel *Capitolo 3* presentiamo il quadro teorico nel quale si colloca la ricerca, ovvero la *Teoria della mediazione semiotica.* Cerchiamo di integrare in tale quadro, discutendone la coerenza, i concetti introdotti e definiti nei primi due capitoli (metafora, analogia, misconcezione ed ostacolo). In particolare inquadriamo la metafora come un particolare tipo di segno che può essere prodotto o presente in modi diversi durante il processo di insegnamento-apprendimento che può essere sfruttato produttivamente dall'insegnante. Concludiamo spiegando quale è, secondo noi, il ruolo svolto dal quadro teorico nella nostra indagine e formuliamo una terza domanda di ricerca centrata sull'insegnante.

Nel *Capitolo 4* riprendiamo, approfondendole, le prime ipotesi di ricerca (introdotte nel primo capitolo) sulla dipendenza della produttività della metafora da alcune variabili (domande di ricerca) e proponiamo un esperimento per poterle testare qualitativamente. Descriviamo la progettazione e l'esecuzione dell'esperimento che è stato svolto in parte in Italia e in parte in Brasile con studenti di scuola superiore (dai 15 ai 18 anni). Infine valutiamo le ipotesi in base alle osservazioni compiute. Fra le quattro le ipotesi iniziali solo una sembra parzialmente corroborata. Avanziamo una ipotesi sulla possibile distinzione in due tipi di metafore che potrebbe servire a giustificare alcune delle osservazioni fatte, che diventa la prima delle nuove ipotesi di ricerca riformulate.

Nel *Capitolo 5* descriviamo la progettazione, l'esecuzione e la valutazione (qualitativa) di un secondo esperimento con l'obiettivo di testare alcune delle ipotesi di ricerca riformulate nel capitolo 4. Tale esperimento è stato svolto in Italia con studenti delle superiori (studenti di 17/18 anni). Successivamente valutiamo l'esperimento relativamente alle ipotesi in oggetto, rilevando come per la prima delle nuove ipotesi (distinzione fra metafora intuitiva/incorporata e culturale/formale) ci sia qualche evidenza, mentre per le altre due non emergano evidenze favorevoli.

Nel *Capitolo 6* proponiamo alcune conclusioni sul percorso compiuto evidenziando quelli che, secondo noi, possono essere considerati contributi di questa indagine. Analizziamo alcuni degli episodi ed alcune osservazioni sperimentali alla luce della seconda e della terza domanda di ricerca (metafora come fonte di misconcezioni o come ostacolo e ruolo dell'insegnante). Proponiamo alcuni criteri che possono aiutare l'insegnante ad utilizzare proficuamente la metafore durante il processo di insegnamento-apprendimento. Infine ci poniamo alcune domande per possibili ulteriori indagini.

Capitolo 1

In questo capitolo vengono approfonditi i concetti di analogia e metafora considerando i diversi significati che si possono trovare in letteratura, soprattutto in ambito matematico/scientifico, per poi focalizzare il loro uso nell'ambito specifico nell'educazione scientifica e matematica. Successivamente consideriamo una definizione che ci proponiamo di utilizzare per questo lavoro di ricerca. Infine introduciamo le prime due domande di ricerca e le prime ipotesi di ricerca che saranno affrontate in modo dettagliato nei capitoli successivi.

1. Evoluzione dell'uso e del significato di metafora ed analogia e loro relazione

L'importanza di metafora ed analogia come strumenti di pensiero è presente in diversi autori. English scrive: "*Sia l'analogia che la metafora sono importanti non solo nella costruzione iniziale di modelli mentali ma anche nel loro successivo sviluppo e raffinamento*" (English, 1997, pag. 7). Tuttavia, come si mostra di seguito, non è ancora condivisa una chiara definizione di metafora o di analogia (Alexander, White, Daugherry, 1997). Ci sono ancora problemi nella valutazione di una analogia, ad esempio Ratterman afferma che "*Noi riconosciamo che 'il calore è come il flusso di acqua' è una buona analogia ma siamo spesso incapaci di analizzare esattamente perché è una buona comparazione mentre 'il calore è come un flusso di aria' non lo è*" (Ratterman, 1997, pag.249) e, nonostante il grande interesse nel ragionamento analogico in campi come le Scienze Cognitive e l'Intelligenza Artificiale, ci sono ancora molte controversie su questo argomento (Abrantes, 1999). Una chiara distinzione fra analogia e metafora non è ancora chiara o condivisa (Sfard, 1997) anche se è condivisa l'idea che vi sia uno stretto legame fra esse, legame che si trova già in Aristotele (Aristotele, *Poetica*), dove si parla di metafore come fondate sull'analogia (Hesse, 1966). Da queste considerazioni appare opportuno trattarle entrambe, sia per potersi valere, anche in forma adeguatamente adattata agli scopi della ricerca, dei modelli di inferenza analogica che sono stati proposti da diversi studiosi, sia per poter utilizzare le idee, sviluppate negli ultimi anni, che hanno evidenziato l'importanza che la metafora riveste nella creazione dei concetti matematici.

1.1 Metafora

Il concetto di metafora viene definito ed analizzato già a partire dai filosofi greci. Aristotele scrive che "*la metafora consiste nel trasferire ad un oggetto il nome che è proprio di un altro*" (Aristotele, *Poetica*), e questa è la concezione della retorica classica dove si attribuisce alla metafora solo una funzione estetica, senza apportare nuove informazioni. Eco mette tuttavia in dubbio che in Aristotele la metafora fosse considerata un mero ornamento e propone una rilettura nella quale si mettono in evidenza idee di Aristotele secondo cui " *la metafora non è solo un trasferimento, ma è un trasferimento che è una evidenza immediata - ma evidentemente non consueta, inattesa e grazie alla quale si vedono le cose mentre agiscono, ovvero sono significate in atto*" (Eco, 2007, pag.69). Quindi, secondo Eco, nella concezione di Aristotele sarebbe presente anche il suo valore cognitivo. Anche in Lakoff, Johnson (Lakoff, Johnson, 1980) è chiara la concezione di Aristotele della metafora come mezzo per raggiungere nuove conoscenze, infatti gli autori riportano un passo della *Retorica* nel quale si dice: "*le parole comuni ci comunicano solo quello che noi già sappiamo; è dalla metafora che noi possiamo cogliere qualcosa di nuovo*" (Aristotele, *Retorica*). Tale concezione "moderna" sarebbe poi risultata assente a partire dalle traduzioni ed elaborazioni fatte nel medioevo, nelle quali non si trova una teoria della metafora come strumento di conoscenza

(Eco, 2007). In un testo del '500 si trova la concezione di metafora, in retorica, come di alterazione impropria del significato proprio di una parola dovuto ad una certa somiglianza (Wilson, 1553). Si ritorna in maniera chiara ad una visione della metafora come strumento cognitivo con il filosofo Black e la sua concezione interattiva della metafora.

Black scrive: "*In generale quando parliamo di una metafora relativamente semplice, ci riferiamo ad una frase o ad un'altra espressione in cui alcune parole sono usate metaforicamente. Il tentativo di costruire un'intera frase di parole che sono tutte usate metaforicamente compare in un proverbio, in un'allegoria o in un indovinello*" (Black, 1962, pag.44).

Questo autore analizza alcune delle concezioni di metafora che sono accettate, in particolare:

- *Concezione sostitutiva* della metafora: l'espressione metaforica viene considerata come sostituto di qualche altra espressione letterale che avrebbe lo stesso significato qualora fosse usata in sua vece (Black, 1962). Possono rientrare in questa visone le definizioni di metafora che si possono trovare su alcuni dizionari. Per esempio:
  "*Figura retorica che consiste nel trasferire a un oggetto il termine proprio di un altro secondo un rapporto di analogia*" (Zingarelli, 2001);

- *Concezione comparativa* della metafora: l'espressione metaforica viene concepita come un modo con il quale presentare una analogia o una similitudine sottostante. Anche in questo caso l'espressione metaforica potrebbe essere sostituita da una espressione letterale equivalente, quindi si tratta di un caso particolare della concezione sostitutiva.

L'autore propone poi una concezione che ritiene più aderente al funzionamento reale della metafora e che definisce *concezione interattiva della metafora*. Tale concezione postula delle interazioni fra due sistemi, basate su analogie di struttura (in parte create ed in parte scoperte).

Vengono specificate alcune caratteristiche delle asserzioni metaforiche (Black, 1962, pag.113):

1) Un'asserzione metaforica ha due soggetti distinti, un soggetto "primario" ed uno "secondario";
2) Il soggetto secondario è da valutarsi più come sistema di "cose" che come una cosa individuale;
3) L'espressione metaforica funziona "proiettando" sul soggetto primario un insieme di "implicazioni associate", comprese nel complesso di implicazioni, che sono predicabili del soggetto secondario;
4) Chi fa un'asserzione metaforica seleziona, mette in risalto, sopprime ed organizza i tratti del soggetto primario applicando ad esso asserzioni isomorfiche con i membri del complesso di implicazioni del soggetto secondario;
5) Nel contesto di una particolare asserzione metaforica, i due soggetti "interagiscono" nel modo seguente:

i) La presenza del soggetto primario incita l'ascoltatore a selezionare alcune qualità proprie del soggetto secondario;
ii) Lo invita a costruire un "complesso di implicazioni" parallelo che possa andar bene per il soggetto primario;
iii) Reciprocamente induce dei cambiamenti paralleli nel soggetto secondario.

Si può notare come tale concezione cerchi di approfondire e cogliere la ricchezza della metafora come processo che effettivamente crea nuovi significati e, differentemente dalla altre concezioni, ammette che anche il soggetto secondario possa subire cambiamenti di significato in seguito alla metafora. Come sostiene lo stesso Black, questo significa assegnare alla metafora una funzione cognitiva.

Anche Sfard evidenzia e sostiene la capacità della metafora di creare significato piuttosto che semplicemente rappresentarlo in qualche modo, quindi accettando la visione interattiva della metafora introdotta da Black (Sfard, 1997).

Un tale significato della metafora si trova in due studiosi della metafora come Johnson e Lakoff, per i quali una metafora consiste nel mettere in corrispondenza due termini che appartengono a due diversi domini del sapere (Lakoff, Johnson, 1980), ad esempio: "*la discussione è una guerra*", in modo da comprendere uno nei termini dell'altro. Questi autori scrivono: "*L'essenza della metafora è comprendere e vivere un tipo di cosa in termini di un altro*" (Lakoff, Johnson, 1980, pag.24). Lakoff e Johnson riconoscono una piena valenza cognitiva della metafora che permea tutti gli aspetti della nostra vita, scrivono infatti: "*La metafora è da molti considerata come uno strumento dell'immaginazione poetica, un artificio retorico, qualcosa insomma che ha più a che vedere con il linguaggio straordinario che con quello comune. Non solo, la metafora è anche tipicamente considerata come caratteristica del solo livello linguistico, una questione di parole piuttosto che di pensiero ed azione. Per questa ragione molti pensano di poter fare benissimo a meno della metafora. Noi abbiamo invece trovato che la metafora è diffusa ovunque nel linguaggio quotidiano, e non solo nel linguaggio ma anche nel pensiero e nell'azione: il nostro comune sistema concettuale, in base al quale pensiamo e ragioniamo, è essenzialmente di natura metaforica.*"…"*Se abbiamo ragione a ipotizzare che il nostro sistema concettuale è in larga misura metaforico, allora la metafora viene a rivestire un ruolo centrale nel nostro pensiero, nella nostra esperienza e nelle nostre azioni quotidiane.* " (Lakoff, Johnson, 1980, pag.21).

Un'altra autrice che sostiene una visione simile della metafora è English, che scrive: "*la ricerca contemporanea sul ragionamento analogico interpreta la nozione di metafora in un senso più ampio rispetto la tradizionale interpretazione letterale. Ovvero, il potere di una metafora risiede nel modo in cui noi concettualizziamo un dominio mentale in termini di un altro*", .."*noi capiamo la metafora trovando una mappatura fra un dominio target, cioè l'argomento principale della metafora, ed il dominio source. La connessione fra i due domini, tuttavia, è generalmente implicita.*" (English, 1997, pag.7).

Presmeg accetta la visione secondo cui la metafora permette di comprendere un dominio (*tenor*) in termini di un altro (vehicle) e si fonda su alcuni elementi simili di entrambi i domini che vengono definiti *ground* trascurando altri elementi dissimili che vengono definite *tension*. La metafora viene considerata una analogia implicita dove il *tenor* ed il *vehicle* corrispondono al *target* ed al *source* dell'analogia e sarebbe il simultaneo riconoscimento di somiglianze e differenze a dare alla metafora la capacità di strutturare nuove esperienze nei termini delle vecchie (Presmeg, 1997).

Quindi è riconosciuta la valenza della metafora come mezzo cognitivo nella vita di tutti i giorni, ma diversi autori sostengono anche la sua importanza nell'ambito specifico della matematica.

Lakoff e Núñez considerano la metafora come centrale nella struttura della matematica e nel nostro ragionamento con le idee matematiche (Lakoff, Núñez, 1997, 2000). "*Per questi autori le metafore utilizzate in ambito matematico sono mappature fra domini nelle quali le idee matematiche astratte (target) vengono capite in termini di domini (source) concreti o familiari che , come ha mostrato Lakoff (Lakoff, 1994), sono spesso spaziali.*" (English, 1997, pag.8), la propensione a pensare anche i concetti più astratti in termini spaziali è un fenomeno molto diffuso (Sfard, 1997). Anche Fishbein afferma che "*La metafora spaziale è così incorporata nel nostro linguaggio, nella nostra logica, che noi non percepiamo alcuna discrepanza nel parlare e ragionare di tempo in termini spaziali*" (Fishbein, 2001, pag.319). Presmeg scrive: "*La metafora è una forma specifica di analogia che è spesso centrale nella costruzione di significato durante il ragionamento matematico*" (Presmeg, 1997, pag.267).

1.2 Vita e morte di una metafora

Può accadere che le metafore facciano talmente parte di certi domini del sapere che noi non le vediamo più come tali (metafore morte o invisibili); English propone l'esempio della metafora (viene definita metafora dall'autrice): "*una equazione è una bilancia*" (English, 1997, pag.7), e Presmeg considera come metafora di questo tipo: "*di più è più in alto*" (Presmeg, 1997, pag.268). Una metafora di questo tipo, che viene considerata una espressione letterale e senza consapevolezza della sua origine metaforica è stata anche chiamata "metafora fossilizzata " da alcuni studiosi, che hanno indicato, come indizio per individuarle, anche la forma con la quale vengono espresse (ad esempio un freccia per il limite o con il termine 'tende') (Font, Bolite, Acevedo, 2010). A questo proposito Black (Black, 1962) propone di superare tale classificazione visto che una metafora morta ha, di fatto, perso la sua capacità di creazione, quindi non è più una metafora. Propone di parlare di metafore *estinte* (metafore che hanno perso il loro significato originale metaforico), *dormienti* (metafore il cui significato metaforico, anche se inattivo, può essere utilmente ripristinato) *ed attive* (metafore vere e proprie). Anche Sfard osserva che l'onnipresenza della metafora la rende spesso trasparente a chi la usa (Sfard, 1997, pag. 346), non solo, ma spesso i modelli e le teorie che vengono costruite in modo da essere logicamente consistenti sono nati da metafore che sono state poi dimenticate o considerate non come facenti parte della scienza ma della storia della scienza (Sfard, 1997; Bruner, 1986).

1.3 Metafora e matematica: le idee di Lakoff e Núñez

Lakoff e Núñez (Lakoff, Núñez, 2000) propongono di fondare le idee matematiche su di un meccanismo metaforico che agisce a diversi livelli nella mente umana. Seguendo Goldin (Goldin, 2001), possiamo individuare tre idee principali in questo testo: la prima è l'idea di "*embodiment della mente*", che significa che i nostri corpi e le nostre menti, assieme alle esperienze della vita di tutti i giorni, strutturano i nostri concetti ed il nostro ragionamento; la seconda è l'idea di

"*inconscio cognitivo*", ovvero il fatto che aspetti essenziali del nostro pensiero non sono accessibili alla nostra consapevolezza; la terza idea è quella del "*pensiero metaforico*" che significa che gli umani comprendono i concetti astratti in termini di esperienze corporee basate sul movimento ed i sensi, attraverso un meccanismo metaforico. Più precisamente Lakoff e Núñez parlano di *metafore fondanti* (grounding metaphors) come di metafore che creano alcune strutture concettuali di base, partendo da modi con cui l'uomo, con il proprio corpo, opera nella realtà (conoscenze *embodied*). Gli autori individuano quattro metafore fondanti: collezione di oggetti, costruzione di oggetti, asta di misurazione, moto lungo una retta. Tali metafore starebbero alla base, ad esempio, della costruzione dell'aritmetica. Altre importanti metafore sono le *metafore concettuali* che operano direttamente al livello di concetti già presenti nella mente. Con l'attivazione di tali metafore, che gli autori trattano comunque ad alto livello, senza entrare nei dettagli di eventuali meccanismi neurali (in un senso simile a quello della programmazione informatica), si rende disponibile una mappatura fra un dominio sorgente (source) ed un concetto obiettivo (target) che porta ad un nuovo significato, più ricco, per il concetto sorgente. Propongono anche un meccanismo con il quale diversi concetti possono fondersi parzialmente: la miscela concettuale (conceptual blend), in particolare, quando tale fusione avviene tramite una metafora, tale operazione prende il nome di *miscela metaforica*.
Per giustificare i concetti di infinitamente grande (in particolare l'infinito matematico) ed infinitamente piccolo (in particolare di infinitesimo), gli autori propongono una *metafora di base per l'infinito*, prodotta con un meccanismo di tipo metaforico a partire da processi di iterazione basati sul corpo umano ed i suoi movimenti o gesti. Per questi autori la metafora è una mappatura fra domini di conoscenze ed è un meccanismo cognitivo proprio del funzionamento del cervello umano. E' opportuno notare che le metafore concettuali e le miscele concettuali sono meccanismi che funzionano in generale nella mente umana, indipendentemente dal fatto che i concetti abbiano a che fare o meno con la matematica. Ciò che fonda la matematica, nella visione di questi autori, sono le metafore fondanti e la metafora base dell'infinito. Nella parte finale di questo testo gli autori mettono in evidenza come gli aspetti culturali e storici della matematica siano compatibili con questa visione, visto che la matematica può assumere forme diverse nel tempo e presso diverse comunità di studiosi ma sempre basandosi sui meccanismi cognitivi proposti.

1.4 Critiche alle idee di Lakoff e Núñez da parte di altri autori

Le tesi sostenute da Lakoff e Núñez nel loro lavoro, (Lakoff, Núñez, 2000), sono state criticate per alcuni aspetti che non sono parsi sufficientemente convincenti (Maschietto, 2009). Alcune di queste critiche sono particolarmente importanti anche dal punto di vista dell'educazione matematica, ad esempio Schiralli e Sinclair (Schiralli, Sinclair, 2003) osservano che Lakoff e Núñez nella loro analisi non distinguono le diverse funzioni che la metafora può avere a secondo che si stia *apprendendo*, *facendo* od *utilizzando* la matematica e la matematica che si cerca di giustificare con i meccanismi metaforici è unicamente quella concettuale, ovvero la matematica istituzionale, come è presentata nei libri. Osservano anche che non è detto che le metafore poste da Lakoff e Núñez alla base della matematica siano le stesse utilizzate dall'individuo mentre apprende matematica. Come esempio mostrano come si possa pensare alla derivata tramite metafore concettuali diverse da quella proposta dagli autori, questa critica viene mossa anche da Goldin (Goldin, 2001). Infine Schiralli e Sinclair non mettono in dubbio l'importanza e la pervasività della metafora nella matematica, ma indicano come questione critica e di interesse capire come chi apprende matematica si costruisca tali metafore. Madden aggiunge altre critiche (Madden, 2001): innanzitutto gli autori non spiegano in che modo le metafore vengano utilizzate nel fare matematica e nell'usare la matematica, ma si basano unicamente sulla matematica che si trova sui testi, inoltre, secondo Madden, Lakoff e Núñez non usano il concetto di metafora in maniera univoca e precisa, e mostra diversi significati con i quali tale concetto viene utilizzato nel loro lavoro. Robutti (Robutti, 2006) rileva come nel libro di Lakoff e Núñez sia carente una analisi degli aspetti culturali, fondati storicamente e socialmente nelle civiltà umane e che hanno spesso stimolato la nascita e lo sviluppo di concetti e teorie matematiche. Anche Lolli (Lolli, 2002) critica le argomentazioni di Lakoff e Núñez, in particolare nota come la scelta di alcune metafore fondanti (*grounding*) sia arbitraria e non rispondente a quello che è stato il reale sviluppo storico di alcuni concetti matematici. Lolli considera, ad esempio, lo sviluppo del concetto di numero negativo e si chiede perché alcune metafore fondanti per gli autori, come quella del movimento lungo una linea, non avrebbero potuto generare anche l'idea di numero negativo, oppure perché una metafora come quella dei debiti e dei crediti non sia stata presa in considerazione visto che è proprio da questi problemi pratici e di origine socio-culturale che sono nati i numeri negativi. Lolli critica pure il modo con cui gli autori trattano la teoria degli insiemi, mettendo in luce alcune incoerenze.

1.5 Problemi associati alle metafore

Alcuni autori hanno messo in evidenza una caratteristica che può apparire paradossale se si considera la metafora come capace di creare nuova conoscenza matematica a partire dalla vecchia, infatti come sarebbe possibile per degli alunni riuscire a costruire le analogie che permettono di costruire un nuovo concetto matematico utilizzando una metafora che, per essere compresa, ha bisogno già di una preliminare comprensione della struttura del concetto matematico da apprendere? (Sfard, 1997).
Un'altra domanda che i ricercatori si sono posti è: cosa mette in moto il meccanismo di proiezione metaforica? Come accade che due domini, anche lontani, siano messi in relazione fra loro? (Sfard, 1997).
Un altro problema indagato dagli studiosi è quello relativo ai criteri possibili per riconoscere una metafora, visto che esse non possono essere capite se non sono riconosciute. Il problema, come suggerisce Black (Black, 1962, pag.124), è simile a quello di stabilire quando uno sta scherzando o meno.

2. Analogia

2.1 Analogia, mapping analogico ed inferenza analogica

Anche l'analogia è stata individuata e studiata a partire dai filosofi greci. Aristotele (*Poetica* e *Retorica*) la definisce come una relazione a quattro termini, schematicamente A:B::C:D (Mason , 1992, pag 55), in questo caso si mettono in relazione quattro termini ad es: avvocato:cliente:: medico:paziente. Sander ed Hofstadter scrivono che Platone ed Aristotele davano grande importanza all'analogia come mezzo di pensiero e non solo come mero artificio letterario, ed anche Kant e Nietzsche avevano in grande considerazione l'uso e l'importanza di analogie e metafore (Sander, Hofstadter, 2013, p.21).

Rossi mostra come Bacone avesse in grande considerazione l'analogia e riporta i seguenti passi: "*Finora gli uomini hanno impiegato grande impegno e curiosità nel notare la varietà delle cose e* *nello spiegare accuratamente le differenze degli animali, delle erbe, dei fossili, la maggior parte delle quali sono piuttosto scherzi della natura che cose di una qualche utilità per le scienze. Tutto ciò serve certo a divertire, e talvolta anche alla pratica, ma poco o niente a penetrare nella natura. Il nostro impegno deve essere invece completamente rivolto all'indagine e alla osservazione delle somiglianze e delle analogie sia nella totalità sia nelle parti. Esse sono infatti ciò che unisce la natura, e cominciano a costituire le scienze.* " (Rossi, 1986, p. 134 ; Bacone, 1620, II, 27, p. 353)

Ancora: " *Tutti gli esempi da noi citati, e altri consimili, non devono essere intesi come semplici similitudini (tali potrebbero apparire a ingegni poco perspicaci) ma proprio come gli stessi segni o tracce impressi nella natura su diversi oggetti e in materie diverse.*" (Rossi, 1986, p. 135).

Il dizionario (Zingarelli, 2001) propone la seguente definizione di analogia: "*Relazione e affinità di due o più cose tra loro*", definizione che evidentemente si riferisce più ad un significato generico che si trova nell'uso quotidiano di questo termine. In maniera più precisa, gli studiosi contemporanei considerano come analogie anche analogie di ordine superiore, se la precedente analogia con la struttura A:B::C:D viene definita di secondo ordine (è una relazione fra relazioni) una analogia con lo schema A:B::C:D:::E:F::G:H sarà definita come analogia di terzo ordine (analogia fra analogie) (Mason, 1992; Sternberg e Downing, 1982) ad esempio:

(Il linguaggio macchina sta (:) all'hardware come (::) il linguaggio di programmazione sta (:) al software)

allo stesso modo in cui (:::)

(il linguaggio del cervello sta (:) alle connessioni neurali come (::) il linguaggio ordinario sta (:) alle strutture cognitive)

(Sternberg e Downing, 1982, p. 210)

English scrive che: "*ragionare per analogia è generalmente definito come il trasferimento (transfer) di informazioni strutturali da un sistema, la base, ad un altro sistema detto target*" (English, 1997, pag. 6) e: "*Questo trasferimento di conoscenza è ottenuto attraverso processi di mappatura o confronto che comportano l'individuazione di corrispondenze relazionali fra i due sistemi.*" (English, 1997, pag. 198). Questa autrice propone come esempio l'interpretazione di una rappresentazione concreta (oggetti, modelli fisici) o pittorica (schemi, grafici, disegni). In questo caso la rappresentazione concreta o pittorica funziona da source ed il concetto che deve essere appreso funziona da target. Gli studiosi parlano anche di *inferenza analogica* definita come "*un processo che permette di elaborare informazioni su un campo fenomenico sulla base di alcune somiglianze fenomeniche con un campo più conosciuto, proiettandovi un modello di relazioni strutturali"*" (Mason,1992 pag. 30).

Hesse (Hesse, 1966) si occupa dell'analogia come mezzo di conoscenza scientifico (epistemologico), quindi come mezzo utilizzato da scienziati per fare ipotesi e creare modelli, a questo proposito distingue i due problemi:

- Cosa è una analogia?
- Quando è valida una inferenza analogica?

L'analogia viene presentata come una messa in relazione di due ambiti diversi ma non viene data una precisa definizione, piuttosto si analizzano diversi casi emblematici.

L'autrice è interessata all'utilizzo di analogie in ambito scientifico, specificamente in fisica, e distingue due tipi di analogie che si possono individuare in questo ambito: *analogia formale* ed *analogia materiale* o preteorica (Hesse, 1966, pag.88). L'analogia formale è una corrispondenza biunivoca fra due diverse interpretazioni di una teoria fisica, mentre l'analogia materiale è quella che permette, nelle scienze, di fare previsioni e ipotesi e quindi di usare le analogie come modelli.

Questa autrice distingue le *analogie positive*: le caratteristiche simili degli oggetti messi in corrispondenza dall'analogia dalle *analogie negative*: le caratteristiche diverse di tali oggetti. Hesse afferma che la validità di una inferenza analogica dipende dall'estensione dell'analogia positiva rispetto a quella negativa (ovvero a quanto i due ambiti assomigliano) ma non solo da questo; infatti l'analogia dovrà mettere in corrispondenza elementi che hanno le stesse relazioni causali altrimenti l'eventuale inferenza analogica nel secondo ambito non sarà giustificata. Vengono poi distinte le *relazioni verticali* che sono le relazioni causali in ciascun ambito, e le *relazioni orizzontali* che sono le relazioni si somiglianza fra elementi corrispondenti dei due ambiti.

Esempio 1 (Hesse 1966, pag. 81)

Ambito A: pianeta Terra	Ambito B:Luna
Sferica	Sferica
Atmosfera	No atmosfera
Esseri umani	?

In questo esempio sono presenti due ambiti Terra e Luna e messi in corrispondenza alcuni elementi, la forma sferica di entrambi (analogia positiva), la presenza/assenza di atmosfera (analogia negativa), tramite inferenza analogica si possono fare ipotesi sulla presenza/assenza di esseri umani sulla Luna. Queste somiglianze/differenze sono le relazioni orizzontali, le relazioni di causalità in ogni ambito sono le relazioni verticali. In particolare se la nostra conoscenza dell'ambito terrestre ci consente di stabilire che la presenza di esseri umani dipende dalla presenza di atmosfera e non dalla sfericità, allora l'inferenza analogica ci potrà portare a ipotizzare che "come nella terra dove è presente l'atmosfera ci sono esseri umani allora sulla luna, dove l'atmosfera non è presente, non ci saranno"

Esempio 2 (Hesse 1966, pag. 82)

Ambito A: proprietà del suono	Ambito B: proprietà della luce
Eco	riflessione
intensità	luminosità
altezza	colore
percepito dall'occhio	percepito dall'orecchio
propagato nell'aria	propagato nel vuoto

Da questa analogia possono seguire diverse inferenze analogiche ponendo in relazione le caratteristiche elencate, ad esempio: luce:riflessione::suono:eco. In questo secondo esempio gli elementi corrispondenti non sono uguali ma simili e le relazioni verticali sono causali e quindi tramite inferenza analogica si possono ipotizzare proprietà di un ambito partendo da proprietà dell'altro. Per esempio si potrebbe inferire, per analogia, che il suono produce il fenomeno della diffrazione dopo avere constatato che la luce lo produce.

Infine l'autrice inquadra l'analogia come un tipo di inferenza induttiva per dedicarsi all'obiettivo di valutare in maniera oggettiva e quindi quantificare la validità di una inferenza analogica. Vengono illustrate in maniera critica alcune delle teorie esistenti che si potrebbero utilizzare (teoria della conferma, falsificabilità di Popper) e proposta una teoria matematica (modello) dell'analogia basata sulla struttura matematica di reticolo che serve all'autrice per mostrare come "calcolare" il quarto termine di una relazione analogica (Hesse, 1966, cap V e VI).

In uno studio recente Sander e Hofstadter presentano l'analogia come un processo cognitivo presente, soprattutto in maniera inconscia, nel nostro modo di interpretare ed interagire con il mondo e con gli altri (Hofstadter, Sander, 2013).

2.2 Due tipi di analogie

Vosniadou e Ortony, che studiano l'analogia dal punto di vista psicologico, dichiarano che: "*c'è accordo generale sul fatto che il ragionamento analogico comprende il trasferimento di informazione relazionale da un dominio che già esiste in memoria (generalmente indicato con dominio source o dominio base) al dominio che deve essere compreso (indicato come dominio target)*" (Vosniadou , Ortony, 1989, pag.7), e distinguono due tipi di analogie:

- *Between-domain analogies* (o anche analogie *metaforiche*): nelle quali gli elementi messi in corrispondenza sono presi da domini concettualmente diversi o distanti. Ad esempio l'analogia fra atomo e sistema solare è di questo tipo (Vosniadou, Ortony, 1989, pag.414);

- *Within-domain analogies* (o *analogie*): dove gli elementi messi in corrispondenza sono presi da uno stesso dominio. Esempi possono essere analogie fra problemi che riguardano lo stesso ambito nei quali ci sono solo alcune modifiche o problemi di generalizzazione (a più dimensioni o a numeri maggiori).

Gli autori suggeriscono che alla base di tali diverse forme di analogia possano esserci processi sottostanti diversi, e scrivono: " *Pensiamo che sia importante non perdere di vista la distinzione fra i due tipi di analogie, perché è possibile che nei due casi siano coinvolti processi in qualche modo diffrenti.*" (Vosniadou, Ortony, 1989, p.7).

Non tutti gli autori convengono nel definire analogie anche le within-domain analogies, ad esempio Gentner considera tali analogie come somiglianze letterali (literal similarity) (vedere la figura 1 successiva) (Vosniadou, 1989, pag.415).

2.3 Modelli per l'inferenza analogica

Analizzando le modalità con le quali le analogie vengono utilizzate dal punto di vista psicologico (ad esempio nel problem solving), si sono proposti diversi modelli con l'obiettivo di analizzare più in dettaglio i processi in atto in relazione anche alle risorse cognitive del soggetto.

Secondo il *modello componenziale* di Sternberg (Mason, 1992, pag.56), dato un problema analogico del tipo:

avvocato:cliente::medico: (paziente o medicina ?)

nel quale il soggetto deve scegliere uno dei termini fra parentesi da inserire nell'analogia, il ragionamento analogico si svolge secondo le seguenti fasi:

1. Codifica dei termini dell'analogia, cioè la loro traduzione in rappresentazioni interne;
2. Inferenza della relazione tra i primi due termini, che viene archiviata nella memoria di lavoro (nell'esempio la relazione riguarda il servizio professionale che l'avvocato fornisce al cliente);
3. Proiezione della relazione che lega i primi due termini alla seconda parte (scoperta della relazione avvocato-medico);
4. Applicazione della relazione inferita tra il terzo ed il quarto elemento. In questo caso il soggetto stabilisce che la risposta corretta è "paziente";
5. La giustificazione della scelta di un'alternativa come la più plausibile nei casi in cui nessuna delle opzioni viene ritenuta del tutto corretta;
6. Il controllo della risposta, ossia la preparazione, la verifica e la traduzione della soluzione in quest'ultima.

Secondo il *modello pragmatico* di Holyoak (Mason, 1992, pag.61) il transfer per analogia avviene secondo le seguenti fasi che non avvengono in uno stretto ordine seriale ma interagiscono in vari modi:

1. Rappresentazione mentale di una situazione nota (*source* dell'analogia) e di una non nota (*target* dell'analogia);
2. Scelta della situazione nota come entità analoga potenzialmente rilevante per il target (obiettivo);
3. Individuazione della corrispondenza tra source e target, ossia il riconoscimento degli elementi che giocano ruoli corrispondenti nelle due situazioni;
4. L'estensione della corrispondenza (mapping) generando nuove regole che possono essere applicate al target per produrre una soluzione.

Il *modello di Keane,* (Mason, 1992, pag.79) stabilisce alcuni vincoli che incidono sull'inferenza analogica:

1. *Vincolo della memoria di lavoro*: Il carico di informazioni che la working memory può sostenere durante l'elaborazione di un'analogia è limitato;
2. *Vincolo del controllo*: sia il mapping che il transfer analogico sono prodotti un passo alla volta;
3. *Vincolo della verifica*: e' necessario verificare se gli elementi del dominio di base possono essere applicati appropriatamente al dominio target;
4. *Vincolo delle similarità*: nel processo di accoppiamento (matching) le corrispondenze tra elementi identici o semanticamente simili sono preferite a quelle tra elementi dissimili;
5. *Vincolo della pragmatica*: parti del dominio di base e di target, che sono rilevanti per gli scopi da raggiungere, vanno selezionati per il mapping;
6. *Vincoli strutturali*: riferiti alla nozione di isomorfismo tra domini, determinano le corrispondenze tra differenti tipi di relazioni.

Secondo l'autore questo modello (quando è stato proposto) era l'unico a considerare che si può elaborare solo una quantità limitata di informazioni, per cui certi insuccessi nello stabilire analogie possono essere attribuiti a questo aspetto.

Secondo il *modello strutturale* di Gentner (Mason, 1992, pag.81) ciò che gioca un ruolo fondamentale nell'inferenza analogica sono le relazioni fra gli oggetti e non gli attributi degli oggetti stessi. L'idea centrale in questo modello è che l'analogia è una mappatura di conoscenze da un domino (base) ad un altro (target) che fa in modo che uno stesso sistema di relazioni si mantenga in entrambi. Perciò, secondo questa autrice, l'analogia è un modo per focalizzare le relazioni comuni fra due domini indipendentemente dagli oggetti fra i quali intercorrono tali relazioni. Centrale in tale processo è il *principio di sistematicità* secondo il quale nell'uso di analogie le persone preferiscono sistemi di relazioni dominati da relazioni a più altro livello che portino ad inferenze piuttosto che predicati isolati (Gentner, 1989). In altre parole, seguendo questo modello si dovrebbe sempre tendere a dare la precedenza, nella scelta dell'analogia, a relazioni di ordine il più superiore possibile e, a seguire, a quelle di ordine inferiore senza considerare le caratteristiche superficiali.

Inoltre questa autrice ha sostenuto che l'accesso all'analogia (ovvero la possibilità di creare un mapping fra due domini) dipende fortemente dalla rappresentazione, quindi dalla sintassi, dei domini. Nei suoi studi sull'apprendimento spontaneo tramite analogia, ha individuato i seguenti processi:

1. Accesso al sistema base di conoscenze;
2. Proiezione tra source e target;
3. Valutazione della proiezione;
4. Produzione di inferenze sul target;
5. Estrazione del principio comune.

In tale teoria il mapping analogico è visto come una mappatura fra due domini di conoscenza, la *base* (o source) ed il *target*, tale mappatura conserva anche una serie di relazioni fra i due domini. In generale il dominio base è quello meglio conosciuto da chi deve risolvere un problema o comprendere una nuova situazione, il dominio target è, in genere, quello nuovo. Esistono tuttavia una serie di situazioni che possono passare dal *pure matching,* nel quale entrambi i domini sono conosciuti e si deve trovare una corrispondenza, un mapping, fra i due in modo che siano conservate anche le relazioni (può essere il caso in cui si traduce un certo problema in altri termini, collegandolo ad un altro problema), al *pure carry-over* , nel quale si conosce qualcosa del dominio di base ma non si conosce nulla del dominio target (può essere il caso dell'uso di una analogia da parte dell'insegnante per spiegare un nuovo concetto o una nuova situazione). Ovviamente, in genere, esistono situazioni intermedie, nelle quali si possono conoscere a livelli diversi entrambi i domini. Inoltre, la situazione può evolvere, ad esempio un alunno , dopo avere , appreso un nuovo concetto o conoscenza da una situazione di pure carry-over, potrebbe poi utilizzare gli stessi domini per risolvere un problema in una situazione, questa volta, di matching. Gentner (Gentner, 1989) propone l'esempio del flusso di calore fra due corpi come flusso di un fluido fra due recipienti, inizialmente l'alunno potrebbe non conoscere nulla del fenomeno della conduzione del calore (dominio target) e conoscere abbastanza del flusso di un fluido (dominio base), dopo avere appreso questa analogia potrebbe sfruttarla in un problema (ad esempio trovare la temperatura di equilibrio fra due corpi in contatto) sfruttando l'analogia (tramite *inferenza analogica*).

Alcune differenze sostanziali si possono evidenziare fra le concezioni di Holyoak e Gentner (Mason, 1992). In particolare Gentner non considera gli obiettivi che guidano la creazione dell'analogia mentre per Holyoak questi sono importanti. Gli obiettivi che si hanno nell'utilizzare una analogia determinano anche il tipo di relazioni che si devono cercare di mettere in corrispondenza. Se l'obiettivo è la spiegazione di un dato fenomeno allora le relazioni causali avranno maggiore importanza di altre, se l'analogia riguarda la matematica allora si favoriranno le relazioni di implicazione (Abrantes, 1999). Inoltre, come già osservato, Gentner attribuisce maggiore importanza alle relazioni di ordine superiore rispetto a quelle di ordine inferiore e trascura le caratteristiche superficiali.

Secondo Mason, tali modelli non devono considerarsi in opposizione ma complementari: "..*è possibile ed utile considerare l'interazione fra contesto pragmatico e struttura relazionale nel processo di ragionamento analogico, per tentare di spiegare i vari tipi di analogia.*" (Mason, 1992, pag.90).

Per utilizzare una analogia nel caso di risoluzione di un problema, oppure per affrontare una situazione problematica nuova, Vosniadou (Vosniadou, 1989) propone i seguenti passi:

- Ricerca di una analogia nota (source) che soddisfi alle richieste del problema;
- Creazione di una mappatura fra i domini source e base, trasportando le relazioni;
- Valutazione delle inferenze prodotte per la risoluzione del problema di partenza.

Diversi elementi possono influire su questi passi. Le conoscenze di base intervengono nella ricerca di una opportuna source analogica (non sono presenti conoscenze sufficienti o complete), per la attivazione di una analogia possono influire sia le caratteristiche superficiali (somiglianze fra singoli elementi) che le caratteristiche strutturali (somiglianza o identità fra relazioni), anche la rappresentazione della conoscenza può facilitare o meno il riconoscimento di somiglianze che possono attivare una analogia.

2.4 Accesso all'analogia

Un problema comune a tutti i tipi di modellizzazione dell'analogia è quello di stabilire le condizioni che permettono l'accesso alla proiezione analogica e successivamente all'inferenza analogica (transfer analogico). In generale si possono distinguere due tipi di similarità fra i due domini: *superficiale* (somiglianza fra le caratteristiche degli oggetti dei domini) e *strutturale* (somiglianza fra le relazioni esistenti fra gli oggetti di ciascun dominio) (Mason, 1992), ed uno degli aspetti che sono stati studiati è l'influenza di tali similarità fra i domini messi in corrispondenza nell'accesso all'analogia.

Come sintetizzato da Brown (Brown, 1989), sono state presenti sin dall'inizio del secolo scorso due filosofie contrastanti riguardo agli elementi rilevanti per l'attivazione del transfer analogico; l'una sostenendo l'importanza delle sole caratteristiche superficiali (colore, forma..) e l'altra sostenendo che il transfer è determinato per estensione di quelli che si pensano essere i principi condivisi sottostanti dei due domini e tale contrapposizione fra caratteristiche superficiali e struttura profonda è ancora presente nel dibattito sull'analogia. Per queste analisi sono stati compiuti esperimenti nei quali, dopo avere affrontato problemi di un certo tipo, si proponevano, a distanza di tempo, problemi che potevano avere diversi tipi di somiglianza con i problemi precedenti, in particolare:

- Mera apparenza : proiezione di attributi di oggetti e relazioni di primo ordine;
- Analogia vera : proiezioni di relazioni di primo ordine e di ordine superiore;
- Analogia falsa : proiezione solo di relazioni di primo ordine.

Tali studi hanno rivelato che: "*le proiezioni di similarità letterali e le mere apparenze sono più accessibili delle analogie vere e false, ma nei giudizi di appropriatezza e di validità la sistematicità della struttura relazionale diventa il fattore dominante*" (Mason, 1992, pag.95)

In (Vosniadou, Ortony, 1989; Vosniadou, 1989) si afferma che la sperimentazione sul problem solving analogico ha mostrato che sia i bambini che gli adulti hanno delle difficoltà a recuperare informazioni (accesso) che possono sfruttare in analogie per risolvere nuovi problemi e fra le possibili cause indicano :

- una rappresentazione dei problemi non abbastanza astratta da parte dei soggetti;
- mancanza di sufficienti conoscenze di base.

Le conoscenze di base intervengono nella ricerca di una opportuna source analogica (non sono presenti conoscenze sufficienti o complete), per la attivazione di una analogia possono influire sia le caratteristiche superficiali (somiglianze fra singoli elementi) che le caratteristiche strutturali (somiglianza o identità fra relazioni), anche la rappresentazione della conoscenza può facilitare o meno il riconoscimento di somiglianze che possono attivare una analogia (Vosniadou, 1989). Gli stessi autori affermano che il problema non risiede nel meccanismo di inferenza analogico stesso, e ci sono evidenze del fatto che se gli alunni rappresentano i concetti target al giusto livello di generalità possono risolvere problemi analogici a quattro termini e capire metafore relazionali.

Alcuni studi dimostrano un comportamento differente nel caso che si spinga un alunno a ricordare una possibile sorgente di analogia piuttosto che a crearla, nel primo caso sembra che le somiglianze superficiali giochino un ruolo prevalente mentre nel secondo caso lo giocano le somiglianze strutturali (Blanchette, Dunbar, 2000). Inoltre si è potuto verificare che quando le caratteristiche superficiali sono coerenti con le caratteristiche strutturali gli alunni possono sfruttare analogie strutturali anche complesse, mentre se c'è conflitto le analogie vengono fondate sulle caratteristiche superficiali (Ratterman, 1997).

2.5 Il paradosso dell'analogia

Un problema che è stato sollevato, relativo alla individuazione di analogie, consiste nella determinazione delle corrispondenze fra i diversi elementi dei due ambiti che non sempre è di semplice realizzazione e che deve, almeno in parte, precedere l'inferenza analogica. Si arriva dunque a quello che potrebbe sembrare un paradosso, nelle parole di Hesse: "*C'è infatti un ben noto paradosso dell'uovo e della gallina che può essere espresso in questo modo: l'inferenza analogica dipende dall'induzione da leggi note che connettono le proprietà di ciascun analogo; quindi ogni inferenza di questo tipo è induttiva. D'altra parte, l'inferenza induttiva dipende dal riconoscimento di somiglianza fra esempi, nessuno dei quali è in pratica esattamente uguale agli altri;quindi ogni inferenza di questo tipo è analogica. Possiamo però arrestare il regresso all'infinito, se conveniamo di accettare caratteristiche fra cui riconosciamo identità o differenze che consideriamo come non ulteriormente analizzabili.*" (Hesse, 1966, pag. 92).

2.6 Legame fra metafora ed analogia

Quale è il legame fra metafora ed analogia? Il problema è ancora argomento di discussione fra gli studiosi, infatti si possono trovare opinioni diverse, almeno quando tale problema viene esplicitamente considerato. Ci sono studi (ad esempio fra quelli citati) sull'analogia e la metafora, nei quali non si trova una definizione esplicita che metta in evidenza la differenza fra tali concetti.

Presmeg si riferisce con queste parole alla possibile distinzione proposta da alcuni studiosi (Leino, Drakenberg, 1993): "*la metafora può essere considerata una forma implicita di analogia mentre la similitudine è una forma esplicita. Entrambe queste forme di analogia prevedono il confronto di due domini di esperienza, ma mentre la similitudine specificherebbe che 'il dominio A e come il dominio B', la metafora affermerebbe che 'il dominio A è il dominio B. In entrambi i casi l'analogia si riferisce solo ad alcuni elementi dei due domini.*" (Presmeg, 1997).
Secondo questa visione entrambe, metafora ed analogia, riguardano la creazione di una mappatura (mapping) fra due ambiti diversi della conoscenza umana, ma dal punto di vista linguistico la metafora può essere espressa con la forma "A è B" (metafora) mentre l'analogia nella forma "A è come B" (similitudine) (Sfard, 1997), noi crediamo che questa distinzione potrebbe non cogliere la vera essenza della differenza (se esiste) fra una e l'altra basandosi su aspetti superficiali che possono anche dipendere dall'abitudine e dalla pragmatica della lingua.

L'idea di metafora come analogia compare anche in Levin e Wagner (Levin, Wagner, 2006), che sostengono l'idea di metafora come mezzo per trasferire significato da un dominio all'altro ed anche: "*come analogie che ci permettono di mappare una esperienza nei termini di un'altra con l'obiettivo di facilitare la comprensione di argomenti complessi o nuove situazioni*". Anche Pimm , che ha studiato la metafora nell'ambito della didattica della matematica, sostiene l'idea di metafora come analogia condensata (Pimm, 1981), e secondo questo autore per comprendere una metafora si deve capire l'analogia in essa latente. Sfard scrive: "*L'essenza della differenza (*fra metafora ed analogia*), comunque, non viene evidenziata abbastanza attraverso le tipiche descrizioni che si trovano nei dizionari, secondo le quali la base sia della metafora che dell'analogia sarebbe la 'somiglianza fra due cose'. Fino a quando la metafora viene presentata come nient'altro che un caso particolare di analogia, che può essere distinta dagli altri tipi di analogia nei termini di 'distanza fra oggetti classificati come simili'* (*Knorr, 1980, pag 29*)*, la sua importanza non può essere pienamente compresa.* " …"*L'analogia entra in scena quando diventiamo consapevoli della somiglianza fra due concetti che sono già stati creati; l'atto di creazione stesso è questione di metafora*" (Sfard, 1997, pag 344). Quindi per Sfard la distinzione basata sulla "distanza" fra gli elementi dei domini, per cui in una metafora gli elementi posti in corrispondenza non sono simili fra loro, mentre nella analogia tale similitudine sussiste (per cui "la discussione è una guerra" sarebbe una metafora mentre "l'atomo è come il sistema solare" sarebbe da considerare una analogia visto che esistono somiglianze fra i singoli elementi), non è sufficiente a cogliere l'essenza della metafora che avrebbe un potere *creativo* più che descrittivo. L'idea di metafora come analogia implicita ma con un valore non riducibile all'analogia, è presente anche in Black (che si occupa di metafora da un punto di vista filosofico), il quale, dopo avere delineato la concezione interattiva della metafora, scrive :"*Ho detto che c'è una somiglianza, una analogia o, più generalmente, un'identità di struttura tra il complesso di implicazioni secondario di una metafora e l'insieme di asserzioni –il complesso di implicazioni primario - su cui esso 'si applica. In 'La povertà è un crimine', 'crimine ' e 'povertà'sono nodi di reti isomorfiche, nelle quali le affermazioni circa il crimine sono correlate in una corrispondenza uno a uno con asserzioni riguardanti la povertà. Così si può dire che ogni metafora media una analogia o una corrispondenza strutturale (questa è la corretta intuizione dietro la classica concezione comparativa, che vede la metafora come una similitudine ellittica o troncata). Si può anche dire , perciò, che ogni asserzione metaforica implica* *un'asserzione di somiglianza e un'asserzione di paragone, ognuna delle quali è più debole della proposizione metaforica originale ("Non ho detto che lui è come un'eco; ho detto e volevo proprio dire che lui è un'eco). Ma intuire che la metafora si basa sulla similitudine e l'analogia, non significa essere d'accordo con Whateley che la 'Similitudine o Paragone differisca dalla Metafora solo nella forma, o con Bain che 'la metafora è un paragone implicato nel mero uso di un termine'*" (Black, 1962, pag. 118).

Per Gentner (Mason, 1992, pag. 82) le metafore possono essere distinte in tre categorie:

- *Metafore di attributi*: ad esempio: "*il sole è come un'arancia*";
- *Metafore relazionali*: ad esempio: "*il tetto è come un cappello, una finestra è come un occhio*";
- *Metafore doppie*: ad esempio: "*il cielo è come l'oceano, le stelle sono come diamanti, un aquilone è come un uccello*", in cui sono poste in corrispondenza sia attributi di oggetti, sia strutture relazionali.

Le metafore del secondo tipo possono essere classificate, secondo l'autrice, come analogie, in quanto le due entità considerate condividono un dato sistema di relazioni, indipendentemente dagli oggetti considerati.

Quindi, secondo questa autrice, "*Una corrispondenza analogica va dunque considerata nei termini di una proiezione di relazioni, non di attributi di oggetti come accade per molte metafore*" (Mason, 1992, pag 82).

Questa psicologa (Gentner, 1989) propone una interessante scomposizione delle diverse forme di somiglianza (fra le quali include l'analogia e la metafora) basata su due dimensioni: gli attributi condivisi e le relazioni condivise. Si può sintetizzare la proposta con un grafico:

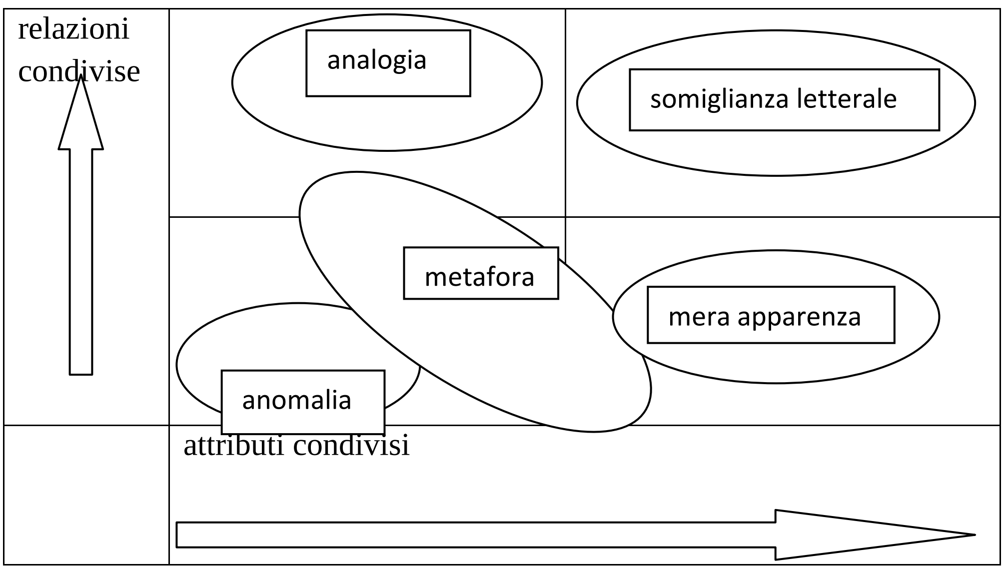


Figura 1

Più precisamente secondo questo schema (Gentner, 1989, pag.206; Abrantes, 1999) :

- *Analogia*: è un tipo di mappatura che non considera gli attributi ma solo le relazioni. Esempio: "*l'atomo è come il sistema solare*";

- *Somiglianza letterale*: nella mappatura si considerano sia condivisione degli attributi che delle relazioni. Esempio: "*l'atomo di neon è come l'atomo di elio*";

- *Mera apparenza*: mappatura basata solo su una condivisone di attributi. Esempio: "*il tavolo di vetro è come l'acqua*";

- *Astrazione*: è un tipo di mappatura nella quale il source è una struttura astratta (ad esempio una teoria matematica) che viene applicata ad un particolare target. Esempio: "*il flusso di calore è una variabile intensiva* ";

- *Anomalia*: mappatura nella quale si condividono pochi attributi e poche relazioni. Esempio: "*il caffè è come il sistema solare*" (se si mescola il caffè si possono distinguere elementi che ruotano attorno al centro, come nel sistema solare);

- *Metafora*: si sovrappone da una parte con l'analogia, con la mera apparenza e con la anomalia.

Si vede che l'autrice considera l'esistenza di metafore che non sono analogie, e di analogie che non sono metafore, la zona di intersezione fra metafora ed analogia contiene una zona che indica l'astrazione. Ci sono metafore che sono mere apparenze (molti attributi condivisi fra i domini ma nessuna o poche relazioni) e metafore che sono anomalie (pochi attributi e poche relazioni condivise).

Tale schema è stato criticato da Vosniadou che fa notare come, secondo questo schema: "*Alcune affermazioni di somiglianza entro-dominio (within-domain) come 'i cagnolini sono come gattini' non possono essere considerate come analogie , nonostante si possano costruire analogie a partire da esse come 'i cagnolini sono per i cani ciò che i gattini sono per i gatti'*" (Vosniadou, 1989, pag.416). Oppure si può pensare all'analogia "*la terra è come la luna*" ed utilizzarla per inferire che, così come a causa della rotazione del proprio asse sulla terra si presenta un ciclo giorno/notte, allora anche sulla luna, che ruota su se stessa, ci sarà un ciclo analogo. Ma, visto che la terra e la luna condividono molti attributi, secondo lo schema precedente non sarebbe considerabile una analogia. Una soluzione viene prospettata dalla stessa Vosniadou che fa notare come l'attenzione sia da porre, non tanto su una classificazione delle possibili espressioni che esprimono somiglianza, quanto sul ragionamento analogico che può avvenire anche in presenza di molti attributi condivisi fra gli elementi dei due domini. La caratteristica che definisce il ragionamento analogico è la somiglianza nelle strutture sottostanti e questa può esistere anche fra elementi che condividono molte caratteristiche perché appartenenti ad uno stesso dominio o a domini vicini. Un'altra critica, a nostro avviso più discutibile, è relativa al fatto che, secondo la Vosniadou, in una metafora i due domini devono essere lontani, appartenere a differenti domini concettuali e porta come esempio il fatto che analogie fra domini possono essere trasformate in metafore ("*l'atomo è un sistema solare*") ma le analogie all'interno di uno stesso dominio no ("*i cagnolini sono gattini*").

Una concezione ancora differente delle relazioni esistenti fra metafora e l'analogia viene proposta in (Fuchs, 2010a, 2010b) che aderisce alla concezione della metafora (metafora concettuale) come fondamentale meccanismo cognitivo che è stato sviluppato in linguistica cognitiva (Lakoff, Johnson, 1980; Lakoff, Núñez, 2000). Questo studioso propone che la metafora sia una proiezione fra due domini dei quali l'uno (source) farebbe parte di strutture della mente embodied ed un secondo (target), tale proiezione sarebbe unidirezionale, ovvero non accade che il primo dominio venga capito in termini del secondo ma sempre il contrario. Alcuni fenomeni possono essere associati a diverse metafore di questo tipo, e quando accade che due domini sono associati alle stesse metafore concettuali, essi acquisiscono una certa somiglianza, ovvero fra i due domini si può instaurare una analogia, anch'essa una proiezione fra due domini ma, in questo caso, bi-direzionale. (Fuchs, 2010a ; Fuchs, 2010b ; Fuchs et al.,2012).

2.7 Analogia e somiglianza

Nel parlare di analogie e metafore tutti gli autori, in qualche modo, parlano anche di somiglianza o di similitudine. Tuttavia anche questi concetti non sono di banale definizione. Bazzini scrive che Polya definiva l'analogia: " *..una specie di similarità, e la differenza principale fra analogia e similarità sta nelle intenzioni di chi pensa. Infatti oggetti simili concordano per qualche aspetto, ma se si intende considerare l'aspetto che hanno in comune per definire un concetto, allora gli oggetti simili vengono visti come analoghi.*" (Bazzini, 1995, pag. 113; Polya, 1945, 1954, 1962).

Il concetto di somiglianza ha avuto nel passato un significato ampio, che includeva quello di analogia, ed una notevole importanza: "*Sino alla fine del XVI secolo. La somiglianza, ha svolto una parte costruttiva nel sapere della cultura occidentale*" (Foucault, 1966, pag.31). Per avere un'idea del significato che si poteva attribuire a questo termine si può fare riferimento a quelle che in Foucault vengono chiamate "*le quattro similitudini*" presenti nel pensiero di quell'epoca:

- *Convenientia: "sono convenienti le cose che, avvicinandosi l'una all'altra, finiscono con l'affiancarsi; i loro margini si toccano; le loro frange si mescolano, l'estremità dell'una indica l'inizio dell'altra. In tal modo il movimento si comunica, analogamente alle influenze, alle passioni, e anche alle proprietà*" (Foucault, 1966, pag.32);

- *Aemulatio: "una sorta di convenienza, ma svincolata dalla legge del luogo e operante, immobile, a distanza".."somiglianza senza contatto".."Vi è nell'emulazione qualcosa sia del riflesso sia dello specchio*" (Foucault, 1966, pag.33);

- *Analogia: "E' un vecchio concetto familiare già alla scienza greca e al pensiero medioevale , ma il cui significato è probabilmente cambiato. Nell'analogia convenientia ed aemulatio si sovrappongono*"..*"Al pari della prima, essa consente il meraviglioso confronto delle* *somiglianze attraverso lo spazio, ma parla, come la seconda, di adattamenti, di vincoli e di giuntura*" (Foucault, 1966, pag.35);

- *Simpatia: "Ivi nessun cammino è anticipatamente determinato, nessuna distanza è presupposta, nessun concatenamento è stabilito. La simpatia agisce allo stato libero nelle profondità del mondo."* (Foucault, 1966, pag.37).

Nella definizione di analogia, anche in quella alla quale si riferisce Foucault, si parla di somiglianza, e gli autori che sono stati precedentemente citati parlano di somiglianza fra gli elementi dei domini e quando viene detto che due oggetti di due diversi domini hanno caratteristiche comuni, si sta dicendo (in certi casi viene detto esplicitamente) che assomigliano o sono simili. I concetti di somiglianza ed analogia sono fra loro legati, in effetti in Vosniadou ed Ortony vengono trattati entrambi (Vosniadou, Ortony, 1989).

La somiglianza fra elementi dei domini è utilizzata per la distinzione fra between-domain e within-domain analogies precedentemente descritta, ed una distinzione simile pare essere quella che si trova in Hesse (Hesse, 1966, pag132) che parla di due modi diversi in cui due elementi possono essere analoghi:

- *Proprietà in comune:* quindi caratteristiche comuni ai due elementi;

- *Somiglianza nella relazione:* ovvero gli elementi svolgono funzioni o hanno significati simili all'interno di un sistema di relazioni.

La Hesse si spinge oltre e propone di considerare il concetto di similitudine (o somiglianza) anche fra le relazioni che vengono proiettate fra i due domini di una analogia.

In altre parole ci pare che si possa riformulare dicendo che, dati due domini che sono legati da una analogia, avviene una mappatura fra i due che associa gli elementi e le relazioni. Gli elementi che vengono associati possono dirsi simili sia per il fatto di avere delle loro caratteristiche intrinseche ed indipendenti dagli altri elementi o relazioni del dominio di cui fanno parte che, sia per il fatto di occupare lo stesso ruolo all'interno dei domini dei quali ciascuno fa parte. Il primo tipo di somiglianza può essere del tutto slegato dall'esistenza di una qualche analogia (ad esempio la somiglianza dei lineamenti fra due fratelli) e dipende solo dalle caratteristiche interne o *intrinseche* degli elementi. Il secondo tipo dipende invece dall'esistenza di una analogia fra i due elementi in quanto inseriti in certi domini (ad esempio due persone assomigliano perché sono entrambe responsabili di un ufficio tecnico). Con questo si può leggere lo schema proposto da Gentner (figura 1) interpretando l'asse orizzontale come l'asse della somiglianza dovuta a *caratteristiche interne* (attributi condivisi) degli elementi messi in corrispondenza dall'analogia e l'asse verticale come l'asse della somiglianza dovuta a *caratteristiche esterne* (relazioni condivise) di tali elementi. Come interpretare invece l'idea della somiglianza fra relazioni della Hesse?

3. L’uso di Analogie e Metafore nella scienza e nei testi scientifici

La metafora e l’analogia sono state usate da scienziati, ed in particolare da fisici che le hanno usate per collegare aree in apparenza diverse o per ricondurre nuovi problemi a problemi/situazioni note oppure per arrivare ad idee completamente nuove. Ecco cosa dice Keplero in un trattato sulle coniche nel quale sfrutta l’analogia in diversi punti per ottenere alcuni risultati ed unificare i procedimenti: “..*Il termine “arco” è qui usato abusivamente, perché l’ “arco” è ora una retta. Eppure, ritengo necessario che i termini geometrici siano assoggettati all’analogia: io amo moltissimo le analogie, che considero come miei affidabilissimi maestri, esperti di tutti gli arcani della natura; ad esse in geometria bisogna prestare attenzione soprattutto mentre racchiudono – anche se con espressioni che sembrano assurde – infiniti casi intermedi fra i loro estremi (e un centro), e così pongono davanti agli occhi, in piena luce, la vera essenza di qualche oggetto*.” (Kepler, 1604)

Black (Black, 1962) mette in evidenza come la creazione di una analogia fra il dominio della matematica (scomposizione di un rettangolo in quadrati diversi) e la teoria delle reti elettriche, abbia consentito ad alcuni matematici di risolvere il problema del primo dominio sfruttando conoscenze e tecniche del secondo. Presmeg (Presmeg, 1997) mette in evidenza come l’analogia e l’immaginazione, in particolare quella visuo-spaziale, possa essere il mezzo più adatto per alcuni alunni, andando incontro allo stile cognitivo che può essere, appunto, basato sull’immaginazione visuo-spaziale. L’autrice segnala anche come ci siano stati grandi scienziati che erano caratterizzati da una forma di pensiero basato su una immaginazione visuale, motoria o uditiva (Faraday, Galton, Tesla, Watson, Thom, Fuller ed Einstein). L’uso di metafore ed analogie da parte di scienziati è stato oggetto di studio da parte filosofi, storici della scienza ed altri studiosi, si vedano ad esempio (Miller, 2000, 1994; Rossi, 1986, Cap.4). Spesso i modelli e le teorie che vengono costruite in modo da essere logicamente consistenti sono nati da metafore che sono state poi dimenticate o considerate non come facenti parte della scienza ma della storia della scienza (Sfard, 1997; Bruner, 1986), un esempio può essere la teoria elettromagnetica di Maxwell, come mostriamo sotto. Vediamo alcuni casi di tale uso:

Keplero: seguendo un’idea di Gilbert tenta di spiegare il moto dei pianeti in analogia al movimento causato dai magneti sul ferro (Bellone, 2000, pag. 403). In un suo lavoro sulle coniche sfrutta l’analogia per inferire alcune proprietà che sono effettivamente vere (Kepler, 1604). Nel suo Somnium (Kepler, 1634), inferisce per analogia, come lui stesso afferma in una nota, le dimensioni corporee e la durata della vita di ipotetici esseri abitanti la luna;

Newton: per arrivare alla sua teoria della composizione della luce, in seguito al famoso esperimento del prisma, si aiuta anche con una analogia con il comportamento delle palle da tennis che, colpite in modo da avere una rotazione, si curvano mentre si muovono nell’aria. Questo lo porta a rafforzare l’idea della natura corpuscolare della luce (Lightman, 1989, p. 97).

Hooke: utilizza l’analogia per proporre spiegazioni di diversi fenomeni: l’azione dell’aria nei processi di combustione, fenomeni metereologici usando i risultati ottenuti con la pompa pneumatica, la circolazione linfatica delle piante usando il modello della capillarità, fenomeni geologici come la formazione di sorgenti usando il modello dell’elasticità (Rossi, 1986, pag. 145);

Coulomb: nei suoi studi si fa guidare, in parte, dall'analogia con la sua scoperta sulla forza elettrica e dalla forza di gravitazione per indagare la forza magnetica (Bellone, 2000, pag. 692);

Carnot: nel suo studio sui principi di funzionamento delle macchine termiche (Carnot, 1824), aderisce alla teoria del calorico (in voga in quel periodo), quindi alla metafora del "calore come fluido " che passa da un corpo all'altro. Tale metafora lo spinge all'analogia che vede una macchina termica come una sorta di mulino che sfrutta la caduta del fluido da un punto superiore (temperatura superiore) ad un punto più basso (temperatura inferiore). L'inferenza analogica corretta è che una macchina termica funziona solo se sono presenti (almeno) due sorgenti a temperatura diversa, ma Carnot inferisce, non correttamente, che la quantità di calore che passa al punto inferiore è la stessa che parte dal punto superiore (così come la quantità di acqua si conserva) e quindi manca di cogliere il nucleo del primo principio della termodinamica (Gamow, 1961, pag. 99; Bellone, 1990, pag 161). Gamow (Gamow, 1961, pag. 99) propone una interessante analogia per correggere l'analogia di Carnot dove parte dell'energia dell'acqua che cade viene sfruttata per sollevare l'acqua;

Young: spiega le frange di interferenza della luce con l'analogia dei fenomeno dei battimenti nel suono (Kipnis, 2005);

Maxwell: nella costruzione delle sue equazioni per i fenomeni elettromagnetici parte dal modello delle linee di forza di Faraday proponendo un modello che ipotizza sottili tubi percorsi da un fluido incomprimibile potendo contare con l'analogia con le leggi note dell'idrodinamica (Bellone, 1990, pag.219; Peruzzi, 2010, pag. 186; Miller, 2000; Lightman, 1989). Seguendo Newton nello studio della composizione dei colori sfrutta una analogia con il calcolo del centro di gravità di tre masse nel triangolo dei colori. (Peruzzi, 2010, pag.85);

Einstein: per arrivare a quello che definì il "*pensiero più felice della mia vita*", ovvero il principio di equivalenza, si fece guidare dall'analogia con l'esistenza relativa del campo elettrico nel fenomeno dell'induzione elettromagnetica (Holton, 1984, p.96).

Durante il '700 l'idea di fluido pervade la fisica e la chimica e si cerca di applicare questa metafora a fenomeni diversi: calore, fenomeni elettrici, fenomeni chimici e biologici (Bellone, 2000, pag. 674). Nella prima metà dell'800 il concetto di affinità (attrazione /repulsione) viene utilizzato in chimica e nella fisica per trattare in maniera analoga fenomeni come le reazioni chimiche, i fenomeno luminosi e termici. (Bellone, 2000, pag 251).

Se consideriamo la scienza contemporanea, in fisica quantistica si può individuare la presenza di più metafore: luce come onda e luce come corpuscolo, dualità onda-corpuscolo. Oppenheimer (Oppenheimer, 1956), mostra come diverse idee nella fisica atomica e nucleare siano nate partendo da analogie. Ad esempio la teoria del decadimento dei nuclei è sorta dall'idea di Fermi di trattare il problema in analogia a quanto succedeva con gli elettroni degli orbitali atomici e la teoria sviluppata da Yukawa, che lo portò a prevedere l'esistenza di una nuova particella, partiva da una ipotizzata analogia fra forze elettromagnetiche e nucleari.

A proposito dell'utilizzo delle analogie da parte degli scienziati e dell'interpretazione che viene data dagli psicologi di tale uso, Kipnis (Kipnis, 2005) osserva che, riferendosi all'analogia fra modello atomico e sistema solare, gli psicologi si concentrano sul dominio di base che possiede sin dall’inizio alcune specifiche caratteristiche e poi viene mappato completamente sul dominio andando a vedere se alcune delle relazioni o elementi trasportati possano essere utili per risolvere il problema. Gli scienziati, al contrario, si concentrano sul problema che determina quali predicati siano da prendere in considerazione. Quando viene trovato un opportuno dominio di base vengono considerati in esso solo quei predicati che possono rivelarsi utili per il problema dato.

In ogni caso, secondo questo autore, l’analogia ha svolto un ruolo importante nel diciottesimo secolo per il trasferimento di conoscenze da un ramo della fisica ad un altro e tale trasferimento ha coinvolto concetti o leggi specifiche piuttosto che intere teorie, ed avveniva in tutte le possibili direzioni piuttosto che dal più semplice al più complesso.

Viene anche proposto un criterio per testare una analogia, verificando una ipotesi analogica ad un certo livello della gerarchia si conosce qualcosa anche sulle analogie di livello più alto o più basso.

Per quanto riguarda l’uso didattico di metafore ed analogie, abbiamo analizzato alcuni testi per le scuole superiori italiane di primo e secondo grado ed alcuni testi divulgativi, ed abbiamo individuato alcune analogie o metafore utilizzate a scopo didattico. Ci limitiamo ad alcuni esempi tratti dalla fisica e dalla matematica, in alcuni casi gli stessi autori definiscono le associazioni proposte come analogie, in tutti i casi crediamo che sia possibile individuare una analogia:

Viene proposta la rappresentazione di un sistema di due equazioni come rette nel piano cartesiano (Bergamini, Trifone, Barozzi, 2008, pag.829);

I numeri reali vengono rappresentati come punti su di una retta

Un esempio che si trova diffusamente nei testi di matematica è la metafora dei numeri reali come punti di una retta, si veda ad esempio (Bergamini, Trifone, Barozzi, 2008), che viene studiata anche in (Lakoff, Núñez, 2000). Tale metafora, che si può manifestare con espressioni verbali e grafiche, permette la costruzione di una analogia fra la struttura dei numeri reali e la geometria dei punti sulla retta, in modo che si possa ragionare su un dominio per avere informazioni valide ed utili anche sull’altro;

Viene sfruttata una rappresentazione geometrica del quadrato di un binomio per ottenere l’algoritmo di Erone per l’estrazione di radice quadrata (Bergamini, Trifone, Barozzi, 2008, pag.921);

Viene utilizzata una rappresentazione geometrica per giustificare il metodo del completamento del quadrato per la risoluzione di equazioni di secondo grado (Bergamini, Trifone, Barozzi, 2008, pag.1023);

Per risolvere disequazioni di secondo grado viene utilizzata una loro rappresentazione nel piano cartesiano (Bergamini, Trifone, Barozzi, 2008, pag.1241);

Gli angoli in verso antiorario vengono associati a valori positivi, quelli in verso orario a valori negativi (Dodero, Baroncini, Manfredi, 2005, pag.11);

Una relazione viene rappresentata come una coppia di insiemi con elementi uniti da frecce (Andreini, Manara, Prestipino, 1998, pag.25);

Equazione come bilancia

In alcuni testi si propone la metafora dell'equazione come bilancia (Presmeg, 1997; Boero, Bazzini, Garuti, 2001) come modo per rendere più comprensibili le operazioni che permettono di risolvere l'equazione (noti anche come *principi di equivalenza* delle equazioni). Le conoscenze che abbiamo sulla bilancia e sull'equilibrio vengono sfruttate per giustificare le operazioni matematiche che servono per la ricerca della soluzione o la manipolazione di una equazione (divisione e moltiplicazione su entrambi i membri e trasporto con cambiamento di segno da un membro all'altro);

Per risolvere sistemi di disequazioni di primo grado, tali disequazioni vengono interpretate come semipiani nel piano cartesiano (Andreini, Manara, Prestipino, 1998, pag.62);

Per spiegare la formula per il quadrato di un binomio il quadrato viene rappresentato geometricamente (Benaglia, Miele, 2001, Algebra 1, pag.B46);

Si utilizza un algoritmo sulla retta per definire i numeri reali come coppia di razionali (Benaglia, Miele, 2001, Algebra 2, pag.G16);

Le operazioni sui numeri reali vengono interpretate come operazioni su coppie di razionali (Benaglia, Miele, 2001, Algebra 2, pag.G23);

Per giustificare la formula per l'area del rettangolo si sfrutta l'idea di un segmento che "spazza" una certa superficie (Castelnuovo, 1979, La Geometria, pag.51);

Si propone la verifica dell'equivalenza di aree basandosi sull'equivalenza dei pesi, e si usa la bilancia per provare che vale il Teorema di Pitagora (Castelnuovo, 1979, La Geometria, pag.69);

Il confronto fra numeri reali viene basato sulla posizione sulla retta dei punti che li rappresentano (Castelnuovo, 1979, I Numeri, pag.136);

Per giustificare la regola dei segni si rappresentano i numeri in maniera geometrica, ed i prodotti vengono visti come rettangoli con le facce di due colori diversi, legando il cambiamento dei segni al cambiamento di colore che avviene tramite i ribaltamenti dei rettangoli sul piano cartesiano (Castelnuovo, 1979, I Numeri, pag.141);

Limite di una funzione

Anche il concetto di limite è spesso introdotto con la metafora di numero come punto che si avvicina ad una altro punto, ed anche il simbolo utilizzato riassume questa idea, si veda ad esempio (Dodero, Baroncini, Manfredi, 2005, pag.66; Lakoff, Núñez, 2000, pag.229);

Viene sfruttata l'analogia con il flusso di un fluido incomprimibile per la giustificazione delle formule di Ostrogradskij, in questo caso gli autori parlano esplicitamente di analogia: (Aleksandrov, Kolmogorov, Lavrent'ev, 1974);

La corrente elettrica viene vista come flusso di un fluido, in un caso si parla di *similitudine* (Amaldi, 2008, Vol.3, pag 155) in un altro caso di *analogia* (Ruffo, 2000, Vol.2, pag.G32);

Vengono comparati il moto di un satellite attorno al pianeta ed moto di un pianeta attorno al sole: (Ruffo, 2000, Vol.1, pag.D34);

Si parla del modello atomico di Rutherford schematizzandolo come sistema solare: (Ruffo, 2000, Vol.2, pag.G5);

Si parla esplicitamente di analogia fra campo gravitazionale e campo elettrico: (Ruffo, 2000, Vol.2, pag.G11);

Analogia fra potenziale elettrico e potenziale gravitazionale: (Bonura, 2002, pag. C1 34);

Si parla esplicitamente di analogia fra corrente elettrica, flusso di un fluido e flusso di calore e l'autore sfrutta tale analogia per semplificare la trattazione: (Bonura, 2002, pag. C2 71, 77, 84);

Vengono messi in relazione il moto circolare uniforme ed moto armonico di un punto: (Walker, 2002, pag.393);

Per la misura del tempo viene utilizzato il peso dell'acqua versata in un recipiente: (Marazzini, Bergamaschini, Mazzoni, 2008, pag. 108), utilizzata da Galileo per misurare il tempo nei suoi esperimenti sulla caduta dei corpi;

Gli autori scrivono che la curvatura spazio-temporale nella teoria della gravitazione di Einstein viene simulata dalla curvatura di una membrana elastica, che viene usata come immagine per spiegare l'idea di curvatura dello spazio-tempo: (Caforio, Ferilli, 2000,Vol 3, pag.F 62);

Si può osservare che alcune delle proprietà che oggi esprimiamo algebricamente (proprietà distributiva, quadrato di un binomio..) in Euclide venivano espresse geometricamente (Bagni, 1996, pag.70).

Nel paragrafo 5.2 riprenderemo un paio degli esempi precedenti e li interpreteremo alla luce di una definizione, che proporremo, per i concetti di metafora ed analogia.

Ritornando a quelle metafore, di base, che permettono di inquadrare una situazione od un problema (framing) è stato argomentato da Reddy (Reddy, 1978) che il tipo di metafora che adottiamo può influire in maniera decisiva sul tipo di inferenze e deduzioni che possiamo compiere relativamente ad un particolare dominio. Utilizzando metafore diverse possiamo "vedere" aspetti diversi di un problema ed arrivare a conclusioni diverse.

4. Le potenzialità didattiche della metafora e dell'analogia: alcuni studi sull'uso didattico dell'analogia

Diversi autori hanno evidenziato l'utilità delle analogie nell'insegnamento (English, 1997), Mason scrive: "*Quando viene elaborata una analogia tra concetti, si costruisce proprio una relazione potente, che comprende un insieme di relazioni associative tra gli aspetti dei concetti corrispondenti, e si manifesta apprendimento significativo* " (Mason, 1992, p.135). Gardner scrive: "*È certo che educatori e ricercatori capaci sono costantemente impegnati nella ricerca di analogie e metafore adatte e feconde..*" (Gardner, 1999, pag.211). Brousseau (Brousseau, 2008) si riferisce all'analogia come uno dei possibili mezzi a disposizione dell'insegnante. Speranza scrive: "*A mio avviso il ritrovare analogie è uno dei momenti essenziali del pensiero critico.: ritengo che sia utile lasciare che gli allievi si sbizzarriscano a inventare qualche analogia, anche se poi una più attenta critica potrà farne dimenticare molte fra quelle inventate.*" (Speranza, 1988; Sbaragli, 2008, pag.23). Anche Villani promuove l'uso di analogie nello studio della geometria, in particolare per evidenziare analogie e differenze nel passaggio da due a tre dimensioni (Villani, 2006).

Alcuni autori sostengono l'utilità di metafore ed analogie nell'insegnamento, considerandole come uno dei mezzi con il quale favorire il cambiamento concettuale (conceptual change) (Brown, Clement, 1989; Duit, 1991; Treagust, Duit, 2008; Bryce, MacMillan, 2005).

Altri studiosi sostengono l'importanza della metafora e dell'analogia nell'insegnamento delle scienze e della fisica, in particolare considerano i fondamenti metaforici della comprensione umana dei fenomeni naturali come punto di partenza per la successiva formalizzazione (Fuchs, 2010a, 2010b; Fuchs et al., 2012).

Alcuni studi dimostrano un comportamento differente nel caso che si spinga un alunno a ricordare una possibile sorgente di analogia piuttosto che a crearla, nel primo caso sembra che le somiglianze superficiali giochino un ruolo prevalente mentre nel secondo caso lo giocano le somiglianze strutturali (Blanchette, Dunbar, 2000). Inoltre si è potuto verificare che quando le caratteristiche superficiali sono coerenti con le caratteristiche strutturali gli alunni possono sfruttare analogie strutturali anche complesse, mentre se c'è conflitto, le analogie vengono fondate sulle caratteristiche superficiali (Ratterman, 1997).

Curtis e Reigeluth (Curtis, Reigeluth, 1984; Mason, 1992) hanno effettuato uno studio volto ad individuare in quali condizioni l'analogia diventa veramente produttiva per l'apprendimento e la comprensione. Questi studiosi hanno analizzato le analogie presenti in testi scientifici adottati in ogni ordine di scuola classificandole secondo i seguenti parametri:

la relazione analogica	- Strutturale - Funzionale - Strutturale-funzionale
la forma di presentazione	- Verbale - Grafico-Verbale
la condizione	- Concreta-Concreta - Astratta-Astratta - Concreta-Astratta
la posizione	- All'inizio - Nel mezzo - Alla fine
il livello di contributo portato	- Semplice - Arricchito - Esteso
l'orientamento espresso circa l'uso dell'analogia	- Spiegazione del contenuto di base - Identificazione della strategia - Spiegazione del contenuto di base e identificazione della strategia - Assenza di orientamento

Tabella 1

Da tale studio questi studiosi hanno tratto alcune indicazioni circa l'utilizzo dell'analogia:

- Le analogie risultano maggiormente utili per apprendere contenuti difficili e complessi;
- In genere le relazioni strutturali funzionano per i contenuti più facili e concreti, mentre quelle funzionali per i più difficili ed astratti;
- Una presentazione grafico-verbale è preferibile specialmente per gli allievi che incontrano maggiori difficoltà;
- Il contenuto di base da cui prende avvio un'analogia deve essere concreto e conosciuto;
- Il momento più opportuno per l'inserimento di un'analogia sembra essere all'inizio o durante un'unità di insegnamento;
- Introdurre un'analogia chiarendo anche dove essa non funziona nel nuovo campo concettuale significa accordare maggior potere esplicativo alla comparazione stessa;
- È necessario spiegare sempre il contenuto di partenza prima di introdurre quello nuovo, in modo che l'analogia sia compresa dall'allievo e possa venire impiegata come strategia cognitiva di apprendimento.

Questi stessi criteri sono stati adottati da Newton in un lavoro più recente (Newton, 2003) nel quale vengono analizzate le analogie che su trovano nei libri di testo nelle scuole elementari inglesi. In particolare l'autrice analizza con quale frequenza vengano utilizzate le analogie in tali testi, quali tipologie di analogie vengano utilizzate e come questi fattori siano correlati alle specifiche materie. Una delle conclusioni dell'autrice è che le potenzialità delle analogie non sembrano sufficientemente sfruttate nei testi delle elementari.

Stepich e Newby (Stepich, Newby, 1988; Mason, 1992, p.141) hanno individuato una doppia funzione dell'analogia nel processo di facilitazione dell'apprendimento:

- *Codifica* di nuove conoscenze;
- *Recupero* dalla memoria di informazioni già note.

Inoltre hanno proposto la distinzione in due tipologie di analogia:

- *Concettuale*: analogia che si riferisce ad un singolo concetto;
- *Comprensiva*: insieme di diverse analogie concettuali che vengono collegate in modo da costituirne una più estesa che può funzionare come modello, in modo da permettere l'inserimento coerente di nuove informazioni, le previsioni anche in situazioni diverse.

Questi studiosi propongono le seguenti indicazioni per il buon uso di una analogia nell'insegnamento:

- Stabilire cosa il soggetto conosce. Le analogie risultano maggiormente utili e produttive quando la nuova informazione da apprendere non viene subito compresa e quando esse fanno riferimento ad esperienze o conoscenze costituenti la base di conoscenza degli allievi;
- Stabilire quale è la natura dello specifico compito di apprendimento. Si rende necessaria una analisi di tali compiti perché compiti diversi possono richiedere analogie di tipo diverso;
- Identificare alcuni attributi della nuova conoscenza, particolarmente salienti per la sua comprensione;
- Recuperare qualcosa della precedente esperienza dell'allievo che possieda attributi simili, per poter fare un paragone in modo da aiutare il soggetto a collegare il nuovo con quanto già conosce;
- Descrivere in maniera chiara la similarità tra le due entità poste in analogia;
- Stabilire che tipo di forma deve assumere l'analogia. Essa può essere a carattere verbale, grafico o unire entrambi i caratteri. Il tipo combinato è potenzialmente più produttivo;
- Stabilire quando inserire l'analogia. Essa può essere presentata, a seconda dell'obiettivo specifico, prima o lungo lo svolgimento di un percorso didattico;
- Stabilire quanto tempo dedicare alla presentazione dell'analogia. Perché le analogie risultino davvero utili è necessario che gli allievi dispongano di tempo sufficiente per ascoltarle o leggerle e per effettuare la comparazione degli attributi.

Altri studiosi (Glynn, Britton, Semrud-Clikeman, Muth, 1989) individuano due ruoli diversi per l'uso didattico di analogie:

- Ruolo *esplicativo*, quando vengono presentati nuovi concetti e principi in termini familiari

- Ruolo *creativo*, quando si stimola la generazione di ipotesi, la soluzione di problemi, l'identificazione di nuovi problemi

Pongono l'attenzione al fatto che l'efficacia dell'uso di una analogia dipende anche dallo scopo con il quale viene impiegata, e propongono che, quando viene utilizzata con un ruolo esplicativo, dovrebbe basarsi sui seguenti criteri:

- Numero delle caratteristiche comparate;
- La similarità dei tratti comparati;
- La significatività concettuale dei tratti comparati.

Se l'analogia viene utilizzata con un ruolo creativo, allora tale uso dovrebbe basarsi sui seguenti criteri:

- Il numero dei prodotti;
- La novità dei prodotti;
- Il valore dei prodotti.

Questi studiosi considerano la comparazione analogica uno strumento efficace di istruzione in ogni area disciplinare ed hanno elaborato un modello per l'insegnamento di concetti attraverso l'uso di analogie. Tale modello si propone l'obiettivo di guidare l'insegnante e l'autore di testi didattici alla costruzione e valutazione di analogie. Prevede i seguenti punti:

- Introduzione del nuovo concetto;
- Recupero di un concetto analogo;
- Individuazione delle caratteristiche rilevanti del concetto familiare e di quello nuovo;
- Individuazione di corrispondenze fra le caratteristiche;
- Conclusioni sul concetto nuovo;
- Individuazione dei punti in cui l'analogia non è appropriata.

Alcuni studi si sono rivolti all'analisi delle metafore ed analogie generate dagli studenti. In (Wong, 1993) l'autore si chiede se ed in che misura l'uso di analogie auto-generate dagli studenti possa migliorare la loro comprensione di fenomeni scientifici. L'autore conclude che l'uso di analogie auto-generate dagli studenti può essere utile e dovrebbe essere maggiormente sfruttato dagli insegnanti, che possono guidare gli studenti nell'analisi e nello sviluppo delle loro analogie, in modo da poterle raffinare ed evitare che si trasformino in misconcezioni.

Bazzini ha condotto alcune ricerche con alunni delle scuole elementari volte a verificare l'efficacia dell'uso di analogie nella risoluzione di problemi nonché l'uso scorretto di analogie (Bazzini, 1994a, 1994b, 1995; Mason, 1992). Questa studiosa propone la distinzione fra diversi usi dell'analogia a seconda che:

- Siano interessati aspetti procedurali (analogie di procedure);
- Siano interessati aspetti relazionali (analogie di concetti);
- Sia utilizzata nella fase euristica di risoluzione di un problema;
- Sia utilizzata nella fase di riflessione.

Mette in evidenza alcune analogie che possono essere utilizzate dagli studenti in maniera intuitiva e non consapevole che possono essere l'origine di misconcezioni, parlando, in questo caso, di *analogie tacite*, seguendo l'idea di modello tacito di Fischbein (Fischbein, 1989).

L’autrice considera importante l’uso dell’analogia in didattica della matematica, dato che può effettivamente servire per capire nuovi concetti o affrontare nuove situazioni o problemi partendo da ciò che è già noto, ma tale uso deve essere seguito attentamente dall’insegnante per evitare che porti a fraintendimenti e misconcezioni.

Sbaragli (Sbaragli et al., 2008), in uno studio effettuato con un gruppo di insegnanti delle elementari, ha messo alla prova un percorso di geometria nel quale si propone l’analogia come mezzo per l’analisi e l’organizzazione concettuale di nuovi fatti geometrici. Anche questa ricercatrice mette in evidenza l’utilità dell’analogia come mezzo didattico che deve essere prima analizzato con gli insegnanti, in modo che ne possano cogliere le potenzialità e prevenire le possibili misconcezioni, prima di proporlo alle proprie classi.

Per concludere questa rassegna ci limitiamo a citare altri lavori che hanno affrontato il problema dell’uso didattico di metafore ed analogie, i risultati di alcuni di questi lavori verranno ripresi in altri capitoli: Williams e Wake studiano l’uso di metafore e modelli in studenti di college (Williams, Wake, 2007); Peled analizza l’uso del pensiero analogico in compiti studiati per la formazione di futuri insegnanti di matematica (Peled, 2007); Font, Bolite e Acevedo studiano le metafore usate da insegnanti durante la lezione (Font, Bolite, Acevedo, 2010); Robutti analizza i concetti della matematica embodied (secondo le idee di Lakoff e Núñez) ponendoli in relazione con altri aspetti relativi all’uso di artefatti e la manipolazione di segni (Robutti, 2006, 2003); Boero, Bazzini e Garuti studiano l’uso di metafore nella risoluzione di disequazioni da parte di studenti (Boero, Bazzini, Garuti, 2001).

5. Le nostre domande di ricerca

Prima di introdurre le domande e le ipotesi di ricerca, che verranno affrontate in dettaglio nei capitoli 4 e 5, ci occupiamo di alcune definizioni che utilizzeremo. Proponiamo una definizione di metafora ed analogia nella quale si tiene conto anche delle concezioni e delle idee relative a questi concetti e con il principale obiettivo di fornire uno strumento operativo, almeno per questa ricerca. Nel fare questo distingueremo chiaramente la metafora dall’ analogia evidenziandone il loro legame. Successivamente cerchiamo di mettere in relazione le definizioni proposte con altri concetti utilizzati nell’ambito della didattica della matematica e che ci sembrano collegati ai concetti di metafora ed analogia. Infine introduciamo le prime due domande di ricerca e le prime ipotesi di ricerca.

5.1 Alcune definizioni proposte per la ricerca

In ciò che segue si accetta la natura socio-culturale di qualunque conoscenza, anche di quella matematica e scientifica, e si cerca di inserire tale dimensione in maniera esplicita nelle definizioni che vengono proposte. L’inclusione piena degli aspetti socio-culturali nella costruzione del sapere scientifico e matematico è presente a partire da opere come quella di Bloor (Bloor, 1976), che si muove nell’ambito del programma forte della sociologia della conoscenza, ma anche in lavori più recenti nell’ambito della psicologia e della didattica della matematica. L’idea che l’attività matematica non possa prescindere anche da una dimensione sociale e psicologica è presente anche in alcuni matematici professionisti (Thurston, 1994) e nell’ambito specifico della didattica della matematica tali idee sono centrali in molti studiosi che parlano di saperi *situati* in un determinato contesto (Cobb, 1994; Cobb, Yackel, Wood, 1992; Rogoff, 1990; Walkerdine, 1982; Chevallard, 2006, 1999, 1992; Boero, Guala, 2008). Più recentemente in (Sfard, 2009) l'attività matematica viene inquadrata come un tipo particolare di interazione umana nella quale si possono distinguere *rituali*, che hanno al centro il rafforzamento delle relazioni interpersonali, gli *atti*, centrati sulle modifiche all'ambiente, le *esplorazioni* che hanno l'obiettivo di creare *narrazioni approvate*. D'Amore, Radford e Bagni (D'Amore, Radford, Bagni, 2006) scrivono: "*Ritengo che l'apprendimento matematico di un oggetto O da parte di un individuo I all'interno di una società S non sia altro che l'adesione di I alle pratiche che gli altri membri di S sviluppano attorno al dato oggetto O*".

Per *dominio di conoscenza* intendiamo: l'insieme delle situazioni reali o ideali (concettuali) definite da: oggetti o esseri viventi, azioni, concetti, relazioni ed operazioni congiuntamente ad una *comunità/società di individui* per la quale tali situazioni abbiano un significato condiviso.

Esempio: nella comunità dei matematici ha senso parlare di matrici e di operazioni con matrici ed il senso di tali concetti e relazioni è condiviso, quindi potremo parlare di dominio di conoscenza delle matrici in matematica (ci saranno ovviamente anche altri oggetti, operazioni, relazioni).

Diremo che una ***situazione*** (od un problema) ***appartiene ad un certo dominio di conoscenza*** *quando gli oggetti o esseri viventi, le azioni, i concetti, le relazioni e le operazioni che definiscono la situazione appartengono a tale dominio.*

Diremo che **due domini di conoscenza sono diversi** *se non c'è alcuna comunità di persone che riesca ad individuare almeno una situazione/problema che coinvolga oggetti o esseri viventi, azioni, concetti, relazioni, operazioni di entrambi i domini e solo di questi (quindi senza altri concetti che esulano dai domini di partenza) in maniera condivisa all'interno della stessa comunità.*

Un esempio di domini diversi nella matematica istituzionale possono essere il dominio della geometria euclidea nel piano e il dominio dell'algebra (nell'ambito di attività di insegnamento-apprendimento ci possono essere, tuttavia, situazioni nelle quali tali conoscenze, non ancora istituzionalizzate, possono sovrapporsi). La geometria analitica si potrà considerare come un domino ancora diverso nel quale i domini iniziali sono collegati dal fatto che i punti geometrici vengono rappresentati con coppie di numeri. Tale rappresentazione è un concetto che non fa parte dei singoli domini di partenza.

Diremo che **due domini di conoscenza sono coincidenti** *se esiste una comunità di persone per la quale tutte le situazioni/problemi che appartengono ad un dominio appartengono anche all'altro*

Per ***Analogia*** intendiamo l'individuazione di:

- due domini di conoscenza (che possono coincidere);
- degli elementi (almeno due) in ciascun dominio;
- delle relazioni (almeno una) fra alcuni degli elementi di ciascun dominio;

- una mappatura (iniettiva) fra alcuni degli elementi di un dominio (almeno due) e gli elementi dell'altro;
- una mappatura (iniettiva) fra alcune (almeno una) delle relazioni di un dominio e quelle dell'altro.

Per ***Metafora*** intendiamo: qualunque ***espressione comunicabile*** ad altri soggetti, in forma verbale, scritta, gestuale, grafico-pittorica bidimensionale o tridimensionale, di animazione (film o altre forme), *o qualunque oggetto* che permetta, in un *dato contesto* e con *dati obiettivi*, ad un soggetto di ***individuare o costruire*** *una analogia fra due domini di conoscenza diversi.*

Per ***Similitudine*** intendiamo: qualunque ***espressione comunicabile*** ad altri soggetti, in forma verbale, scritta, gestuale, grafico-pittorica bidimensionale o tridimensionale, di animazione (film o altre forme), *o qualunque oggetto* che permetta, in un *dato contesto* e con *dati obiettivi*, ad un soggetto di ***individuare o costruire*** *una analogia fra due domini di* ***conoscenza coincidenti****.*

Per ***produttività di una metafora o similitudine*** intendiamo la facilità con la quale la metafora/similitudine viene usata per produrre effettivamente delle analogie in un dato contesto e con dati obiettivi.

La dipendenza dal contesto e dai domini di conoscenza del ragionare e dell'apprendere è ampiamente riconosciuta anche dalla ricerca in didattica della matematica (Bazzini, 1995; Fishbein, 1985; Bell, Swan, Taylor, 1981), dunque possiamo aspettarci che la stessa metafora o similitudine possa avere effetti diversi a seconda del contesto nel quale è posta e dell'obiettivo che ha chi la usa.

Per ***estensione di una metafora o similitudine*** intendiamo: la quantità di elementi o relazioni fra due domini che possono essere messi in corrispondenza sfruttando direttamente le informazioni contenute (quindi senza sfruttare le ulteriori elaborazioni che vengono compiute tramite ragionamento analogico).

Esempio: la metafora "il sole è come il nucleo di idrogeno" è meno estesa della metafora "il sole è come il nucleo di idrogeno ed un suo pianeta è come l'elettrone "

Per ***coerenza interna di una metafora o similitudine*** intendiamo: la coerenza delle informazioni contenute al fine di individuare una corrispondenza chiara e non ambigua fra due domini.

Esempio: la metafora "*afferrare un concetto con gli occhi della mente*" non ha una perfetta coerenza interna, visto che una parte della metafora collega il domino della comprensione di concetti con il dominio della manipolazione di oggetti, mentre l'altra parte collega il dominio della comprensione di concetti con il dominio della visione di oggetti.

Giustifichiamo l'utilità di una tale definizione per questa ricerca, dato che una metafora potrebbe portare a più analogie, le cui implicazioni potrebbero essere di fra loro in contraddizione. Possiamo pensare alla contemporanea attivazione (che potrebbe avvenire tramite una metafora) di modelli intuitivi o formali fra loro in conflitto. Come esempio possiamo pensare a quello proposto da Fischbein relativo al concetto di infinito; le esperienze con gli studenti mostrano che il modello intuitivo di linea come formata da punti può interferire con il modello astratto di linea composta da punti senza dimensione, facendo entrare in conflitto alcune concezioni che sono vere per un modello ma false per l'altro. Così, secondo il modello intuitivo, l'insieme dei punti di una linea più lunga non è equipotente all'insieme di un'altra più corta, concezione che è in conflitto con i risultati cantoriani sull'equipotenza di tali insiemi (modello teorico). (Fischbein, 2001, 1998).

5.2 Osservazioni sulle definizioni proposte

Le definizioni proposte cercano di sintetizzare alcuni degli aspetti che sono stati analizzati precedentemente nella letteratura su metafora ed analogia, aggiungendo tuttavia alcuni elementi originali. Consideriamo la metafora come un mezzo per arrivare ad una analogia, per evocarla. La metafora può assumere forme molto diverse ma la consideriamo tale se può permettere la costruzione (aspetto creativo della metafora) o l'individuazione di una analogia. Tuttavia è l'analogia che ci permette di avere inferenze e quindi di costruire altre conoscenze all'interno dei due domini. Usando una metafora potremmo dire che *la metafora scopre mentre l'analogia colonizza*. Tuttavia gli aspetti creativi non sono propri solo della metafora, anche tramite analogia si possono costruire o individuare elementi (o relazioni) nuovi nei domini target e source.

Per chiarire il fatto di avere considerato anche una animazione o un film come metafore possiamo riferirci ad un famoso esperimento di psicologia sperimentale ideato da Heider e Simmel (Heider, Simmel, 1944; Bozzi, 1990, pag. 160). In questo esperimento viene presentato ad un gruppo di persone un filmato nel quale si vedono alcune figure geometriche che si muovono fuori e dentro un quadrato, nel quale si apre e chiude una apertura quando le figure si avvicinano, permettendo a queste di entrare od uscire dal quadrato. I tempi ed i movimenti delle figure sono tali da indurre praticamente tutte le persone ad interpretare il filmato come una interazione fra due persone (le due figure geometriche) che sfocia in un litigio e con l'uscita (fuga) dalla stanza (quadrato) di una delle due. Si tratta, secondo la nostra interpretazione, di una metafora, dato che è una associazione fra i segni del filmato, che non hanno direttamente a che fare con una situazione reale, ed una situazione della vita di tutti i giorni, secondo una analogia che associa le figure a persone, il quadrato ad una stanza, l'apertura ad una porta ed il tipo di movimento delle figure (particolari relazioni spaziali che variano nel tempo) a particolari interazioni fra le persone (relazioni emotive che variano nel tempo).

Vediamo più in dettaglio alcuni punti che, secondo noi, caratterizzano le definizioni proposte:

1. L'**aspetto creativo** contenuto nella ***metafora*** sta nel **collegamento fra domini diversi,** in accordo con alcune delle opinioni degli autori già citati (Vosniadou, Ortony, 1989). In particolare la distinzione vista fra (nel paragrafo 2.2 abbiamo dato alcuni esempi):

- *Between-domain analogies;*
- *Within-domain analogies;*

che secondo questi autori, come abbiamo già visto nel paragrafo 2.2, potrebbe corrispondere a **processi cognitivi sottostanti diversi.**

Risultando non banale definire meglio la “distanza” fra domini ma condividendo l’idea degli autori, ci si può fondare su una distinzione più semplice fra domini uguali o diversi. La metafora consente di collegare due domini diversi. Quindi accettiamo l’idea che un collegamento fra due sistemi di elementi appartenenti allo stesso dominio potrebbe non essere riconducibile a questo meccanismo cognitivo (anche se può generare una analogia).

2. Relativamente all’opinione che: “*L’analogia entra in scena quando diventiamo consapevoli della somiglianza fra due concetti che sono già stati creati; l’atto di creazione stesso è questione di metafora*” (Sfard, 1997), la definizione proposta accetta l’idea che la metafora giochi un ruolo nella creazione di un nuovo dominio, ma non la riduce solo a questo. Infatti nella definizione si specifica che la metafora può servire a *costruire* ma anche ad *individuare* un collegamento fra domini già esistenti. Il fatto che esistano domini diversi e con strutture analoghe non assicura che qualcuno ne individui effettivamente l’analogia, quindi l’atto di scoperta di tale collegamento è un atto creativo. Per questo proponiamo di considerare metafora anche una espressione che permetta di costruire una analogia fra tali domini. Ci sembra che questa definizione di metafora e di similitudine ne renda esplicita la loro natura non solo di semplici mediatori della comunicazione, ma di elementi in grado di aiutare a creare nuova conoscenza.

3. Nei lavori degli autori analizzati si trovano diverse caratterizzazioni di analogia da metafora, alcuni considerano la metafora come un particolare tipo di analogia, ad esempio:

“*La metafora può essere considerata una forma implicita di analogia mentre la similitudine è una forma esplicita”* (Presmeg, 1997; Leino, Drakenberg, 1993). Altri invece li considerano concetti che in certi casi possono coincidere ma non sempre (Gentner, 1989; Pimm, 1981).

Le definizioni sopra proposte indicano una ***distinzione netta fra metafora ed analogia*** :

- La *metafora* riguarderebbe principalmente **l’espressione** a partire dalla quale si può costruire una analogia. Ma <u>non solo questo</u> perché nella definizione si intende che tale espressione evochi una analogia, ovvero provochi un primo atto di collegamento fra due domini che è un atto cognitivo;

- *L’analogia* riguarderebbe l’**organizzazione concettuale** e le **inferenze** che si possono fare dopo avere individuato il collegamento fra due domini.

4. Un altro elemento nuovo che indica la definizione proposta è che la ***metafora*** possa assumere ***forme diverse***. Quindi non sarebbe solo una forma espressiva verbale orale o scritta.

5. Per quanto riguarda la definizione di analogia, quella proposta comprende il caso più semplice di analogia A:B::C:D, che è quello presente in Aristotele, ma consente di considerare come analogie anche sistemi di relazioni più complesse, come quelle proposte da alcuni autori (Mason, 1992; Sternberg, Downing, 1982).

Alla luce di queste definizioni possiamo riproporre alcuni degli esempi tratti dai testi scolastici che abbiamo visto nel paragrafo 3:

Esempio 1.

Se consideriamo l’esempio della rappresentazione di un sistema di due equazioni come rette nel piano cartesiano (Bergamini, Trifone, Barozzi, 2008, pag.829). In questo caso una frase come: “ *Possiamo associare ad una equazione lineare una retta del piano*” che introduca il metodo grafico, e quindi che venga presentata nel contesto della ricerca di un metodo per risolvere sistemi di equazioni, può essere considerata una metafora, dato che a partire da essa è possibile proseguire nella costruzione di una analogia fra il problema algebrico ed il problema geometrico. L’analogia in questo caso associa equazioni a rette e la soluzione al punto di intersezione.

Esempio 2.

Se consideriamo l’esempio della corrente elettrica che viene vista come flusso di un fluido, (Amaldi, 2008, Vol.3, pag 155; Ruffo, 2000, Vol.2, pag.G32), una frase come: “*Il moto degli elettroni in un conduttore è come un flusso di acqua*” potrà essere considerata una similitudine che può permettere di costruire una analogia nella quale si associa la corrente al flusso, le cariche alla massa del fluido, e quindi si possono sfruttare alcuni risultati noti per la fluidodinamica per avere indicazioni o formulare ipotesi anche per la corrente elettrica;

5.3 Relazioni con altri concetti in didattica della matematica (e non solo)

Il concetto di metafora, nel modo in cui lo abbiamo definito, è in relazione con altri concetti che hanno assunto un ruolo importante anche negli studi di didattica della matematica. In particolare ci proponiamo di chiarire in che modo si possa mettere in relazione con i concetti di *embodiment*, *rappresentazione*, *gestualità* e *modello*.

Metafora ed embodiment

Da diversi anni gli studiosi di diversi campi, hanno messo in rilievo l’importanza del corpo e della fisicità anche per gli aspetti cognitivi, introducendo il concetto di *embodiment*. Tale concetto ha assunto diversi significati (Núñez, Edwards, Matos, 1999; Wilson, 2002) in particolare, per quello che concerne l’ambito della didattica della matematica, sono emersi due significati distinguibili:

1- Gli umani utilizzano alcune strutture mentali originariamente evolutesi per la percezione o l’azione anche per svolgere operazioni di pensiero senza un controllo consapevole. In generale si suppone che queste reti senso-motorie servano a simulare aspetti del mondo reale esterno e servano a rappresentare conoscenze e ad ottenere inferenze (Gallese, Lakoff, 2005; Lakoff, Núñez, 2000). In alcuni studi di didattica della matematica si indende *embodiment* in questo senso, ad esempio in (Nemirowskj, Ferrara, 2009). Particolari fenomeni relativi alle reti neurali sono considerati come l’origine di alcune metafore. Ad esempio gli studiosi hanno individuato l’origine di alcune metafore nella *multimodalità* di alcune aree del cervello (Gallese, Lakoff, 2005), questo fenomeno consiste nell’uso delle stesse aree del cervello sia per la percezione che per l’azione. Un altro meccanismo consiste nell’associazione di aree senso-motorie del cervello con aree non senso-motorie, da tale fenomeno, secondo Lakoff e Núñez, derivano le cosiddette *metafore fondanti* della matematica (Lakoff, Núñez, 2000). Questi autori propongono anche il concetto di *fusione* come una delle possibili origini di alcune metafore: la contemporanea attivazione di diverse aree del cervello nel tempo porta alla creazione di connessioni che si manifesterebbero come metafore (Lakoff, Núñez, 2000). A partire da questa posizione, che dice di condividere, Tall (Tall, 2002) scrive che intende *embodiment* in un senso diverso da quello usato da Lakoff e Núñez, chiarendo che si riferisce a tale termine per indicare il pensiero matematico che viene costruito a partire dalla percezione sensoriale a differenza di quello costruito a partire da operazioni simboliche o deduzioni logiche.

2- Altri autori hanno posto l'attenzione non solo sulle conoscenze che sono *embodied* nel senso di Lakoff e Núñez, quindi radicate essenzialmente nel corpo, ma anche negli artefatti e nelle pratiche umane (Radford, Bardini, Sabena, Diallo, Simbagoye, 2005). In questo caso è stato proposto di parlare di *empracticed cognition* piuttosto che di *embodied cognition,* proprio per evidenziare l'importanza della cultura e delle pratiche sociali in questo fenomeno (Radford, 2003a). In alcune ricerche è stata posta la questione di una interazione fra questi due aspetti dell'embodiment (Bazzini, 2001; Arzarello, Robutti, 2009; Robutti, 2006). Alcune metafore, intese secondo la nostra definizione, possono avere questo tipo di origine.

L'uso della metafora nell'insegnamento è sempre un atto di comunicazione fra individui (nel tempo e nello spazio), quindi l'eventuale collegamento (embodied o meno) fra due domini di conoscenza che si manifesta nella mente di un individuo deve necessariamente 'materializzarsi' in una espressione (parole, gesti, disegni, ecc..) ricadendo nella nostra definizione.

Metafora e rappresentazione

La metafora e l'analogia, definite nel modo proposto, sono legate al concetto di *rappresentazione*. Questo concetto ha assunto un significato proprio abbastanza preciso sia in matematica che in didattica della matematica (D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, 2013). In generale una rappresentazione è "*qualcosa che sta per qualcos'altro*" (Goldin, 2008) o tramite un preciso sistema di segni, in tal caso si parla di *rappresentazione semiotica*, oppure senza tale sistema (immagini, rappresentazioni mentali…), in tal caso si parla di *rappresentazione non semiotica* (Duval, 2006).

Più in generale D'Amore e Godino propongono di parlare di *funzione semiotica fra oggetti matematici*, considerando, oltre ai diversi registri del linguaggio, anche azioni, situazioni, concetti, argomentazioni, quando fra essi si instaura una dipendenza di tipo rappresentazionale o strumentale ed uno di essi può essere usato al posto dell'altro (D'Amore, Godino, 2006).

In matematica, nelle scienze e nel loro insegnamento la rappresentazione ha la funzione di utilizzare un dominio (rappresentante) al posto di un altro con diversi possibili obiettivi (argomentare, dimostrare, calcolare, spiegare, dare significato..). In particolare nell'attività di insegnamento-apprendimento della matematica gioca un ruolo centrale la rappresentazione nel processo di *conversione fra registri semiotici* diversi (Duval, 2002; Duval, 2006). L'importanza di usare opportune rappresentazioni per giungere ad apprendimenti efficaci dei concetti e delle idee matematiche è stata messa in evidenza da diversi studiosi (Davis, Maher, 1997).

Che relazione possiamo individuare fra metafora ed analogia, date le definizioni proposte, e rappresentazione?

Avanziamo l'ipotesi che, nell'ambito della didattica della matematica, una condizione necessaria affinché un dominio possa rappresentarne un altro sia l'esistenza di una analogia fra i due domini, e che tale analogia sia sfruttata produttivamente nell'uso della rappresentazione. In questo modo una metafora può servire a individuare o costruire una analogia (secondo la nostra definizione) che può essere sfruttata nell'uso di un dominio per rappresentarne un altro.

Metafora e gestualità

Gli umani generalmente gesticolano quando parlano, con differenze che dipendono dalla cultura di appartenenza, ma il fenomeno è universale (Iverson, Thelen, 1999; Núñez, Sweetser, 2006). Ci sono studi al riguardo che si sono occupati della funzione che la gestualità può avere nell'interazione umana e nel pensiero umano: oltre alle funzioni deittica e iconica, i gesti possono avere significati precisi che sono culturalmente definiti e trasmessi, possono portare informazioni aggiuntive rispetto alla parola e possono essere complementari ad essa o servire a specificarne il senso (Kendon, 2000). Alcuni studi indicano che la gestualità non ha soltanto una funzione comunicativa, ad esempio i gesti vengono prodotti anche quando si sa che l'interlocutore è cieco (Iverson, Goldin-Meadow, 1998), oppure possono precedere e favorire l'individuazione di parole da pronunciare in un discorso (Krauss, 1998). I gesti possono accompagnare il pensiero metaforico astratto ed essere utilizzati metaforicamente (Cienki, 1998; Núñez, Sweetser, 2006; McNeill, 1992). Da diversi anni anche gli studiosi di didattica della matematica hanno iniziato ad occuparsi della gestualità e del suo ruolo nell'ambito dell'insegnamento-apprendimento della matematica (Radford, 2003; Radford et al., 2005; Radford et al., 2008; Núñez, 2004; Arzarello, Robutti, 2001).

La definizione che abbiamo proposto per metafora ed analogia è coerente con queste idee, dal momento che per noi anche un gesto può essere una metafora se permette la creazione di una analogia fra due domini di conoscenza. Nel capitolo 6 analizziamo un caso in cui la produzione di gesti di uno studente può, secondo noi, essere interpretata come metafora.

Potremmo ipotizzare due differenti funzionamenti di un gesto come metafora:

- Gesto come *metafora per gli altri*, ai fini di comunicazione o spiegazione o altro. In questo caso il gesto compiuto da un individuo può servire, a chi lo vede ed interpreta, a collegare due domini di conoscenza;

- Gesto come *metafora per se stessi*: così come un gesto può servire a recuperare parole (e quindi concetti) potrebbe servire anche a creare collegamenti fra domini nella mente di chi compie il gesto.

Metafora e modello

Ci sono diversi modi di intendere il concetto di modello, e ci sembra opportuno raggrupparli in due tipologie:

- modello come *strumento scientifico* di descrizione, spiegazione o previsione per una particolare situazione reale, (in fisica o in altre scienze, in economia, nelle scienze sociali..) (Hesse, 1966; Black, 1962);

- modello come *modello mentale* (Johnson-Laird, 1983) in psicologia cognitiva, o *modello intuitivo* (Fischbein, 1989) in didattica della matematica.

Nel primo caso, ovvero modelli intesi come strumenti scientifici, Hesse distingue diversi tipi di modelli:

- *modello logico*: interpretazione semantica di un sistema di assiomi. Vi è isomorfismo fra modello e teoria;

- modello *matematico*: rappresentazione aritmetica di una teoria empirica. Vi è isomorfismo fra strutture (la struttura della teoria empirica e la struttura matematica);

- *modello analogico*: rappresentazione fisica tridimensionale di un oggetto o di un sistema. Vi è isomorfismo fra le leggi che governano il funzionamento di tali sistemi. Esempi: circuiti elettrici usati come modelli di altri sistemi, i grafici, modelli in scala;

- *modello teorico*: sistema di assunzioni su di un oggetto o sistema che lo descrive attribuendogli una struttura interna per cui molte delle sue proprietà vengono spiegate riferendosi a questa struttura interna. Esempi: modello atomico di Bohr, modello della teoria cinetica dei gas come composte da piccole sferette che si urtano come palle da biliardo. Tale modello viene in genere identificato con la teoria ed è accettato da quanti concepiscono le teorie in termini realisti;

- *modello immaginario*: è un insieme di assunzioni si di un oggetto (o sistema) che ci mostra no come potrebbe essere se soddisfacesse certe condizioni, che di fatto non soddisfa. Il modello è qui inteso nella sua accezione di "come se", in genere adottata da quanti assumono che le teorie abbiano una funzione puramente strumentale. In questo caso il modello non può mai essere identificato con la teoria.

Per Johnson-Laird un modello mentale è una sorta di "*copia mentale interna che possiede la 'stessa struttura di rapporti' del fenomeno che rappresenta.*" (Johnson-Laird, 1983, p.49). Questo autore fa una distinzione fra modelli mentali, rappresentazioni proposizionali ed immagini. Le immagini vengono considerate particolari tipi di modelli mentali, mentre la rappresentazione proposizionale è una "*rappresentazione mentale di una proposizione che può essere espressa verbalmente*". La rappresentazione proposizionale implica una consapevolezza da parte di chi la possiede che non è necessariamente presente nel caso dei modelli mentali (Johnson-Laird, 1983, p. 237, 249, 250). Nel caso dei modelli intuitivi ci si riferisce, sostanzialmente ad un modello mentale con caratteristiche che lo rendono intuitivo, ovvero, secondo Fischbein, è autoevidente per chi lo usa e viene usato con totale fiducia (Fischbein, 1987, 1989).

Ci sembra che la metafora, nel modo in cui è stata definita, si possa legare a tutte queste idee di modello. Black, a questo proposito, scrive: "*Sono ora impressionato. Così come lo fui sufficientemente quando scrissi Metafora, dalla stretta connessione tra il concetto di modello e quello di metafora. Ogni 'complesso di implicazioni' sostenuto dal soggetto secondario di una metafora è, penso ora, un modello di attribuzioni ascritte al soggetto primario: ogni metafora è la* *punta di un modello sommerso.*" (Black, 1962, p.117). Anche Miller mette in evidenza tale legame: " *C'è una chiara relazione fra metafore e modelli. Un modello è una approssimazione ad una teoria. Le proprietà comparative della metafora mettono a fuoco più precisamente questa distinzione.*" (Miller, 2000, p.219).

Nel caso di modello in scala è forse più opportuno parlare di similitudine, in ogni caso è chiaro che un modello in scala può rimandare, in particolari contesti, ad un modello reale con un collegamento analogico. Stessa cosa vale per i modelli analogici, nei quali può essere meno evidente il collegamento con altre situazioni da modellizzare, ma alcune metafore possono, appunto, permettere sia la costruzione che l'utilizzo di tali modelli. Ad esempio la metafora "*la corrente elettrica è come un flusso di acqua*" può portare alla costruzione di una analogia più completa e quindi di un modello matematico dei fenomeni elettrici a partire dal modello matematico noto per i fenomeni della fluidodinamica. Per quello che riguarda gli altri modelli che distingue Hesse, ci pare che anche essi possano essere collegati a situazioni reali, o ad altri modelli , tramite collegamenti che, a nostro modo di intendere, possono essere metafore. La metafora, dalla nostra definizione, deve consentire l'individuazione di una analogia che può anche essere un isomorfismo fra due strutture. Dunque, nel caso modelli analogici ciò che può spingere a creare o comprendere tali modelli è una analogia, che poi si può rivelare un isomorfismo (ovvero tutte le possibili inferenze analogiche sono verificate). Il legame fra analogie e modelli è sostenuto anche da Fischbein (Fischbein, 1987). Nel caso di modelli teorici ed immaginari questi possono scaturire da una iniziale metafora che porta poi ad analogie che si possono rivelare isomorfismi. Quindi possiamo sintetizzare un possibile percorso di questo tipo per la creazione di un modello:

metafora → analogia → modello;

Per quanto riguarda il collegamento fra modelli mentali e metafore, Fischbein scrive: "*In molti casi, l'uso del termine 'modelli mentali' invece di 'metafore' è più appropriato..Se uno studente usa un diagramma ad albero per risolvere un problema combinatorio, il diagramma è una metafora od una analogia del problema? Mi sembra che sia un modello mentale ma non una analogia o una metafora. Analogie, paradigmi, metafore, diagrammi, ecc., sono tutti modelli mentali.*" (Fischbein, 2001, p.312).

Noi ipotizziamo che le metafore, intese secondo la nostra definizione, che permettono il collegamento fra i due diversi domini di una situazione reale e di un modello mentale, permettono anche di individuare una analogia fra tali domini. Intendiamo con questo ipotizzare che il modello mentale sia in qualche modo esplicitabile, nel senso di esprimibile tramite il linguaggio, anche se tale modello è implicito o tacito.

5.4 Le domande di ricerca del nostro studio

Da quanto abbiamo detto dovrebbe risultare chiaro che proponiamo una funzione della metafora come segno, espressione o altro, che funzioni, in certe condizioni, come una sorta di *innesco* per la creazione o individuazione di una analogia. Secondo noi i due momenti *innesco dell'analogia* (metafora) e successivo *sviluppo dell'analogia* sono diversi. Se molti degli studi di ricerca in ambito educativo si sono concentrati sulla fase di sviluppo dell'analogia, noi crediamo che sia importante anche analizzare la fase iniziale, l'uso della metafora, perché siamo convinti che già da questa possano nascere le caratteristiche, sia potenzialmente utili che potenzialmente pericolose, delle analogie ad essa associate.

Nelle domande di ricerca che ci siamo posti cerchiamo di chiarire alcuni aspetti specifici delle metafore che possono essere utilizzate in due particolari ambiti:

- risoluzione di *word problems;*
- uso di *macchine matematiche* in attività di laboratorio di matematica.

Nelle sperimentazioni ci occupiamo sia di metafore incorporate in artefatti matematici (problemi e macchine), sia di metafore prodotte spontaneamente dagli studenti durante le attività proposte nelle sperimentazioni.

Le prime due domande generali di ricerca, che ci hanno guidato nella strutturazione di questo lavoro (parte teorica e parte sperimentale) e nella definizione di alcune ipotesi specifiche di ricerca, sono:

4. Da quali elementi dipende la produttività ai fini didattici di una metafora?

5. Quali possono essere le conseguenze in termini di misconcezioni ed ostacoli che le analogie associate alle metafore possono generare ?

A queste due domande ne aggiungeremo una terza alla fine del terzo capitolo. La seconda domanda non ha inciso direttamente sulle ipotesi di ricerca specifiche, ma viene sviluppata in modo più approfondito nel secondo capitolo dove chiariamo i concetti di misconcezione ed ostacolo in didattica e dove analizziamo alcuni casi tratti da testi matematici. L'analisi di ostacoli e misconcezioni prosegue nel sesto capitolo dove prendiamo in considerazione alcuni episodi delle due sperimentazioni (descritte nei capitoli 4 e 5) che cerchiamo di interpretare come uso delle metafore ed analogie che si comportano come ostacoli o che portano a misconcezioni. La prima delle due domande precedenti ha invece influito sulla definizione delle domande di ricerca che abbiamo cercato di studiare con le sperimentazioni. In un suo lavoro, Bazzini si è posta la questione dell'origine delle metafore che possono essere generate dagli studenti, chiedendosi: "*..possiamo considerare tali metafore come spontanee o possiamo individuare la loro origine nelle attività in classe?*" (Bazzini, 2001, p. 265). Anche per noi questa domanda è interessante e, coerentemente con il quadro teorico nel quale ci muoviamo, abbiamo cercato di distinguere e di indagare la dipendenza della produttività della metafore da diversi fattori. Nella prima sperimentazione indaghiamo, nel caso di testi matematici, la dipendenza della produttività metaforica da:

- *interazione con l'insegnante;*

- *natura implicita/esplicita della metafora;*

- *natura impersonale/dialogata del testo.*

In Tabella 2 compaiono le prime ipotesi di ricerca (trattate nel capitolo 4).

Prime ipotesi di ricerca
I1: Nel caso di testi con metafora esplicita l'uso della stessa per costruire una analogia non dipende dalla forma impersonale o dialogata del testo;
I2: Nel caso di testo con metafora implicita c'è dipendenza dalla forma del testo e mi aspetto che nel testo dialogato ci sia maggiore facilità ad utilizzare la metafora;
I3: Nel caso di testo con metafora implicita c'è una forte dipendenza dall'intervento dell'insegnante/sperimentatore indipendentemente dal testo;
I4: Nel caso di testo con metafora esplicita una c'è una dipendenza minore, rispetto al caso precedente, dall'insegnante/sperimentatore per l'interpretazione della metafora.

Tabella 2

In seguito alla discussione dei risultati ottenuti (capitolo 4) tali ipotesi sono state riformulate per la seconda sperimentazione. In Tabella 3 compaiono tali nuove ipotesi di ricerca (trattate nel capitolo 5).

Ipotesi di ricerca riformulate
I2.1: è possibile distinguere due tipi di metafore (intuitiva/incorporata o formale/culturale) con caratteristiche distinguibili (la prima spontanea e non consapevole la seconda non spontanea e che richiede consapevolezza);
I2.2: se la metafora è di tipo incorporato-intuitivo allora la sua produttività non dipende dall'essere esplicita o implicita nel testo;
I2.3: se la metafora è di tipo culturale-formale allora la sua produttività dipende dall'essere esplicita o implicita nel testo e la produttività è maggiore nel caso di metafore esplicite.

Tabella 3

I termini usati nella formulazione delle ipotesi di ricerca ed il loro significato vengono chiariti nei capitoli 4 e 5.

Capitolo 2

In questo capitolo approfondiamo i concetti di misconcezione e di ostacolo, sia in Didattica della Matematica che delle Scienze. Questi concetti vengono utilizzati per indicare, in generale, concezioni errate o difficili da superare, in modi differenti e con concettualizzazioni, idee differenti, dipendendo anche dalla disciplina di studio. Nella prima parte del capitolo diamo una panoramica delle principali ricerche ed idee che sono state sviluppate in questo ambito.
I concetti di misconcezione ed ostacolo si collegano all'uso di analogie e metafore in almeno due modi, e nella seconda parte del capitolo mettiamo in luce come, da un lato metafore ed analogie possono portare a misconcezioni ed ostacoli, e d'altro lato è stato proposto l'uso di particolari analogie proprio per contribuire a superare misconcezioni ed ostacoli.
Nella parte conclusiva mettiamo in luce alcuni problemi che sorgono dalle diverse concezioni di misconcezione ed ostacolo e facciamo alcune proposte che adottiamo nel corso di questa ricerca.

1. Concetti di ostacolo e di misconcezione in Didattica della Matematica e delle Scienze

In Didattica della Matematica si sono affermati alcuni concetti che vengono utilizzati per distinguere le cause di errore o difficoltà di apprendimento che si possono riscontrare nell'attività di insegnamento/apprendimento della matematica. Non è infatti evidentemente sufficiente limitarsi a definire errore qualcosa di sbagliato presente durante l'attività di insegnamento/apprendimento della matematica (o di altre discipline) ma, se si vuole fare luce sulle cause, diventa necessario ricercare l'origine di tale errore e questo porta alla creazione di nuovi concetti. Gli errori che consideriamo sono quelli dovuti a concezioni degli alunni che influiscono in maniera stabile sui loro comportamenti (quindi non errori casuali o dovuti a cause momentanee). In Didattica della Matematica (e delle Scienze) si parla quindi di ostacoli e di misconcezioni.

1.1 L'idea di ostacolo epistemologico di Bachelard

Il concetto di ostacolo che viene usato in Didattica della Matematica ha la sua origine nel concetto di *ostacolo epistemologico* in filosofia della scienza introdotto dal filosofo Bachelard (Bachelard, 1938). Tale ostacolo è in generale una concezione che si è rivelata utile in una serie di ambiti scientifici ma che in un nuovo ambito, di fronte a nuovi problemi, impedisce un ulteriore sviluppo. In "*La formazione dello spirito scientifico* " inizia con le seguenti parole: "*Quando si cercano le condizioni psicologiche dei progressi della scienza, ci si convince ben presto che è in termini di ostacoli che bisogna porre il problema della conoscenza scientifica. E non si tratta di considerare ostacoli esterni, come la complessità e la fugacità dei fenomeni, oppure d'incolpare la debolezza dei sensi e dello spirito umano, perché è all'interno dell'atto stesso del conoscere che,per una specie di necessità funzionale, appaiono lentezze e confusioni. E' qui che mostreremo alcune cause di stagnazione e persino di regresso della scienza; qui ne riveleremo le cause di inerzia; e tutte queste cause le chiameremo ostacoli epistemologici* ." (p.11), successivamente chiarisce che: "*Un ostacolo epistemologico si incrosta sulla conoscenza inindagata. Abitudini mentali che furono utili e salutari possono alla lunga intralciare la ricerca* " (p.12). Per quanto riguarda la matematica, Bachelard afferma che il tipo di evoluzione che essa ha subito è diversa rispetto a quella delle scienze ed il tipo di analisi critica che viene proposto nella sua opera non va applicata alla matematica, questo non significa, tuttavia, che la matematica sia esente da ostacoli, infatti

Bachelard scrive: "*Dopo aver trattato degli ostacoli che la conoscenza empirica deve superare, nel penultimo capitolo giungeremo a mostrare le difficoltà dell'informazione geometrica e matematica, nonché le difficoltà di fondare una fisica matematica in grado di provocare scoperte. Anche in questo caso accumuleremo degli esempi tratti da sistemi impacciati e da infelici geometrie. Si vedrà come il falso rigore blocchi il pensiero e come un sistema matematico primitivo impedisca talvolta la comprensione di un sistema nuovo..D'altro canto, per completare il nostro compito in questa direzione, dovremmo studiare dallo stesso punto di vista critico la formazione dello spirito matematico; ma abbiamo riservato tale impegno per un'altra opera. Questa divisione, tuttavia, è secondo noi possibile perché la crescita dello spirito matematico è molto diversa dallo spirito scientifico nel suo sforzo di comprendere i fenomeni fisici. La storia della matematica è infatti una meraviglia di regolarità. Essa conosce periodi di stasi; essa non conosce periodi di errore. Nessuna delle tesi che sosteniamo in questo libro si rivolge quindi alla conoscenza matematica. Esse non trattano che della conoscenza del mondo oggettivo.*"(Bachelard, 1938, p.21).

1.2 Tipologie di ostacoli in Didattica della Matematica e modi per rivelarli

L'idea di ostacolo epistemologico proposta da Bachelard è stata poi sfruttata e sviluppata da Brousseau (Brousseau, 1989), per la definizione di ostacoli di tipo epistemologico, didattico, ontogenetico nell'ambito della didattica della matematica (Ferreri, Spagnolo 1994; Spagnolo, 2009; D'Amore, 1999).

Gli *ostacoli di origine ontogenetica* sono quelli dipendenti dallo sviluppo del soggetto con le limitazioni che dipendono sia dall'età che dalle caratteristiche del soggetto stesso. Gli ostacoli di questo tipo sono legati alla maturazione psichica individuale.

Gli *ostacoli di origine didattica* sono quelli che dipendono da scelte didattiche (del sistema educativo, della scuola, dell'insegnante). Consideriamo alcuni esempi di tali ostacoli:

- Le attività di misura di segmenti che possono poi diventare ostacolo per la comprensione dell'infinito e del concetto di equipotenza fra insiemi (Fischbein 2001; D'Amore, 1999) ;

- Se la rappresentazione dei numeri con la parte decimale viene proposta troppo presto, quando ancora non è stata compresa la rappresentazione degli interi, ci possono essere problemi, per cui gli alunni possono dire che 2,25 è maggiore di 2,5 perché interpretano le parti a destra della virgola (25 e 5) come interi. In questo caso la conoscenza sugli interi può essere un ostacolo alla comprensione dei decimali (D'Amore, 1999);

- Se i bambini imparano velocemente a contare in maniera sequenziale, questa conoscenza/capacità può fare da ostacolo al riconoscimento di proprietà individuabili contando gli oggetti non sequenzialmente ma a blocchi (Bartolini Bussi, comunicazione personale).

Gli *ostacoli di origine epistemologica* sono quelli che dipendono dalla struttura stessa della conoscenza e si possono riscontrare anche nello suo sviluppo storico. "*Quando nella storia dell'evoluzione di un concetto si individua una non continuità, una frattura, cambi radicali di concezione, allora si suppone che quel concetto abbia al suo interno ostacoli di carattere epistemologico sia ad essere concepito, sia ad essere accettato dalla comunità dei matematici, sia ad essere appreso*" (D'Amore, 1999, p.213). La ricerca ha mostrato diversi casi di ostacolo epistemologico, fra i quali: il concetto di limite, il concetto di infinito in matematica, il postulato di Eudosso-Archimede, il concetto di zero. La collocazione di quest'ultimo concetto fra gli ostacoli epistemologici non trova l'accordo di tutti i ricercatori in questo campo, infatti alcune recenti ricerche pare mostrino come lo si possa considerare un ostacolo didattico (D'Amore, 2007; Di Leonardo, Marino, Spagnolo, 1999).

Si considera generalmente il concetto di infinito come rivelatore di ostacoli rappresentati dalle conoscenze che sono disponibili e che si devono adattare a nuove situazioni. Per esempio l'idea che un sottoinsieme di A possa avere la stessa potenza dell'insieme A che è in contrasto con quanto accade con gli insiemi finiti.

Ferreri e Spagnolo (Ferreri, Spagnolo, 1994) descrivono le seguenti caratteristiche di un ostacolo:

- *E' una conoscenza applicabile a molte situazioni;*
- *E' una sorgente di errori;*
- *L'alunno difende il suo errore;*
- *Resiste al rigetto dell'errore presso gli alunni;*
- *Persistenza.*

Comune a tutti i tipi è il fatto che "*Gli ostacoli non sono delle conoscenze mal fatte ma piuttosto delle conoscenze fatte altrimenti per altri scopi e adattate ad altri problemi.*" (Spagnolo, 2009, p. 18). Quindi gli errori che sorgono sono errori dovuti all'applicazione della conoscenza ad un ambito nel quale tale conoscenza non è più applicabile.

1.3 La misconcezione in Didattica della Matematica

Con il termine *misconcezione* in Didattica della Matematica si intende "..*un concetto errato e dunque costituisce genericamente un evento da evitare; essa però non va vista sempre come una situazione del tutto o certamente negativa: non è escluso che per poter raggiungere la costruzione di un concetto, si renda necessario passare attraverso una misconcezione momentanea, ma in corso di sistemazione*." (D'Amore, 1999, pag 124).

Ad esempio se l'insegnante, spiegando cosa è un triangolo propone sempre esempi nei quali un lato è orizzontale, questo potrebbe contribuire all'idea (misconcezione) che i triangoli hanno sempre un lato orizzontale e quindi, se non hanno questa caratteristica non sono triangoli.

Quindi con misconcezione si intende un concetto che è stato costruito male nella mente, per diverse ragioni che risiedono principalmente nella comunicazione del concetto (le parole scelte per comunicarlo, gli esempi utilizzati, il contesto) ma anche da precedenti esperienze.

A differenza degli ostacoli le misconcezioni non si rivelano utili in certi ambiti ma possono essere inevitabili nel processo di costruzione di un concetto. In questo senso di possono distinguere le *misconcezioni evitabili* dalle *misconzezioni inevitabili* (Sbaragli, 2005).

Le prime sono "*quelle che dipendono dalle scelte che l'insegnante compie per effettuare la trasposizione didattica e che possono condizionare negativamente la formazione degli allievi*", mentre le seconde sono "*quelle che non dipendono direttamente dalla trasposizione didattica effettuata dal docente*" (Sbaragli, 2006).

L'inevitabilità di alcune misconcezioni può dipendere dal fatto che per accedere al significato di un concetto matematico è necessario utilizzare delle *rappresentazioni* di tale concetto e tali rappresentazioni (azioni, gesti, oggetti, strumenti, simboli, figure..) portano con sé anche altri significati che possono contribuire a distorcere il significato che si vuole trasmettere.

Un esempio (Sbaragli, 2006) può essere l'idea che si può fare un bambino la prima volta che gli viene presentato un solido, per esempio un cubo. Le caratteristiche fisiche di tale oggetto (colore, materiale) potrebbero influenzare la prima idea che il bambino si fa di un cubo, includendo informazioni indesiderate. Un'altra sorgente di inevitabilità di alcune misconcezioni risiede nella gradualità del sapere, ovvero nel fatto che per poter arrivare a comprendere alcuni concetti o teorie può essere necessario porre delle tappe intermedie nelle quali i concetti non sono ancora formati nel modo da noi desiderato.

Anche Fischbein ha evidenziato in diversi studi la presenza di alcune conoscenze intuitive negli studenti che possono portare a "*misconcezioni, errori sistematici od ostacoli epistemologici.*",e continua scrivendo che "*Una misconcezione molto diffusa è che 'la moltiplicazione rende maggiore'* e '*la divisione rende minore'* " (Fischbein, 1994, p.234). Tali concezioni funzionano finché si lavora con gli interi, ma falliscono quando si passa ai reali (Fischbein, 1989, 1994). Abbiamo qua utilizzato il termine *misconcezione* perché è quello usato dagli autori, ma nel paragrafo 3.3, mostreremo come, secondo noi, in questo caso la conoscenza intuitiva ha caratteristiche tali da essere meglio considerata una *conoscenza-ostacolo* (paragrafo 3.3). Vediamo più in dettaglio alcuni esempi:

- Relativamente al concetto di insieme, Linchevski e Vinner (Linchevski e Vinner, 1988) hanno trovato le seguenti misconcezioni (così definite dagli autori) da parte di insegnanti di scuole elementari:

    - Gli elementi di un insieme devono possedere caratteristiche comuni;

- Un insieme deve possedere più di un elemento;
- Elementi uguali ripetuti sono considerati come elementi distinti;
- L’elemento di un insieme non può appartenere ad un altro insieme;
- Due insiemi sono uguali se contengono lo stesso numero di elementi.

Secondo Fischbein tali misconcezioni possono essere spiegate se si ammette che i bambini utilizzino, in maniera anche implicita, un concetto di insieme come collezione di oggetti fisici, con tutto ciò che questo comporta;

- Relativamente al significato del segno “=” diversi studiosi hanno individuato alcune misconcezioni: ad esempio Ginsburg (Ginsburg, 1977) ha trovato che tale simbolo viene interpretato dai bambini come modo per esprimere il risultato di una operazione che si legge da sinistra a destra (2+3=5), quindi possono non dare significato ad espressioni come 5=2+3, oppure 3+3=4+2. Anche Booth ha fatto osservazioni analoghe (Booth, 1988).
  Secondo Fischbein queste misconcezioni possono essere spiegate se si ammette che il modello di uguaglianza che i bambini usano in questi casi sia un modello non relazionale (con la proprietà simmetrica) ma un modello input-output che non è simmetrico;

- Relativamente alla sottrazione, sono state messe in luce alcune misconcezioni da parte dei bambini (Resnick, 1983a, 1982; Maurer, 1987).
  Fischbein propone di spiegare alcune di queste misconcezioni ipotizzando che sia attivo un modello di sottrazione che si basa sull’idea di togliere oggetti da un contenitore, quindi sulle prime esperienze concrete di sottrazione. La presenza di tale modello potrebbe spiegare perché gli studenti compiano errori, in maniera sistematica e diffusa, del tipo:

$$\begin{array}{r} 326 \\ \underline{-117} \\ \\ 211 \end{array}$$

  dove l’operazione viene compiuta scegliendo sempre il numero maggiore come minuendo ed il minore come sottraendo, in maniera inconsistente con quanto richiesto dall’operazione. (Fischbein, 1994, p.235);

- Anche per quanto riguarda la moltiplicazione, sono emerse diverse misconcezioni da parte di studenti anche di scuole superiori o universitari (Fischbein et al, 1985; Harel, Post, Behr, 1988; Tirosh, Graeber, Glover, 1986; Verschaeffel, De Corte, Van Coilie, 1988).
  Secondo Fischbein alcune di queste misconcezioni possono spiegarsi ammettendo l’uso di un modello tacito della moltiplicazione come somma ripetuta (Fischbein et al., 1985);

- Per quanto riguarda il concetto di limite e la sua definizione rigorosa sono state messe in luce difficoltà, anche da parte di studenti dotati in matematica, di comprendere la definizione formale (Vinner, 1991). Tali difficoltà possono essere interpretate anche in questo caso come derivanti dall’azione di un modello intuitivo in conflitto con quello formale (Fischbein, 1994);

- Anche nell’ambito del concetto di infinito sono state rilevate misconcezioni che possono derivare dalla contemporanea presenza di un modello intuitivo (tacito) ed un modello formale che non sono coerenti (Fischbein, 2001; Tirosh, 1991). Ad esempio nel confrontare il numero di punti di segmenti di diversa lunghezza, mentre il modello formale porta a concludere che la cardinalità dei due insiemi è la stessa, il modello intuitivo, che secondo Fischbein è quello che rappresenta i punti astratti come punti fisici dotati di dimensione, porta a concludere che il numero di punti del segmento più lungo è maggiore.

Fischbein descrive le caratteristiche di questi modelli impliciti (taciti) (Fischbein, 1989):

- Insiemi di diverse misconcezioni in un certo ambito specifico sembrano poter derivare da un unico modello che le riesce a giustificare;
- I modelli sono di natura concreta e pratica;
- Sono semplici;
- Pongono diversi vincoli;
- Sono entità autonome, nel senso che hanno proprie regole indipendenti da vincoli esterni;
- Sono robusti, nel senso che agiscono anche quando non corrispondono più alle conoscenze formali acquisite dall'individuo.

Notiamo che tale comportamento è molto simile a quello che è stato descritto per gli ostacoli. In effetti lo stesso Fischbein parla, altrove, esplicitamente di ostacoli dicendo che: " *Le intuizioni possono diventare ostacoli, ostacoli epistemologici (Bachelard), nei processi di apprendimento, di risoluzione o di creazione*" (Fischbein, 1994, p.233).

Queste idee sono state sviluppate da parte di altri ricercatori, Stavy e Tirosh (Stavy, Tirosh, 2001, 1996) parlano di "*regole intuitive*" che verrebbero utilizzate non solo dai bambini ma rimarrebbero attive anche in età adulta, anche dopo avere ricevuto una istruzione formale. Ad esempio la regola "*più A-più B*", ovvero la tendenza ad attribuite una proporzionalità a due caratteristiche dello stesso oggetto o situazione, potrebbe essere utilizzata anche da adulti o da esperti in caso di situazioni nuove. Nel loro testo (Tirosh, Stavy, 2001) propongono altre due regole che chiamano: "*stesso A-stesso B*", ovvero la tendenza ad attribuire l'uguaglianza fra due attributi di oggetti o situazioni partendo dall'uguaglianza di altri attributi, e "*tutto può essere suddiviso*", ovvero l'idea che qualunque grandezza o qualunque oggetto possa essere diviso indefinitamente. Tirosh e Stavy considerano tali regole stabili, resistenti al cambiamento e, in molti casi, come foriere di misconcezioni. Quindi, secondo noi, hanno tutte le caratteristiche degli ostacoli. Queste autrici propongono diverse strade per riuscire ad arginare gli effetti indesiderati di tali regole, in particolare insistono sull'importanza di rendere consapevoli gli stessi insegnanti. Gli insegnanti, infatti, cambiano atteggiamento in seguito ad interventi che li portino a prendere coscienza che tali regole sono attive nei loro stessi comportamenti. Ci pare che questa strategia possa avere una validità generale, al di là dell'interpretazione di alcuni comportamenti come azione di regole intuitive.

1.4 La misconcezione in Didattica delle Scienze

In Didattica delle Scienze, in particolare della Fisica, si è imposto il concetto di *misconception* traducibile anch'esso come misconcezione ma con significati diversi rispetto al termine usato in Didattica della Matematica. Al posto di tale termine, ma con simile significato, si possono trovare in letteratura di didattica delle scienze anche altri termini: *preconceptions* (Clement, 1982), *alternative* *conceptions* (Hewson, Hewson, 1984), *naive beliefs* (McCloskey, Caramazza, Green, 1980), *alternative beliefs* (Wiser, 1989), *alternative frameworks* (Driver, Easley, 1978), *naive theories* (McCloskey, 1983a, 1983b; Resnick, 1983b), *intuitive physics* (Viennot, 1979).

Smith, Di Sessa e Roschelle (Smith, Di Sessa, Roschelle, 1994) intendono con misconception una concezione dello studente che produce un certo tipo di errori in maniera sistematica, ovvero secondo uno schema che permette di ricondurli ad un modello mentale.

In un lavoro più recente sulle misconcezioni, Redish propone la seguente definizione di misconception: *" una struttura di conoscenza che viene attivata in una grande varietà di contesti, è stabile e resistente al cambiamento ed è in disaccordo con la conoscenza scientifica accettata"* (Redish, 2003, p. 19), una simile idea compare anche in lavori precedenti di altri autori, ad esempio Viennot (Viennot, 1979). Alcuni ricercatori hanno cercato di interpretare le misconcezioni come l'effetto di particolari conoscenze precedentemente acquisite in vario modo. In particolare, nell'ambito dell'insegnamento della fisica, Di Sessa ha introdotto l'idea di p-prims (*phenomenological primitives*), come particolari conoscenze in qualche modo distinguibili ed elementari, che vengono utilizzate soprattutto dai non esperti, ma in certi casi anche da persone più esperte, per interpretare situazioni fisiche o risolvere problemi. Tali vengono considerate da parte di chi le usa ovvie ed irriducibili, possono rivelarsi utili in alcune situazioni ma anche fuorvianti e quindi diventare misconcezioni più o meno robuste al cambiamento. Secondo Di Sessa le p-prims sono "*ipotetiche strutture di conoscenza* " (Di Sessa, 1993, p.111) con alcune specifiche proprietà:

- Sono elementari: coinvolgono pochi elementi e relazioni fra essi, a volte tale relazioni si riferiscono sono descritte in termini di comportamento e sono viste da chi le usa come auto-esplicative. Vengono usate per spiegare intuitivamente alcuni fenomeni ma non sono esse stesse spiegabili;

- Hanno meccanismi di attivazione cognitiva: queste strutture di conoscenza vengono attivate da particolari configurazioni percepite, che sono esse stesse delle strutture di conoscenza precedentemente attivate, come il riconoscimento di un corpo come corpo elastico. In certe situazioni diverse p-prims possono essere attivate secondo priorità differenti;

- Servono come base per la costruzione di conoscenze più avanzate e formali con un processo che può cambiare le priorità secondo le quali le p-prims vengono attivate ed i contesti di attivazione possono cambiare. Durante questo processo le p-prims cessano di essere auto-esplicative ma vengono legate a sistemi di conoscenza più complessi ed avanzati come le leggi fisiche.

Di Sessa ha proposto un elenco di p-prims che ha individuato da analisi con studenti universitari (Di Sessa, 1983, 1993), fra queste ci limitiamo a proporne alcune:

- *Ohm's p-prim*: porta ad una idea di proporzionalità fra uno sforzo, in presenza di una forma di resistenza, ed un risultato. E' una p-prim molto radicata ed utilizzata che influenza molto gli studenti;

- *Forza come deflettore:* l'idea di base è che una spinta che agisce su un corpo in movimento ne cambia la direzione iniziale portandolo ad una direzione intermedia fra quella iniziale e quella della spinta. Questa idea può presentarsi in diverse situazioni dove viene utilizzata dagli studenti. Dagli studi di Di Sessa pare che questa p-prim non abbia molta influenza e può essere facilmente integrata o sostituita in situazioni nelle quali non si applica;

- *Dissipazione* (*Dying away*): un moto, specialmente se causato in maniera violenta o impulsiva, gradualmente si smorza (concezione Aristotelica del movimento dei corpi terrestri). Questa p-prim influisce come misconcezione nell'apprendimento della fisica Newtoniana;

- *Cambiamento richiede tempo*: un effetto non agisce istantaneamente, ma richiede tempo. Questa p-prim può interferire come misconcezione con l'idea di causalità istantanea, ad esempio nello studio della 2° legge di Newton F=ma;

- *Equilibrio*: un sistema soggetto a diverse influenze, che possono variare in un determinato range di valori, ha un naturale dominio di stabilità. E' una p-prim potente che deve comunque essere raffinata con meccanismi di stabilità specifici e più complessi del semplice equilibrio;

- *Elasticità generalizzata*: influenze distruttive dell'equilibrio creano un allontanamento dall'equilibrio che è proporzionale alla forza dell'influenza. Di Sessa ha trovato che questa p-prim non è molto utile per chi inizia a studiare fisica ma non pare avere effetti negativi sui concetti di base della dinamica.

L'idea di p-prim è stata successivamente utilizzata e sviluppata anche da altri ricercatori (Redish, 2003; Tuminaro, Redish, 2007). In particolare da Redish ha cercato di inquadrare ed integrare il concetto di p-prim in un modello cognitivo nel quale si tiene conto delle acquisizioni delle scienze cognitive e delle neuro-scienze. Redish propone un esempio di come una p-prim possa divenire una misconcezione; alla domanda sul perché faccia più caldo di estate che di inverno, molti studenti rispondono che fa più caldo d'estate perché il sole è più vicino alla terra. Questa è una concezione che viene interpretata come un uso della p-prim, che l'autore etichetta come: "*più vicino è più forte*" (ovvero l'idea che in generale la distanza possa influire sull'intensità di un fenomeno) anche in un caso in cui non è più vero, generando una misconcezione (Redish, 2003, p.17). Questo modo di inquadrare e giustificare le concezioni degli studenti e quindi anche le loro misconcezioni, sembra avvicinare il concetto di misconception a quello di ostacolo nei casi in cui vale la sua stabilità e la sua resistenza al cambiamento. Inoltre, dagli esempi che si trovano in letteratura, si vede come le conoscenze relative alle misconception, pur essendo in generale contrarie alla conoscenza scientifica accettata, sono utili in certi ambiti e, probabilmente, sono state favorite dallo sviluppo filogenetico del genere umano (potremmo forse definire gli ostacoli generati in questo modo come ostacoli di tipo filogenetico?). L'ipotesi di una radice biologica di alcune delle misconcezioni più resistenti al cambiamento viene avanzata e sostenuta da vari ricercatori (Vosniadou, 1994; Gelman, 1991), e da Bozzi (Bozzi, 1990, p.59), che parla dell'insieme di queste concezioni come di *fisica ingenua*.

Comunque, secondo Di Sessa, non tutte le p-prims portano a misconcezioni stabili e resistenti, alcune sono più deboli, quindi, secondo noi, in questo caso non sono origine di ostacoli e possono essere superate tramite opportuni interventi didattici.

In Didattica della Fisica si è sviluppata, a partire dagli anni ’80, una metodologia specifica per il superamento di tali misconcezioni definita *conceptual change model* (Posner, Strike, Hewson, Gertzog, 1982). Inizialmente il modello era basato sull’idea di fare prendere coscienza agli studenti delle loro misconcezioni tramite interventi studiati per creare un *conflitto cognitivo* che servisse come punto di partenza per una successiva *sostituzione* delle misconcezioni con le concezioni ritenute corrette. L’efficacia di tale idea è stata messa in dubbio, anche per gli effetti non sempre positivi sulla motivazione degli studenti e per la scarsa considerazione delle conoscenze da loro già possedute come punto di partenza da valorizzare per la costruzione di conoscenze ritenute corrette (Mason, 1995). Alcuni ricercatori hanno cercato di proporre interventi nei quali le preconcezioni degli studenti fossero valorizzate per la loro vicinanza alle concezioni accettate, ovvero funzionassero come concezioni ‘ancora’ (*anchoring conception*) (Clement, et al, 1989). Inoltre nel modello iniziale si intendevano modificare solo gli aspetti concettuali della conoscenza degli studenti, senza cercare di lavorare esplicitamente sugli aspetti emotivi (Zemblyas, 2005). Successivamente si sviluppano interpretazioni diverse di tale metodologia, ci limitiamo a citare la metodologia definita “*Educational Reconstruction”* (Duit et al., 2012; Duit, 2007; Treagust, Duit, 2008). Treagust e Duit (Treagust, Duit, 2008) mettono in evidenza come alcune misconcezioni possano essere presenti negli stessi insegnanti che quindi le possono trasmettere anche nelle analogie, metafore o modelli che propongono ai propri alunni o che sono in accordo con i pregiudizi o misconcezioni già presenti negli alunni. Sono stati proposti altri modelli per il cambiamento concettuale di ispirazione socio-costruttivista nei quali il contesto sociale gioca un ruolo cruciale (Collins, Brown, Newman, 1989; Mason, 1995).

2. Metafore ed Analogie come “*lame a doppio taglio*”

L’analogia è stata definita una lama a doppio taglio, proprio per la caratteristica di poter essere molto utile, anche nella didattica, ma essere una possibile fonte di ostacoli e misconcezioni (Mason, 1992, pag.142; Sfard, 1997, pag. 367). Da un lato metafore ed analogie possono essere l’origine di alcune misconcezioni, dall’altro possono essere sfruttate per superare misconcezioni. Questa doppia natura delle metafore viene presa in considerazione anche da Ortony che parla di due differenti approcci con i quali gli studiosi si rapportano alla metafora: metafora come caratteristica essenziale della creatività del linguaggio oppure metafora come uso deviante e parassita rispetto ad un uso normale del linguaggio (Ortony, 1978). Vediamo alcuni aspetti negativi ed alcuni aspetti positivi del loro utilizzo in didattica e nelle scienze.

2.1 Metafore ed Analogie come fonte di misconcezioni od ostacoli

Sander ed Hofstadter scrivono che Platone ed Aristotele, pur avendo sostenuto la validitá dell’analogia come mezzo di pensiero, hanno anche messo in evidenza i pericoli in esse insiti. Questi autori citano anche Hobbes, che nel *Leviatano* (Hobbes, 1651) scrive che l’uso di metafore rende il pensiero un “*vagare fra innumerevoli assurdità*” (Sander, Hofstadter, 2013).

La potenziale pericolosità delle analogie e delle somiglianze viene messa in luce anche da Bacone nel *Novum Organum* (Bacon, 1620); Rossi, ne analizza un passo che mette in luce il carattere proprio dell'intelletto umano di cogliere somiglianze che, tuttavia, possono essere inesistenti, e scrive: "*..come quando vuole per esempio che tutti i corpi celesti si muovano secondo circoli perfetti o, per formare una quaterna, aggiunge il Fuoco agli altri tre elementi, oppure stabilisce, fra gli elementi, immaginarie proporzioni di uno a dieci.*" (Rossi, 1986, p.129).

E' interessante che fra i tipi di conoscenze che Bachelard considera come ostacoli ci siano le immagini, le metafore e le analogie, le quali, a suo modo di vedere, sono sempre negative perché sviano dalla vera natura della realtà: "*Una scienza che ammetta le immagini è più di ogni altra vittima delle metafore. Lo spirito scientifico deve perciò lottare ininterrottamente contro le immagini, contro le analogie e contro le metafore*" (Bachelard, 1938, p.42). Bachelard analizza tutte quelle idee che tendono a diventare preconcetti per l'analisi di situazioni o fenomeni nuovi e quindi anche le metafore e le analogie, vista la loro capacità di fissarsi nella mente umana, vengono considerate ostacoli. Un tipo di metafora che Bachelard considera come ostacolo è quella che assimila certe sostanze (aria, materia..) ad una spugna (Bachelard, 1938, Cap.4) e che è stata utilizzata in diverse forme e da diversi scienziati per spiegare alcuni fenomeni naturali. Un'altra metafora che questo filosofo considera come ostacolo è quella sostanzialista, ovvero l'attribuzione di certe caratteristiche della sostanza ad altri enti o fenomeni che si vogliono studiare (Cap.6), tale metafora può portare ad accettare spiegazioni non scientifiche dei fenomeni.

Duhem ha criticato l'uso di modelli in fisica, come quelli che venivano utilizzati da Faraday o Maxwell (Duhem, 1978; Hesse, 1966), che noi consideriamo come casi particolari di analogie. Secondo Duhem tali modelli sviano lo scienziato da una spiegazione fondata su sistemi nei quali i principi vengono dichiarati ed utilizzati logicamente.

Per quanto riguarda la Didattica della Matematica l'uso di metafore ed analogie è ritenuto importante, come si è mostrato nel capitolo 1, anche se non privo di insidie (Bazzini, 1995; Mason, 1992), dato che: " *I vari tipi di ragionamento analogico, se da una parte possono favorire la costruzione di conoscenze, dall'altra possono indurre a conclusioni erronee nel momento in cui vengano enfatizzati o distorti particolari aspetti a svantaggio di altri*" (Bazzini, 1994b, pag.108). Alcuni esempi di uso scorretto di analogie da parte di bambini si possono trovare in Bazzini (Bazzini, 1990, 1994a). In particolare si deve prestare attenzione alle metafore attive in ambiti nei quali si presentano le maggiori difficoltà da parte degli studenti (Bazzini, 2001).

Come abbiamo già visto anche Fischbein parla di misconcezioni che possono sorgere dall'uso di conoscenze intuitive, in particolare di *modelli mentali impliciti* (Fischbein, 1989). Tali modelli vengono usati per interpretare o affrontare alcune situazioni tramite una mappatura che mette in corrispondenza la situazione reale con il modello, quindi, a nostro modo di intendere, tramite una analogia. A proposito dell'uso di analogie, Fischbein scrive: " *Non dobbiamo però dimenticare che se i vari tipi di ragionamento analogico da una parte possono favorire la costruzione di conoscenze, dall'altra possono indurre a conclusioni erronee nel momento in cui vengono enfatizzati o distorti particolari aspetti a svantaggio di altri. Se l'analogia è una potenziale generatrice di ipotesi, può essere anche causa di misconcezioni o fraintendimenti*" (Sbaragli, 2008; Fischbein, 1987; 1989).
Possiamo fare riferimento ad un esempio tratto da Fischbein: "*Torniamo indietro al problema citato più sopra*: '*Un litro di succo di frutta costa 5 shekel. Quanto costeranno 0,75 litri? Con quale*

operazione si arriva alla soluzione?'. Il primo istinto di molte persone è quello di rispondere: 'con la divisione'- considerando che ' la divisione rende più piccolo'. Per arrivare alla risposta corretta si può ricorrere alla relazione di proporzionalità fra il costo e la quantità:

$$\frac{quantita'(1)}{quantita'(2)} = \frac{prezzo(1)}{prezzo(2)} \quad \textit{e quindi si ha:} \quad \frac{1}{0{,}75} = \frac{5}{x} \;, \quad x = 5 \times 0{,}75$$

L'operazione è, sorprendentemente, una moltiplicazione..In questo esempio si evidenzia un conflitto fra la prima soluzione intuitiva e la corretta soluzione logica." (Fischbein, 1998, pag.9).

Anche Bazzini ha sottolineato, oltre all'importanza e l'utilità che il pensiero analogico riveste in matematica, i possibili pericoli da un uso improprio dell'analogia (Bazzini, 1990, 1994a, 1994b). Bazzini propone il seguente esempio di uso scorretto di analogia, tratto da alcune sperimentazioni con bambini di scuola elementare:

Problema "*Bruno e i soldatini*" posto in 3° elementare: "*Hanno regalato a Bruno due scatole di soldatini, una normale e una gigante. Quella normale contiene 12 soldatini, 6 in meno di quella gigante. Quanti soldatini hanno regalato a Bruno? La scatola normale costa 1200 lire, quella gigante 1500. Secondo te, un soldatino della scatola normale ha lo stesso prezzo di un soldatino della scatola gigante? Perché?*".

Bazzini scrive che nella seconda parte del problema i bambini hanno dato le seguenti risposte:

a) Il soldatino della scatola gigante costa di più perché la scatola gigante costa di più (oppure perché è più grossa, perché ne contiene di più);
b) I soldatini sono uguali, quindi costano uguale.

ed attribuisce la prima risposta ad un transfer analogico di significati dal costo della scatola al costo dei soldatini, mentre attribuisce la seconda ad un transfer di uguaglianza dai soldatini al costo. In entrambi i casi l'uso dell'analogia porta a risultati inconsistenti con i dati del problema. Notiamo che probabilmente Tirosh e Stavy interpreterebbero questi risultati come applicazione delle regole intuitive "*più A-più B*" nel primo caso e "*stesso A- stesso B*" nel secondo.

Anche in Didattica delle Scienze ci sono studi che mettono in evidenza la pericolosità delle analogie, oltre alla loro utilità (Spiro, Feltovich, Coulson, Anderson, 1989; Mason, 1992). Come abbiamo visto nel capitolo 1 (par.3), anche nella storia delle scienze è possibile trovare esempi di scienziati che hanno utilizzato alcune analogie che si sono trasformate in ostacoli per gli sviluppi successivi.

Altre considerazioni interessanti sono state fatte da Kipnis (Kipnis, 2005) relativamente al fatto che, dal punto di vista storico, alcune delle analogie che vengono sfruttate nella didattica, non hanno avuto lo stesso ruolo nello sviluppo di concetti o teorie. Quindi, sfruttando alcune analogie si potrebbero introdurre, anche involontariamente, misconcezioni (in questo caso di tipo storico) relative al ruolo svolto nella storia da certe teorie nella creazione di altre sopravvalutandole o attribuendo loro un ruolo diverso da quello che realmente hanno avuto. Lo stesso autore propone che gli insegnanti diano la giusta importanza ed evidenza alle analogie che sono state effettivamente utilizzate nella storia dagli scienziati che le hanno utilizzate sia per arrivare alle loro scoperte che per spiegare le proprie idee (Kipnis, 2005).

Treagust e Duit (Treagust, Duit, 2008) sostengono che, nel caso di cambiamento da una concezione che deve essere superata ad una desiderata, la vecchia concezione (che può essere una analogia, una immagine, un modello) può continuare ad interferire nel ragionamento dell'alunno diventando quindi un ostacolo per la piena accettazione della nuova concezione. Questa idea è simile a quella espressa da D'Amore (D'Amore,1999) sul rischio di trasformare le immagini ancora incomplete in modelli. Dunque il rischio è quello di applicare conoscenze valide in una situazione anche in una situazione diversa dove le conoscenze supportate dall'analogia iniziale non sono più valide, diventando quindi delle vere misconcezioni.

Una possibile classificazione delle misconcezioni generate dalle analogie

Spiro, Feltovich, Coulson e Anderson (Spiro, Feltovich, Coulson, Anderson, 1989) hanno condotto uno studio specifico sulle analogie utilizzate nell'ambito dell'insegnamento di materie scientifiche a medici, crediamo che le loro considerazioni possano avere una validità più generale. Hanno proposto una possibile classificazione delle misconcezioni derivanti da un uso erroneo dell'analogia. Tali misconcezioni vengono definite dai precedenti autori *misconcezioni indotte dalle analogie* (Spiro, Feltovich, Coulson, Anderson, 1989, pag. 502) e classificano diversi modi con i quali le analogie possono portare a tali misconcezioni. Nel seguito proviamo ad utilizzare tale classificazione per interpretare alcune delle misconcezioni precedentemente considerate:

1- fuorviando indirettamente delle proprietà, ossia quando alcune caratteristiche salienti del dominio di base, non centrali ai fini dell'uso didattico dell'analogia, influenzano la comprensione di caratteristiche parallele nel dominio nuovo:

    - Come esempio si può forse riportare quello di una coppia di ruote, fra loro collegate, che passano da una superficie regolare ad una superficie ruvida, come analogia del fenomeno della rifrazione della luce. In tal caso la distanza fra le ruote ha un ruolo saliente nel dominio di base ma può portare ad inferire (per analogia appunto) che anche i raggi luminosi debbano avere uno spessore, conoscenza che è una misconcezione (Harrison, Treagust, 1993; Kipnis, 2005);
    - E' forse possibile inserire in questa categoria l'esempio del problema "*Bruno e i soldatini*". In questo caso i domini di partenza e di arrivo sono coincidenti ma nei due casi cambiano alcune informazioni. Una di queste informazioni, la maggiore dimensione della scatola in uno dei casi, viene usata nel ragionamento analogico per inferire che anche il costo dei soldatino contenuti sarà maggiore.

2- fuorviando direttamente delle proprietà, ossia quando un aspetto non saliente del dominio di base ha un valore diverso nel dominio nuovo, ma gli si attribuisce, in quest'ultimo, lo stesso valore:

- Si potrebbe considerare come esempio l'analogia utilizzata da Carnot del calore come fluido, già considerata nel capitolo 1 (par.3), che si conserva nel passaggio dalle due sorgenti di una macchina termica (caratteristica che non è fondamentale per le deduzioni che fa Carnot) ma che influisce facendogli inferire (non correttamente) che il calore si conserva durante il passaggio dalle due sorgenti di calore;

3- tralasciando delle proprietà:

- Ad esempio utilizzando il sistema solare come analogo dell'atomo (modello di Rutherford), si potrebbe non tenere conto del fatto che, secondo l'elettrodinamica classica, l'elettrone dovrebbe perdere energia e spiralizzare cadendo nel nucleo. (Tale fenomeno viene risolto solo con le idee della meccanica quantistica che, solitamente, sono trattate successivamente alle equazioni di Maxwell);

4- trasferendo in blocco le proprietà del dominio di base anche se non trovano corrispondenza:

- Un esempio potrebbe essere l'inferenza che deve esistere l'etere dall'analogia fra suono e luce come fenomeni ondulatori;

5- focalizzando gli aspetti superficiali di tipo descrittivo e, di conseguenza, trascurando gli aspetti causali sottostanti:

- Non è facile trovare esempi in fisica, visto che si cerca sempre di evitare analogie superficiali che sarebbero inutili ai fini predittivi. Un possibile esempio (assolutamente inventato) può essere l'inferenza dell'esistenza di una forza di attrazione fra il centro di un vortice di acqua e l'acqua che circola intorno, in analogia con la forza di gravitazione fra sole e pianeti;

6- tralasciando un aspetto importante del dominio nuovo poiché l'analogia è elaborata ad un livello erroneo, per cui non vengono notati elementi rilevanti:

- Si potrebbe considerare ancora l'analogia utilizzata da Carnot, dove la caratteristica importante è proprio il fatto che parte del calore viene trasformato in lavoro (primo principio della termodinamica);

La precedente proposta di classificazione delle possibili misconcezioni derivanti dall'uso scorretto di analogie può essere interessante per il modo nel quale intendiamo inquadrare l'uso di metafore ed analogie nell'ambito del processo di insegnamento - apprendimento. In particolare, nel prossimo capitolo e nel capitolo 6 chiariremo in che modo la metafora, a nostro modo di vedere, può essere riconosciuta e valorizzata in una prospettiva vygotskiana del processo di insegnamento-apprendimento, e come una possibile classificazione dei modi in cui il ragionamento analogico, in qualche modo, fallisce, può essere utile all'insegnante per guidare gli studenti ad utilizzare la metafora e l'analogia in maniera più produttiva.

2.2 Metafore ed Analogie come mezzi per superare misconcezioni od ostacoli

Mason (Mason, 1992) mette in evidenza l'utilità delle analogia anche come mezzo per la ristrutturazione concettuale che deve avvenire quando le conoscenze possedute dagli alunni sono già stabili ma difformi dalle conoscenze che si vogliono insegnare (potrebbe trattarsi di misconcezioni od ostacoli). Anche Fischbein propone l'analogia come uno dei modi con i quali si possono superare misconcezioni od ostacoli che derivano da conoscenze intuitive (Sbaragli, 2008, pag.24; Fischbein, 1998). In particolare, riprendendo l'esempio del problema descritto nel paragrafo precedente, Fischbein scrive: "*Il problema può anche essere risolto per mezzo dell'analogia con il problema che ha la stessa struttura matematica ma che usa solo numeri interi* " (Fischbein, 1998, pag.9). Stavy e Tirosh (Stavy, Tirosh, 2001) promuovono l'uso dell'analogia con lo stesso obiettivo (ci sono somiglianze con la strategia delle *bridging analogies* descritta in seguito). In particolare la strategia che Tirosh e Stavy propongono si basa sul passaggio da una situazione (*compito di riferimento*) che non innesca l'uso di regole intuitive fuorvianti, ad una situazione che invece tenderebbe ad innescare regole intuitive che producono misconcezioni (*compito-obiettivo*), tramite una o più situazioni intermedie (*compiti di collegamento*). Le situazioni sono collegate fra loro da analogie che l'insegnante può sfruttare per fissare negli studenti una situazione alla quale lo studente può fare in seguito riferimento per evitare la misconcezione.

Un altro modo per utilizzare le analogie per il superamento di misconcezioni ed ostacoli è stato proposto da Brown e Clement (Brown, Clement, 1989; Clement, Brown, Zietsman, 1989; Clement, 1993; Mason, 1992). In particolare Clement e Brown propongono di utilizzare proprio il ragionamento analogico per superare le misconcezioni degli studenti. Il metodo che propongono inizia con l'analisi delle preconcezioni degli studenti, che agli occhi dell'esperto diventano misconcezioni, ma contengono anche alcune conoscenze dalle quali si può partire per arrivare a concezioni ritenute corrette. Tali conoscenze, dette *anchoring conception*, vengono collegate a quelle ritenute corrette tramite opportune analogie dette *analogie ponte* (*bridging analogies*). L'uso di tali analogie ha l'obiettivo di rendere più semplice il passaggio da una conoscenza pregressa e da superare (perché si tratta di misconcezione o di una conoscenza non più adatta) ad una conoscenza nuova e ritenuta corretta (Clement, Brown, 1989). Anche Dagher (Dagher, 1994) descrive alcuni interventi didattici nei quali si propongono alcune analogie meccaniche con l'obiettivo di sostituire misconcezioni da parte degli studenti relative al funzionamento di circuiti elettrici. Harrison e Treagust propongono una analogia fra un fascio di luce che passa da un mezzo trasmissivo ad una altro, con un sistema di ruote che cambia il mezzo su cui rotola, per superare una misconcezione relativa alla rifrazione della luce (Harrison, Treagust, 1993; Kipnis, 2005). Spiro, Feltovich, Coulson e Anderson (Spiro, Feltovich, Coulson, Anderson, 1989) evidenziano come l'uso di analogie semplici e semplificate per introdurre un concetto od una conoscenza ad un principiante può essere indispensabile, per evitare situazioni eccessivamente complesse, tuttavia tale analogia iniziale non deve cristallizzarsi e diventare il modello per quella situazione. Dato che l'analogia, una volta compresa ed assimilata, ha un forte potere sul pensiero, gli autori propongono come possibile antidoto ad una analogia che sia diventata un ostacolo, un'altra analogia più completa o più corretta. In particolare delineano alcune idee per costruire analogie multiple che possono essere costruite a partire da una vecchia analogia con alcune modifiche oppure tramite nuove analogie. Le analogie proposte dovranno risolvere le misconcezioni create dalle precedenti mantenendo quanto di positivo e sostituendo ciò che crea problemi (Spiro, Feltovich, Coulson, Anderson, 1989). Inoltre, utilizzando una analogia, si dovranno sempre mettere in evidenza i punti nei quali si rivela incompleta o non corretta (Mason, 1992).

3. Alcune considerazioni sui concetti di Ostacolo e Misconcezione

Analogamente a quanto abbiamo fatto nel precedente capitolo, in questo paragrafo cerchiamo di chiarire il senso con il quale ci riferiremo ai concetti di misconcezione ed ostacolo nel resto del lavoro. Infatti, da quanto visto in precedenza, emergono diversi significati, almeno se consideriamo la Didattica della Matematica e la Didattica delle Scienze.

Un altro aspetto che per noi è importante chiarire, dato il quadro teorico nel quale ci poniamo (che verrà chiarito nel prossimo capitolo), è la natura anche culturale di misconcezioni ed ostacoli. Per questo vogliamo rendere più esplicita, anche nelle definizioni che adottiamo, la dipendenza della natura misconcettuale di alcune concezioni dal contesto socio-culturale nelle quali vengono considerate, analogamente a quanto fatto con i concetti di analogia e metafora.

Oltre a questo, vale la pena osservare che la definizione data di ostacolo può talvolta portare a delle misconcezioni (questa volta nella didattica), infatti dicendo che un concetto/conoscenza è un ostacolo si intende che tale conoscenza ha le caratteristiche precedentemente delineate ovvero è utile o è stata utile in certi ambiti ma fallisce in un nuovo ambito e rende difficile modificare la conoscenza in modo da adattarsi alla nuova situazione. Potrebbe essere fuorviante il nome di ostacolo che si sarebbe tentati di attribuire, invece, alla nuova conoscenza che deve essere costruita/acquisita nel nuovo ambito. Così nella letteratura in Didattica della Matematica si può trovare attribuito al concetto di 0 o al concetto di infinito il termine di ostacolo. In realtà, volendo attenersi alla definizione risalente a Bachelard ed a Brousseau, non sono tali concetti a rappresentare un ostacolo ma, semmai, a rivelare come ostacolo la conoscenza sviluppata e posseduta fino a quel momento che si rivela inadatta ad accogliere il nuovo concetto.

In generale crediamo che l'adozione di una terminologia comune potrebbe servire a far procedere anche su basi comuni (dove possibile) la didattica di queste discipline ed aumentare il livello di trasportabilità o confrontabilità dei risultati e dei problemi. In ogni caso non abbiamo la presunzione di proporre definizioni per l'intera comunità dei ricercatori di queste discipline, cosa che richiederebbe discussioni approfondite in altre sedi, ma solo l'obiettivo di poterci riferire a questi termini con un significato sufficientemente preciso e reso esplicito. In quanto segue proponiamo una serie di considerazioni e definizioni che, secondo noi, possono contribuire a risolvere questi problemi.

3.1 Ostacolo epistemologico, didattico e culturale

L'idea di ostacolo epistemologico sembra più un ideale, un limite al quale può più o meno avvicinarsi un ostacolo didattico, infatti non è possibile essere certi che un ostacolo sia davvero epistemologico, almeno fino a quando non si sia dimostrato che tutti i metodi didattici possibili falliscono, e questo non è oggettivamente praticabile. E' comunque una idea utile per avere un termine di paragone per gli ostacoli che si individuano, per dare un nome a particolari ostacoli che si presentano in maniera costante e abbastanza indipendente dal contesto. Ma quale contesto? Si può pensare che i diversi contesti (o micro-contesti) nei quali tali ostacoli si presentano siano, in realtà, all'interno di un contesto ancora più generale (un macro-contesto), ovvero ad una situazione socio-culturale nella quale è comune una certa epistemologia, certe pratiche sociali ed altri fattori che determinano la natura epistemologica dell'ostacolo. In altre parole è possibile che dal nostro punto di vista, che viviamo immersi in un certo tipo di cultura e di società, certi ostacoli appaiano indipendenti dai fattori che riusciamo a modificare e quindi li definiamo "epistemologici" ma in altri contesti, in altre culture o con altre pratiche sociali tali ostacoli potrebbero scomparire o diventare didattici. Alcuni autori, in effetti, hanno messo in dubbio la natura non-culturale degli ostacoli epistemologici (D'Amore, Radford, Bagni, 2006), affermando che "*l'ostacolo epistemologico risulta fortemente legato a fattori sociali*" (D'Amore, Radford, Bagni, 2006, p.4). Nello stesso articolo scrivono che: " *Pensare è un genere di prassi sociale, una forma di riflessione sul mondo secondo categorie concettuali, etiche ed estetiche ed altre categorie culturali. Il pensiero greco del periodo classico era conformato alla distinzione eleatica tra essere e non-essere. Tale distinzione ha operato come una categoria concettuale generale che ha sostenuto l'epistéme greca e le sue varie manifestazioni, tra le quali il pensiero matematico. L'epistéme cinese era conformata da categorie concettuali diverse, in particolare dall'opposizione yin/yang. Questa distinzione ha reso concepibile, in campo matematico, qualcosa di simile a quanto noi oggi chiamiamo 'numeri negativi', numeri che erano inconcepibili nel periodo greco classico*" (D'Amore, Radford, Bagni, 2006, p.6). Ci pare che abbia senso introdurre, a fianco degli ostacoli didattici, epistemologici ed ontogenetici, gli ostacoli di origine culturale, che saranno quegli ostacoli originati da conoscenze che sono state sviluppate in un certo contesto culturale (concetti, abilità, pratiche), nel quale erano utili, ma che ostacolano l'acquisizione di nuovi concetti in un conteso culturale diverso.

Gli ostacoli epistemologici e didattici potrebbero essere visti come due tipi differenti di ostacolo culturale. In particolare potremmo pensare che l'ostacolo epistemologico sia un ostacolo che è diffuso e culturalmente trasmesso in una intera comunità (macro-contesto) e non sono note altre comunità nelle quali esso non sia presente (quindi non è possibile un confronto). In altre parole l'ostacolo epistemologico potrebbe derivare dal fatto che una particolare disciplina è stata istituzionalizzata in un unico particolare modo e non sono possibili confronti con altri.

L'ostacolo didattico potrebbe essere inquadrato come ostacolo culturale la cui diffusione è riconducibile alle pratiche e alla cultura di una comunità ristretta (micro-contesto), che può essere una particolare classe di una scuola, ed esistono altre comunità nelle quali non è presente.

Esempi di ostacoli culturali possono trovarsi sfruttando i risultati della ricerca in etno-matematica (D'Ambrosio, 2002; Ascher, 2007), come esempi di conoscenze sorte società o in contesti molto diversi dal nostro. Crediamo che, riducendo la "distanza culturale", possano annoverarsi in questo tipo di ostacoli i diversi significati che certi concetti matematici possiedono. Ad esempio il significato di “=” in matematica o in informatica oppure il significato di angolo per un geometra (nel senso di progettista di case) o per un matematico.

3.2 Misconception ed Ostacolo filogenetico

Da quanto visto nel paragrafo 1.4 a noi pare che il concetto di misconception in Didattica delle Scienze sia presente con due sensi differenti; la misconcezione può essere la concezione erronea (non accettata) che, tuttavia, è facilmente superabile con opportuni interventi didattici, d’altro canto la misconcezione può anche essere la concezione errata che resiste al cambiamento. Quest’ultimo senso della misconcezione in Didattica delle Scienze la avvicina a quello di ostacolo in Didattica della Matematica, nella sua resistenza al cambiamento. Inoltre dagli esempi che si trovano in letteratura si deduce che le conoscenze relative alle misconception, pur essendo in generale contrarie alla conoscenza scientifica accettata, sono utili in certi ambiti o lo sono state nello sviluppo filogenetico (per la sopravvivenza). Si potrebbe quindi avanzare una proposta di unificazione delle terminologie utilizzate in questi ambiti introducendo il concetto di *ostacolo filogenetico* nel quale si potrebbe fare rientrare la definizione di *misconception* data da Redish. Si tratta di una conoscenza che è stata utile all’uomo in certe fasi del suo sviluppo filogenetico, che si trovano incorporate nella propria struttura neurale ma che successivamente possono essere un ostacolo alla costruzione di concetti evoluti, di origine culturale. Mentre la prima forma di misconcezione, quella che non si presenta come ostacolo, coincide con l’idea di misconcezione in Didattica della Matematica.

3.3 Una ridefinizione di Ostacolo e Misconcezione

Ci riferiremo al termine *Misconcezione* come ad una proposizione (nel senso di enunciato orale, scritto, espressione comprensibile di altre forme) che in una data situazione venga considerata errata. Questo indipendentemente dal fatto che tali proposizioni siano il frutto di una incomprensione facilmente superabile oppure il frutto di conoscenze più radicate nell’individuo. Notiamo che alcune di queste conoscenze radicate potrebbero manifestarsi sotto forma di comportamenti, pratiche o atteggiamenti, considerati errati in una certa situazione, pertanto non definibili come proposizioni. Tuttavia supponiamo che in un processo di insegnamento-apprendimento, sia possibile per l’insegnante (o un esperto) esplicitare o aiutare ad esplicitare tali comportamenti/pratiche/atteggiamenti (con opportune strategie comunicative, come quelle descritte nel prossimo capitolo) in modo da tradurli in proposizioni. In quanto segue cercheremo di definire gli ostacoli come l’origine di alcune misconcezioni.

Per arrivare ad una definizione di ostacolo coerente con le precedenti osservazioni, consideriamo i seguenti elementi:

- Una *situazione iniziale Si*, che rappresenta l’insieme delle conoscenze e competenze che lo studente possiede in un dato momento, definite e valutate secondo i valori ed i metodi del contesto socio-culturale nel quale si trova in un dato momento;

- Una *situazione nuova Sn*, che rappresenta l’insieme delle conoscenze e competenze che l’insegnante si pone come obiettivo di insegnare allo studente. Anche in questo caso definite e valutate secondo i valori ed i metodi del contesto socio-culturale nel quale si trova in un dato momento (che può essere diverso dal primo, ad esempio se lo studente cambia scuola, o si trasferisce in un diverso paese);

- Una *conoscenza-ostacolo Co dello studente*, relativo a certe conoscenze, competenze o comportamenti;

- Una strategia didattica dell'insegnante *Di*, le scelte didattiche e il percorso (tempi, modi..) che l'insegnante usa per portare lo studente (gli studenti) dalla situazione *Si* alla situazione *Sn.*

Con *conoscenza-ostacolo* intendiamo un insieme di conoscenze intuitive o formali, delle quali si può avere o meno consapevolezza, e che si manifestano non solo in maniera proposizionale ma anche operativa e comportamentale in un ambito specifico ed in modo coerente, anche se con modalità differenti. Facciamo rientrare nell'idea di conoscenza-ostacolo:

- Modelli taciti di Fischbein; come anticipato nel paragrafo 1.3 (cap.2), crediamo che sia più coerente considerare i modelli taciti come fonte di ostacoli;

- P-prims di Di Sessa;

- Regole intuitive di Tirosh e Stavy;

Per l'insegnante il problema è cercare un modo efficace per passare dalla situazione *Si* alla situazione *Sn*. Tale passaggio può risultare difficile, almeno per due ragioni distinguibili (che possono anche essere presenti contemporaneamente):

- Strategia didattica dell'insegnante;

- Presenza di ostacoli da parte degli alunni.

Nel primo caso significa che alcune delle caratteristiche della didattica utilizzata dall'insegnante non consentono agli alunni di passare in maniera agevole da *Si* ad *Sn.* Ad esempio i tempi possono essere troppo veloci (non viene dato sufficiente tempo agli studenti per assimilare definizioni, concetti..), oppure la trattazione può essere troppo astratta e senza esempi, oppure il tipo di interazione con gli studenti non è efficace.

Se nella stessa classe, due strategie portano ad esiti molto differenti, significa che la ragione delle difficoltà è sostanzialmente una delle strategie adottate. Se vogliamo essere coerenti con l'idea di ostacolo come conoscenza che è stata utile o lo è ancora in talune situazioni, non possiamo attribuire il nome di *ostacolo* a questo tipo di difficoltà. In questo caso, infatti, ci pare che il problema derivi soprattutto dalle scelte dell'insegnante e non da conoscenze pregresse degli studenti. Se invece succede che nella stessa classe (o in classi omologhe della stessa scuola o dello stesso paese) nessuna strategia per passare da *Si* ad *Sn* è efficace, allora è possibile che la ragione risieda in alcune conoscenze degli studenti che, in questo caso, possono comportarsi come ostacoli. In particolare possiamo individuare un *ostacolo* con una terna (*Si*, *Co*, *Sn*), dove *Co* è una conoscenza-ostacolo (nel senso chiarito precedentemente) con le seguenti caratteristiche:

- *resistente al cambiamento,* indipendentemente dalle strategie dell'insegnante;
- origina concezioni che sono compatibili (non in contraddizione), secondo metodi di valutazione propri della situazione *Si,* con la situazione *Si*;
- origina concezioni che non sono compatibili (sono in contraddizione), secondo metodi di valutazione propri della situazione *Sn*, con la situazione *Sn*. In *Sn* tali concezioni sono considerate *misconcezioni.*

Seguendo questa ipotesi, gli ostacoli potrebbero essere classificati a seconda dell'origine delle conoscenze-ostacolo che generano le misconcezioni, e potremo definire i seguenti tipi di ostacolo:

- *Culturale*, se la conoscenza-ostacolo si è formata a seguito del processo di inculturazione, delle pratiche sociali proprie della cultura di appartenenza o della propria famiglia;
- *Epistemologico,* se la conoscenza-ostacolo si è formata culturalmente ma con caratteristiche comuni a tutti i componenti di una società (quindi può essere un particolare ostacolo culturale diffuso in tutta una società);
- *Didattico*, se la conoscenza-ostacolo si è formata a seguito della particolare scolarizzazione (scelte didattiche dell'insegnante, della scuola);
- *Filogenetico,* se la conoscenza-ostacolo si è formata in seguito all'evoluzione della nostra specie, ed è quindi incorporato nella nostra struttura neurale;
- *Ontogenetico,* se la conoscenza-ostacolo si è formata in un momento dello sviluppo dell'individuo che ne ha determinato alcune delle caratteristiche.

Osserviamo che dalla definizione che abbiamo proposto, la considerazione di una terna come ostacolo dipende esplicitamente dalla situazione iniziale e da quella nuova, e non solo dalla conoscenza-ostacolo. La dipendenza dal contesto socio-culturale è esplicita.

Proponiamo un esempio per chiarire questa idea; consideriamo la concezione secondo cui: "*un insieme è più numeroso di un suo sottoinsieme*":

- se viene sostenuta in un contesto (situazione concreta/ lavorativa..) nella quale è condivisa e giustificabile allora non è una misconcezione;

- se avviene in una situazione di apprendimento della matematica (teoria degli insiemi), dove la stessa concezione non è più giustificabile o condivisa allora diventa una misconcezione.

Quindi anche la considerazione di una concezione come misconcezione dipende dal contesto nella quale viene considerata. Se esiste una conoscenza-ostacolo che il soggetto utilizza per giustificare questa concezione, allora potremo parlare di ostacolo. Secondo la nostra definizione indicheremo l'ostacolo con la terna (*Si*, *Co*, *Sn*) dove:

Si: situazione iniziale, rappresentata da un contesto quotidiano, lavorativo (o anche educativo) nel quale la concezione è condivisa;

Sn: situazione nuova, ad esempio una lezione sulla teoria degli insiemi nella quale la concezione non è più condivisa;

Co: idea intuitiva di insieme e di confronto fra insiemi del soggetto. Ad esempio potrebbe essere attivo un modello di insieme come collezione di oggetti fisici che il soggetto (studente) si è formato nelle esperienze concrete nella vita di tutti i giorni che educative.

E' chiaro che per poter parlare di *ostacolo* (e quindi essere certi della stabilità delle conoscenze-ostacolo) e per attribuirgli una precisa origine (culturale, didattica, filogenetica..) è necessaria una analisi approfondita.

Capitolo 3

In questo capitolo presentiamo il quadro teorico di riferimento per questo lavoro, ovvero la Teoria della Mediazione Semiotica, la integriamo con i concetti di metafora, analogia, ostacolo e misconcezione che abbiamo definito nei capitoli 1 e 2, e discutiamo tale proposta di integrazione.

1. Paradigmi in Didattica della Matematica e Networking fra teorie

La ricerca si sta muovendo all'interno di un quadro di riferimento teorico che comprende concetti ed idee concepite in ambiti diversi della ricerca in didattica della matematica ma non solo in questa. L'utilizzo di diverse teorie o concetti fa parte delle scelte possibili per la costruzione di un quadro teorico in didattica della matematica e le modalità con le quali gli studiosi in questo ambito compiono queste operazioni sono, esse stesse, oggetto di studio. Esistono molti differenti punti di vista che possono portare a diversi approcci e con obiettivi differenti.

1.1 Paradigmi in Didattica della Matematica

La Didattica della Matematica è una scienza ancora giovane, se consideriamo che nasce come disciplina negli anni '70. Per rendersi conto di questo può essere istruttivo osservare gli anni di pubblicazione dei lavori citati in un'opera generale ed introduttiva di Didattica della Matematica come quella di D'Amore (D'amore, 1999). La Teoria delle Situazioni Didattiche di Brousseau, che è considerata una delle prime teorizzazioni 'moderne' in Didattica della Matematica, nasce negli anni '70 e nel luglio del 1980 viene organizzata la prima scuola estiva di Didattica della Matematica in europa (Bosch, Gascon, 2006). Questa è una delle ragioni per cui sono presenti molti punti di vista differenti sia teorici che sperimentali, che portano ad una notevole varietà di nozioni ed interpretazioni (Sierpinska, Lerman, 1996). Questa varietà porta, da un lato, ad un confronto fra i ricercatori che condividono differenti punti di vista (paradigmi diversi, "scuole" diverse), d'altro lato porta il singolo ricercatore a posizionarsi rispetto tali paradigmi.

Kaiser (Kaiser, 1996) distingue i seguenti paradigmi generali possibili, che possono orientare la ricerca educativa:

- Epistemologico disciplinare: centrato sullo studio delle relazioni fra epistemologia della disciplina e la didattica;
- Storico: centrato sullo studio dello sviluppo storico della disciplina come fondamento per la didattica ed i linguaggi disciplinari;
- Sperimentale: centrato sull'idea di spiegare fenomeni didattici tramite la valutazione di variabili tramite esperimenti, ovvero eventi costruiti per verificare le ipotesi formulate;
- Politico-sociale: centrato sullo studio delle variabili e del contesto politico-sociale nel quale avviene l'educazione. Lo studio è centrato sulla trasformazione della persona in chiave relazionale;

- Tecnologico: centrato sull'utilizzo di tecnologie per l'insegnamento;

- Etnografico: centrato sull'analisi degli eventi didattici con gli strumenti etnografici;

- Comparativo: centrato sull'analisi ed il confronto degli stessi parametri di sistemi educativi in diversi contesti (paesi diversi, contesti culturali o linguistici diversi..);

- Semiotico: centrato sullo studio ed interpretazione dei segni che vengono prodotti nel processo educativo;

- Ermeneutico: centrato sull'interpretazione del senso dei testi e del contesto dell'evento didattico;

- Ludico: centrato sul coinvolgimento emozionale dei soggetti coinvolti nell'azione educativa;

- Ricerca-azione: centrato sul coinvolgimento dello stesso ricercatore che, a differenza di quanto avviene nel paradigma sperimentale, è profondamente implicato nella stessa situazione che studia.

Nella ricerca in Didattica della Matematica e delle Scienze si possono individuare diverse teorie, che si caratterizzano, fra l'altro, per l'aderenza a paradigmi diversi (anche a più paradigmi), ci limitiamo ad indicarne alcune:

- *Conceptual Change*: (Posner, Strike, Hewson, Gertzog, 1982; Treagust, Duit, 2008) studia le condizioni che favoriscono il cambiamento delle concezioni da parte degli studenti. Come abbiamo visto nel capitolo 2, tale teoria si è declinata in maniere differenti negli anni ed i ricercatori che hanno contribuito al suo sviluppo hanno proposto versioni differenti;

- *Approccio semiotico-culturale*: studia le relazioni fra significato degli oggetti matematici e loro rappresentazioni semiotiche ed il contesto culturale nel quale si sviluppano (Radford, 2003b; Duval, 2008);

- *Teoria delle situazioni didattiche*: (Brousseau, 1997), cerca di modellizzare il processo di insegnamento-apprendimento ispirandosi alla teoria dei giochi. Alcuni dei concetti che in essa sono nati e sono utizzati (Spagnolo, 2009):

    - Situazioni didattiche ed a-didattiche;
    - Situazione fondamentale di apprendimento;
    - Ostacoli ontogenetici, didattici ed epistemologici;
    - Contratto didattico.

- *Trasposizione didattica*: (Chevallard, 1985, 1992), studia le pratiche di insegnamento da un punto di vista istituzionale, analizzando le modalità con le quali i saperi si modificano, sia nei contenuti che nelle 'ragioni di essere', quando vengono adattati (trasposti) da un contesto per un altro contesto. Tale teoria si è rapidamente integrata con quella delle situazioni didattiche (Bosch, Gascon, 2006);

- *Teoria della mediazione semiotica*; (Bartolini Bussi, Mariotti, 2008), adotta una prospettiva vygotskijana per modellizzare il processo di insegnamento-apprendimento. E' la teoria che adottiamo e che verrà trattata in dettaglio nel paragrafo 2.3.

Dal punto di vista dell'analisi e progettazione delle attività di insegnamento-apprendimento, ciascuna teoria assegna ruoli differenti all'insegnante e allo studente (Radford, 2008b) oltre che dare statuti epistemologici differenti alle conoscenze matematiche insegnate. Tale questione viene ripresa ed approfondita nei prossimi paragrafi.

1.2 Networking fra teorie

Gli studiosi in questo ambito disciplinare hanno riconosciuto l'importanza di un confronto e di una integrazione (quando è possibile) fra diversi approcci e teorie, ed hanno cominciato a proporre strumenti che possono essere utili anche per questa forma di meta-riflessione sulla Didattica della Matematica (Prediger et al., 2008; Radford, 2008a; Radford, 2008b). E' da alcuni anni, almeno dal 2002, che i ricercatori stanno sviluppando ed utilizzando gli strumenti del networking (che si potrebbe forse tradurre come *interconnessione*) fra teorie, tanto da dedicare a questa tematica molti articoli e diversi gruppi di lavoro (Bikner et al., 2010). Gli obiettivi sono molteplici, fra i quali:

- migliorare la comprensione dei processi di insegnamento-apprendimento della matematica valendosi di diversi punti di vista e diversi approcci o metodi;
- chiarire le basi sulle quali si fondano i diversi approcci tramite un confronto con altri ricercatori;
- migliorare il dialogo fra diverse teorie ed approcci.

Spesso il confine fra le diverse teorie è sorgente di dibattito fra i ricercatori e necessita di approfondimenti che possono portare allo sviluppo di nuovi e più illuminanti concetti. (Bikner et al., 2010). Un possibile modello per analizzare questo "dialogo" fra teorie è proposto in (Prediger et al., 2008). In tale lavoro, dopo avere approfondito il concetto di teoria ed avere mostrato alcuni esempi di diverse teorie o approcci alla Didattica della Matematica, gli autori introducono un modello con diverse possibili strategie di networking che si basano e cercano di far luce su esempi concreti di utilizzo di diverse teorie da parte dei ricercatori. In generale tali strategie possono variare fra due poli estremi: ignorare le altre teorie (quindi assenza di connessioni) e unificare teorie (completa connessione). Gli autori non intendono l'unificazione di teorie come necessariamente positiva, perché in certi casi l'unificazione forzata può significare una perdita di ricchezza e di informazione. La connessione dovrebbe essere spinta fino a dove possibile ma non oltre. In questa ottica sono particolarmente importanti le strategie di connessione intermedie che gli autori chiamano "Networking strategies", in particolare intendono con questo termine una serie di strategie che non comprendono i due poli estremi.

Fra le diverse strategie di "Networking" (che vengono spesso usate anche contemporaneamente) gli autori propongono:

- *Capire le altre teorie e rendere le proprie comprensibili agli altri:* Il primo passo per la connessione di teorie è rappresentato dalla comprensione delle stesse. Questo è un lavoro non banale che spesso richiede, per essere spiegato e compreso, esempi paradigmatici che servono a dotare la teorie di contenuto empirico. La comprensione è una premessa ai passi successivi della connessione ma solitamente viene arricchita e completata proprio dai passi successivi;

- *Comparare e mettere in contrasto:* Sono due strategie simili, la prima enfatizza le caratteristiche simili o uguali di teorie, mentre la seconda enfatizza le differenze. Tale strategia può avere diversi scopi;

    - Migliorare la intercomunicabilità fra teorie e la comprensione;
    - Mettere in competizione teorie (confrontarle);
    - Dare una base razionale alla scelta di una teoria.

  Gli autori evidenziano comunque che è necessario prestare attenzione ai criteri usati per comparare le teorie, visto che gli stessi criteri sono soggetti a pregiudizi o dipendere da scelte implicite o dal background culturale di chi li propone. In tale fase può anche succedere che dalla analisi di una stessa situazione da due diversi punti di vista si rendano necessari od utili nuovi concetti (Bikner et al., 2010, pag.154);

- *Coordinare e combinare:* Queste sono strategie utilizzate tipicamente quando si vuole analizzare un problema/situazione concreta utilizzando diverse teorie, in modo da avere una visione più completa. Quindi non si ha l'obiettivo di una unica completa teoria coerente ma la necessità di coordinare l'utilizzo di diversi strumenti teorici. Gli autori parlano si *strategia di coordinamento* quando si crea una struttura teorica mettendo in buona corrispondenza elementi di altre teorie. Per fare questa operazione è necessario che le teorie abbiano nuclei compatibili. Non sempre è possibile trovare una buona corrispondenza fra gli elementi di due o più teorie, in tal caso può essere ugualmente utile usare più teorie giustapponendole nello studio di una situazione. In tal caso gli autori parlano di *strategia di combinazione.* Questa strategia può essere usata anche con teorie che hanno assunti di base non coerenti e può servire ad avere un visione più completa di una situazione;

- *Sintetizzare ed integrare:* Mentre le strategie precedenti hanno come principale obiettivo il fare luce su di un determinato fenomeno, strategie che abbiano come principale obiettivo quello di fare convergere diverse teorie verso una struttura unitaria sono chiamate dagli autori *strategie di sintesi e di integrazione.* In particolare la strategia di sintesi è quella che permette di connettere fra loro due teorie ugualmente sviluppate e stabili in una unica teoria. Spesso il grado si sviluppo delle teorie non è uguale e le teorie non hanno la stessa portata, in tal caso ci possono essere solo alcuni concetti od aspetti di una teoria integrati in una teoria più sviluppata e dominante. In tale caso gli autori parlano di integrazione. Queste strategie evidentemente richiedono condizioni più restrittive per essere applicate.

2. Quadro teorico di riferimento per questa ricerca

Come abbiamo già scritto nel capitolo 1, in questa ricerca ci collochiamo in una prospettiva socio-culturale, in particolare ci riferiremo alle idee di Vygotskij e all'adattamento di tali idee proposto da Bartolini Bussi e Mariotti (Bartolini Bussi, Mariotti, 2008, 2009) per l'interpretazione del processo di insegnamento-apprendimento della matematica. Date le domande di ricerca, chiarite nel paragrafo 5.4 del capitolo 1, dobbiamo verificare la coerenza delle definizioni che abbiamo proposto (metafora, analogia, ostacolo e misconcezione) con il quadro teorico che adottiamo. Infine mostriamo come la metafora possa essere interpretata nel modello proposto da Bartolini Bussi e Mariotti.

2.1 Prospettiva socio-culturale e costruttivismo

L'apprendimento può essere inquadrato come un processo nel quale gioca un ruolo sia chi apprende, ad esempio lo studente, sia l'ambiente nel quale si trova, interagisce con altri individui, e che gli offre stimoli, obiettivi e gli oppone vincoli. A seconda dell'importanza attribuita a questi due diversi elementi ci si può spostare fra due poli opposti, almeno in linea di principio, che sintetizziamo provocatoriamente in questa maniera:

- Nell'apprendimento ciò che conta è solo l'individuo e la propria costruzione interna di conoscenze mentre interagisce con l'ambiente per adattarvisi;

- Nell'apprendimento ciò che conta è solo l'ambiente e l'interazione con esso (e con gli altri individui che ne fanno parte), le condizioni socio-culturali nelle quali si trova l'individuo e la loro storia. Le conoscenze dell'individuo derivano direttamente da queste condizioni esterne.

Chi propende o attribuisce maggiore importanza all'individuo come attore del proprio apprendimento adotta una *prospettiva costruttivista*, chi invece attribuisce maggiore importanza all'ambiente socio-culturale adotta una *prospettiva socio-culturale*.

I principi di base della prospettiva costruttivista, in didattica della matematica, possono essere così sintetizzati, come propone Radford (Radford, 2008b):

p1: la conoscenza non viene ricevuta passivamente ma costruita dal soggetto;

p2: la funzione della cognizione è adattiva e serve all'organizzazione del mondo esperienziale, non alla scoperta di realtà ontologiche (von Glaserfeld, 1985);

p3: il soggetto che conosce non solo costruisce le propria conoscenza, ma lo fa in maniera autonoma. (Cobb, 1988).

Nella prospettiva socio-culturale l'autonomia di chi apprende non è un prerequisito per l'apprendimento. Per quanto riguarda la didattica della matematica, in questa prospettiva, seguendo ancora Radford (Radford, 2008b), si possono individuare i seguenti principi:

p1: la conoscenza è storicamente generata durante il corso delle attività matematiche degli individui;

p2: la produzione di conoscenze non risponde ad un criterio adattivo ma è inclusa in forme culturali di pensiero che sono legate ad una realtà materiale e simbolica che fornisce le basi per l'interpretazione, la comprensione e la trasformazione del mondo degli individui e dei concetti e delle idee che gli individui si formano a proposito di tale mondo;

p3: l'apprendimento è il raggiungimento di una parte di conoscenza culturalmente-oggettiva, che gli studenti ottengono, tramite un processo sociale di *oggettificazione* mediata da segni, linguaggio, artefatti ed interazioni sociali, dal momento che partecipano a forme culturali di riflessione ed azione.

Il problema della dialettica fra le due prospettive può essere posto in termini diversi come fa Cobb il quale scrive: " *C'è attualmente una diatriba sia sul fatto che la mente sia localizzata nella testa oppure nell'individuo che agisce socialmente, sia sul fatto che l'apprendimento matematico sia principalmente un processo di riorganizzazione cognitiva attiva oppure un processo inculturazione in una comunità di pratiche (Minick, 1989).*" (Cobb, 1994, p.13). Generalmente chi aderisce al costruttivismo ha fra i propri riferimenti teorici il lavoro di Piaget (Piaget, 1970), mentre chi aderisce alla prospettiva socio-culturale può fare riferimento al lavoro di Vygotskij (Vygotskij, 1978, 1990, 1974) ed ai suoi collaboratori Leont'ev (Leont'ev, 1981) e Lurija (Lurija, 1971). Tuttavia, sia Piaget che Vygotskij non aderivano pienamente a nessuna delle due posizioni estreme sopra indicate anche se ponevano maggiore attenzione ad alcuni aspetti. Ad esempio Rogoff scrive a proposito di Piaget: "*Anche se le sue teorie avevano messo in luce come i progressi cognitivi degli individui implichino processi di adattamento all'ambiente (compreso quello sociale), i suoi sforzi erano indirizzati principalmente ad analizzare in che modo l'individuo comprenda il senso di un mondo 'generico' sconosciuto: caratteristica, questa, comune a tutte le specie.*" (Rogoff, 1990, p. 2), "*Anche se il pensiero di Piaget non è stato facile da comprendere per i ricercatori americani, giunti ad ipotizzare erroneamente che prendesse in considerazione solo l'individuo, trascurando completamente l'ambiente, va riconosciuto che l'attenzione era prevalentemente rivolta all'individuo più che agli aspetti del mondo che il bambino si sforza di comprendere, o ai modi in cui la società contribuisce allo sviluppo individuale.*" (Rogoff, 1990, p. 3). Scrive Piaget: " *La vita sociale è una condizione necessaria per lo sviluppo della logica. Inoltre crediamo che la vita sociale trasformi la natura dell'individuo.*" (Piaget, 1928,p.259; Rogoff, 1990). Per Vygotskij è invece centrale, nel processo di apprendimento, l'attività socio-culturale che prevede la partecipazione attiva delle persone alle pratiche socialmente costituite, in questa prospettiva "*l'unità elementare di analisi non è più l'individuo (con le sue proprietà) ma l'attività socio-culturale*" (Rogoff, 1990, p. 14). Per chiarire questa idea possiamo utilizzare una metafora che propone lo stesso Vygotskij chiarendo che tale unità di analisi: "..*pur nella differenza degli elementi, possiede le proprietà fondamentali proprie dell'insieme, e che sono parti viventi, non decomponibili ulteriormente, di questa unità globale. Non la formula chimica dell'acqua, ma lo studio delle molecole e del movimento molecolare è la chiave della spiegazione delle proprietà singole dell'acqua. Così come la cellula vivente, che conserva tutte le proprietà fondamentali della vita, è la vera unità di analisi biologica.*" (Vygotskij, 1990, p.13).

Tuttavia Vygotskij non trascura il ruolo attivo dell'individuo nell'attività di insegnamento-apprendimento, infatti scrive: " *La passività dell'alunno rappresenta la maggior pecca da un punto di vista scientifico, dal momento che essa si basa sul principio erroneo secondo cui l'insegnante è tutto e l'alunno non è nulla.*"citato in (Bozhovic, Slavina, 1972, p.156; Dixon-Krauss, 1996).

Possiamo sintetizzare con le parole di Rogoff, che scrive: " *In pratica, se si può affermare che tanto Piaget quanto Vygotskij hanno preso in esame i processi sociali e naturali dello sviluppo, occorre precisare che Piaget si è concentrato sull'individuo, che talvolta interagisce con altri in relazione a problemi logici di origine sociale, mentre Vygotskij ha posto l'accento sulla partecipazione dei bambini con altre persone all'interno di un ordine sociale.*" (Rogoff, 1990, p.41).

Cobb (Cobb, 1994) ha sostenuto come entrambe le prospettive, se concepite in maniera da escludersi a vicenda, generano problemi di coerenza al proprio interno. Dal punto di vista costruttivista, infatti, la prospettiva socio-culturale non chiarisce in che modo e con quali meccanismi la cultura esterna venga fatta propria (*internalizzazione*) da chi sta apprendendo. La stessa Rogoff, che adotta una prospettiva Vygotskiana, mette in evidenza tale problema quando scrive, relativamente all'appropriazione individuale del pensiero condiviso: " *Il lavoro sull'apprendimento sociale e sulla socializzazione sembra concepire l'interiorizzazione come un processo tramite il quale gli individui, separati l'uno dall'altro, imparano una lezione dall'osservazione o dalla partecipazione e quindi la interiorizzano, in modo da farla diventare parte del proprio repertorio di abilità. Ci si domanda se la lezione venga interiorizzata senza essere modificata o se, invece, esca trasformata dal processo, e si discute sul tipo di modello o di rinforzo necessario per far sì che i bambini interiorizzino i modelli esterni. Ma il presupposto di base, in questo caso, è che la lezione esterna penetri, attraverso una barriera, nella mente del bambino. In che modo questo avvenga non è chiaro, il che rappresenta un problema serio relativamente a questi approcci.*" (Rogoff, 1990, p.229). Questa autrice propone una possibile soluzione a questo problema, che descriviamo usando ancora le sue parole: " *Tuttavia, la questione del processo di interiorizzazione può porsi solo se viene data priorità al funzionamento interno o individuale, in modo che l'interno abbia la responsabilità di far passare qualcosa attraverso una barriera. Se, come suggerisco, gli individui si appropriano di alcuni aspetti dell'attività in cui sono già coinvolti come partecipanti e come osservatori attivi, con gli aspetti interpersonali del loro funzionamento integrati agli aspetti individuali, allora quello che viene sperimentato nell'interazione sociale non si trova mai al di là di una barriera e non occorre prevedere un processo di interiorizzazione separato*." (Rogoff, 1990, p.230).

Riferendosi a tali idee della Rogoff, Cobb scrive: "*Sembra quindi ragionevole concludere, da come Rogoff ha trattato l'interiorizzazione, che l'apprendimento matematico sia un processo di costruzione attiva che accade quando i bambini sono impegnati in pratiche matematiche in classe, spesso mentre interagiscono fra di loro*" (Cobb, 1994, p.16). Quindi Cobb propone una complementarità (parla di *coordinazione*) fra le due prospettive e suggerisce che la prospettiva socio-culturale origina teorie relative alle *condizioni per la possibilità dell'apprendimento,* mentre le teorie che sorgono dalla prospettiva costruttivista si focalizzano sia *su cosa gli studenti apprendono* che *sui processi con i quali apprendono*.

Sono state proposte diverse teorie che si muovono fra i due poli del costruttivismo e della prospettiva socio-culturale. Si può distinguere fra *costruttivismo* e *costruttivismo radicale* (Confrey, 1994, p.3; von Glaserfeld, 1984). Ciò che distingue il costruttivismo radicale dal costruttivismo è il fatto che in nel primo il senso che l'individuo crea del mondo che lo circonda e con il quale interagisce, deriva da un suo adattamento, ma da tale senso non si può trarre alcuna conclusione relativa alla realtà in sé. Si parla di *socio costruttivismo* (Confrey, 1995a, p.41; Voigt, 1992; Cobb, Wood, Yackel, 1991; Bauersfeld, 1988), o in certi casi anche di *interazionismo* (Radford, 2008b), nel quale vengono analizzate in maniera approfondita le interazioni fra individui nella costruzione di significati (anche matematici) ma non si propone una analisi altrettanto approfondita di come tali interazioni siano legate al contesto socio-culturale nel quale gli individui vivono. Si parla anche di *socio costruzionismo* (Confrey, 1995a, p.43; Gergen, 1995; Shotter, 1995), nel quale si accetta la visione vygotskiana ma se ne rigetta la dimensione psicologica concentrandosi sulla dimensione dello scambio e negoziazione sociale di significati. Vianna e Stetsenko (Vianna, Stetsenko, 2006) propongono un confronto fra gli approcci costruttivisti Piagetiani e Vygotskiani che mette in luce sia gli aspetti che conddividono che quelli che li differenziano. In particolare fra gli elementi comuni a questi approcci mettono in evidenza che:

- entrambi gli approcci pongono *l'azione umana* a fondamento della loro analisi;

- entrambi gli approcci prendono in considerazione la *dimensione socio-culturale e relazionale* dello sviluppo umano;

- entrambi gli approcci considerano che l'apprendimento dei bambini avviene tramite il loro agire sull'ambiente.

Tuttavia nei due approcci i concetti di azione e di ambiente, così come la maniera in cui si concettualizza l'evoluzione delle azioni, differiscono profondamente, e questo deriva da una diversa concezione della cultura, della storia, delle pratiche sociali e degli strumenti, e, fondamentalmente, di cosa e chi si sviluppi durante lo sviluppo umano. Le radici di queste differenze vengono individuate nel differente modo di concepire lo sviluppo umano, che per Piaget è fondato sulla biologia e sull'evoluzionismo darwiniano, per Vygotskij è fondato sull'idea marxista dell'uomo che trasforma il mondo in cui vive e non solo vi si adatta. Per Piaget lo sviluppo umano deriva dal suo *adattamento* all'ambiente, per Vygotskij nello sviluppo dell'individuo va considerata anche la capacità di *trasformazione* che la collettività degli individui può operare sull'ambiente in cui vive, e quindi sulla cultura nella quale si trova a vivere l'individuo, la quale ne determina lo sviluppo. Un altro aspetto che differenzia i due approcci, legato a quanto detto, è il differente valore dato all'eredità storica per lo sviluppo umano, che nell'approccio Piagetiano è assente mentre in quello Vygotskiano è cruciale. Vianna e Stetsenko sintetizzano dicendo che mentre per Piaget chi si sviluppa è l'individuo che agisce nell'ambiente, secondo molti dei moderni approcci vygotskiani chi si sviluppa è la comunità con i suoi modelli di partecipazione. Nell'educazione questa differenza si può manifestare nella diversa importanza che può venire data ad alcuni *strumenti culturali* che sono ereditati dalla storia. Vianna e Stetsenko puntano sull'importanza di sviluppare adeguati strumenti culturali per favorire lo sviluppo, strumenti culturali che sono intesi come strumenti che incorporano particolari pratiche culturali, modelli cristallizzati di azioni, rappresentazioni schematizzate di certi modi di fare le cose che sono stati scoperti nella storia collaborativa dell'umanità (Vianna, Stetsenko, 2006, p.97).

2.2 La prospettiva socio-culturale: il pensiero di Vygotskij

Vygotskij nelle sue ricerche sullo sviluppo intellettivo e l'apprendimento dei bambini ha introdotto alcune idee che hanno contribuito a chiarire come il processo di insegnamento-apprendimento sia da intendere come un processo di interazione sociale e non soltanto individuale e come l'uso dei segni rivesta un ruolo cruciale. "*La teoria di Vygotskij si basa sul presupposto che lo sviluppo intellettivo dell'individuo non possa essere compreso senza riferimenti al contesto sociale in cui è inserito. Per Vygotskij, lo sviluppo cognitivo del bambino non solo avviene con il supporto sociale dell'interazione con gli altri, ma comprende anche lo sviluppo di abilità attraverso l'utilizzo di strumenti frutto di un contesto storico-sociale che mediano l'attività intellettiva. Questo tipo di sviluppo individuale dei processi mentali superiori non può essere compreso senza considerare sia le radici sociali degli strumenti di pensiero che i bambini stanno imparando ad usare sia le interazioni sociali che li guidano nell'utilizzo di tali strumenti.*" (Rogoff, 1990, p. 40).

Fra gli strumenti che Vygotskij considera, oltre agli strumenti fisici, ci sono i segni che giocano un ruolo fondamentale nella *mediazione semiotica*. Egli pensava che l'ambito più adatto per analizzare lo sviluppo del pensiero del bambino fosse il contesto di insegnamento nelle scuole (Moll, 1990) ed attribuiva un ruolo fondamentale all'esperto come guida per lo studente che apprende. In particolare Vygotskij ha introdotto alcune idee e concetti specifici che hanno una diretta conseguenza nel modo di inquadrare il processo di insegnamento-apprendimento, in particolare: *mediazione semiotica, interiorizzazione, discorso interno, zona di sviluppo prossimale, relazione fra concetti spontanei e scientifici* (Dixon-Krauss, 1996; Rogoff, 1990).

I segni e la loro funzione nel processo di sviluppo cognitivo: la mediazione semiotica

Un aspetto che caratterizza il pensiero di Vygotskij è l'importanza attribuita ai segni, che svolgono due diverse funzioni:

- Sono strumenti per comunicare e condividere significati culturali;
- Sono strumenti che influenzano lo sviluppo cognitivo del bambino.

Vygotskij vede una analogia fra l'invenzione ed uso dei segni ad uso psicologico da un lato e l'invenzione ed uso di artefatti nell'ambito lavorativo o pratico (Vygotskij, 1978, p.83). Tale analogia è basata sulla funzione *mediatrice* che è propria sia dei segni che degli artefatti. La differenza principale consiste nel fatto che per quanto riguarda gli strumenti (artefatti) la loro funzione è orientata *esternamente* mentre l'uso dei segni ha una funzione che è orientata *internamente*. Vygotskij distingueva fra il *comportamento mentale naturale inferiore*, che ci accomuna agli altri animali in funzioni come la percezione elementare, la memoria e l'attenzione, e il *comportamento mentale culturale superiore*, che si manifesta in funzioni come la memoria logica, l'attenzione selettiva, il comportamento decisionale e la comprensione del linguaggio. Tali attività superiori, secondo Vygotskij, sono raggiunte dalla specie umana attraverso attività sociali mediate dai segni (Dixon-Krauss, 1996). Tale attività mediata (tramite segni o artefatti) gioca un ruolo fondamentale nella trasformazione delle attività mentali dell'uomo e nella identificazione delle *funzioni psichiche superiori*, scrive infatti: " *L'uso di mezzi artificiali, la transizione all'attività mediata, trasforma fondamentalmente tutte le operazioni mentali proprio come l'uso di strumenti* *allarga illimitatamente l'area di attività all'interno della quale potrebbero operare nuove funzioni psichiche. In questo contesto, possiamo usare il termine funzione psichica superiore, o comportamento superiore, se ci riferiamo alla combinazione di strumento e segno nell'attività psicologica.*" (Vygotskij, 1978, p.86). Inoltre, per Vygotskij, la complessità del comportamento umano adulto viene raggiunta grazie all'uso dei segni, egli scrive infatti: "*Sebbene l'intelligenza pratica e l'uso di segni possano operare indipendenti l'una dall'altro nei bambini piccoli, l'unità dialettica di questi sistemi è nell'adulto l'essenza stessa del complesso comportamento umano.*" (Vygotskij, 1978, p.42). Vygotskij propone che l'uso di segni come strumento psicologico sia il risultato di condizioni specifiche dello sviluppo sociale (Vygotskij, 1978, p.63).

Attraverso l'uso di segni le forme naturali di comportamento vengono trasformate in forme di comportamento superiore, tale processo viene definito da Vygotskij *mediazione semiotica*.

Funzioni cognitive superiori e loro interiorizzazione

Vygotskij ha sostenuto che le funzioni cognitive superiori compaiono prima a livello sociale e successivamente vengono trasformate dall'individuo fino ad essere interiorizzate (Vygotskij,1978, p.81, 86; 1990, p.60). Scrive: " *Ogni funzione nello sviluppo culturale del bambino si presenta due volte: prima a livello sociale e in seguito sul piano individuale; prima tra le persone (interpsichica) poi dentro il bambino (intrapsichica). Questo vale allo stesso modo per l'attenzione volontaria, per la memoria logica e per la formazione dei concreti. Siamo nel pieno diritto di considerare questa assunzione come una vera e propria legge, ma s'intende che il passaggio dall'esterso all'interno trasforma il processo stesso, ne muta la struttura e le funzioni. Dietro a tutte le funzioni superiori e ai loro rapporti stanno geneticamente delle relazioni sociali, relazioni reali tra uomini. Ne segue che uno dei principi fondamentali della nostra volontà è la divisione delle funzioni tra gli uomini, una nuova suddivisione binaria di ciò che ora è fuso insieme, il dispiegarsi, sperimentale, del processo psichico superiore nel dramma che ha luogo tra gli uomini.*" (Vygotskij,1978, p.88). Tale fatto viene definito *legge genetica dello sviluppo culturale.* Per Vygotkij le funzioni psichiche superiori vengono sviluppate socialmente e la loro origine deve essere cercata nell'interazione sociale e nella storia. Il progressivo trasferimento dall'attività sociale esterna al controllo interno da parte dell'individuo, tramite la mediazione dei segni, viene definito da Vygotskij *interiorizzazione* (Vygotskij,1978, p.86). Abbiamo già visto nel paragrafo precedente alcuni problemi relativi all'interiorizzazione e l'interpretazione che è stata proposta da Rogoff e Cobb. Il processo esterno di interiorizzazione è, per Vygotskij, un processo sociale, e tale processo è diretto da processi semiotici. (Vygotskij, 1974).

La zona di sviluppo prossimale

Un altro concetto introdotto da Vygotskij è quello di *zona di sviluppo prossimale,* così definita: " *E' la distanza tra il livello effettivo di sviluppo così come è determinato da problem-solving autonomo e il livello di sviluppo potenziale così come è determinato attraverso il problem-solving sotto la guida di un adulto o in collaborazione con i propri pari più capaci.*" (Vygotskij,1978, p.127). L'importanza si tale concetto è anche relativa al problema valutazione del livello di sviluppo mentale, nelle parole di Vygotskij: " *Per un decennio, perfino i pensatori più profondi non misero in dubbio tale assunto; non carezzarono mai l'idea che ciò che i bambini possono fare con l'assistenza di altri potrebbe essere in un certo senso ancora più indicativo del loro sviluppo* *mentale di quel che sanno fare da soli..La zona di sviluppo prossimale definisce quelle funzioni che non sono ancora mature ma che sono nel processo di maturazione, funzioni che matureranno domani ma sono al momento in uno stato embrionale. Queste funzioni potrebbero essere chiamate 'boccioli' o i 'fiori' dello sviluppo piuttosto che i 'frutti' dello sviluppo.*" (Vygotskij,1978, p.126-128). Rogoff descrive alcune delle caratteristiche della zona di sviluppo prossimale con queste parole: "*Cole (Cole, 1985) afferma che, nella zona di sviluppo prossimale, cultura e cognizione si creano a vicenda... La cultura stessa non è statica, ma è determinata dagli sforzi delle persone che lavorano assieme, usano e adattano gli strumenti forniti dai predecessori e, nel corso di questo processo, ne creano di nuovi. Le interazioni nella zona di sviluppo prossimale sono il punto centrale dello sviluppo e della cultura, nel senso che permettono ai bambini di partecipare ad attività cui non potrebbero avvicinarsi da soli, utilizzando strumenti culturali che devono comunque essere adattati alle specifiche attività pratiche e, in questo modo, possono essere sia trasmessi ai nuovi membri della cultura sia da loro trasformati.* " (Rogoff, 1990, p.15).

Il discorso interno

Secondo Vygotskij il pensiero ed il linguaggio si sviluppano, fino ad un certo punto, lungo linee diverse. Quando avviene la convergenza delle due linee (verso i 12-15 mesi) il bambino comincia ad utilizzare il linguaggio per nominare gli oggetti o le persone che gli stanno attorno ed il processo continua fino a quando la parola inizia ad essere al servizio dell'intelletto. Scrive Vygotskij: "*Sebbene l'intelligenza pratica e l'uso di segni possano operare indipendenti l'una dall'altro nei bambini piccoli, l'unità dialettica di questi sistemi è nell'adulto l'essenza stessa del complesso comportamento umano. La nostra analisi attribuisce all'attività simbolica una funzione organizzativa specifica che si inserisce nel processo dell'uso di strumenti e che produce forme di comportamento fondamentalmente nuove.. Il momento più significativo nel corso dello sviluppo intellettuale, che dà vita a forme puramente umane dell'intelligenza pratica e astratta, avviene quando linguaggio e attività pratica, due linee di sviluppo che precedentemente erano del tutto indipendenti, convergono.*" (Vygotskij, 1978, p.43).

Secondo Vygotskij la prima forma di uso della parola è sociale, come discorso *esterno*, finalizzato alla relazione con gli altri e non ha ancora una funzione *interna* come forma di pensiero. La fase che precede l'uso interno della parola è la fase del linguaggio egocentrico, in seguito il bambino sviluppa una funzione del linguaggio come *discorso interno* che ha una natura intellettiva. Da questo punto in poi il linguaggio, oltre alla funzione di discorso esterno sociale, assume anche quella intellettiva e diventa il più importante strumento psicologico del bambino per la strutturazione del pensiero. (Vygotskij, 1978, p.46; Dixon-Krauss, 1996).

Concetti spontanei e concetti scientifici

Vygotskij riteneva che tutte le funzioni psichiche superiori fossero processi mediati, nei quali l'uso del segno aveva un ruolo fondamentale. Anche per quanto riguarda la formazione di concetti pensava che: "*Nel problema che ci interessa della formazione dei concetti tale segno è la parola, che svolge il ruolo di mezzo di formazione dei concetti e diviene, più tardi il loro simbolo.*" (Vygotskij, 1990, p.137). Proponeva una sorta di evoluzione suddivisa in quattro livelli (Dixon-Krauss, 1996; Vygotskij, 1990):

- *Cumuli*: categorie formate in maniera casuale;

- *Complessi*: categorie formate tramite relazioni concrete e fattuali fra oggetti;
- *Concetti potenziali:* concetti concreti e spontanei in transizione verso concetti astratti e scientifici;
- *Concetti veri e propri (scientifici):* concetti astratti e sistematizzati e comuni ai membri di una cultura.

I cumuli ed i complessi formano quelli che Vygotskij definisce *concetti spontanei*, questi sono una forma di conoscenza che il bambino acquisisce tramite esperienze e concrete nella vita di tutti i giorni. I *concetti scientifici* sono invece una forma di conoscenza astratta e sistematizzata che sono stati formati e sono condivisi dai membri di una cultura. Vygotskij attribuiva all'educazione formale il compito di trasformare in *concetti scientifici* i *concetti spontanei*.

Da questi elementi deriva l'importanza data da Vygotskij della partecipazione ad attività culturali sotto la guida individui più esperti. E' interessante quello che pensava Vygotskij relativamente all'insegnamento dei concetti: "*L'esperienza pedagogica ci insegna, non meno della ricerca teorica che l'insegnamento di concetti è di fatto sempre praticamente impossibile e pedagogicamente infruttuoso..In questi casi il bambino non assimila i concetti, ma parole, acquista più per memoria che per pensiero e risulta impotente di fronte ad ogni tentativo di impiegare sensatamente la conoscenza assimilata.*" (Vygotskij, 1990, p.205), " *Ciò che ci interessa qui è l'idea del tutto vera che la strada che va dal primo incontro con il nuovo concetto al momento in cui la parola e il concetto divengono proprietà del bambino è un processo psichico interno complesso, che implica in sé la comprensione progressiva della nuova parola a partire da una rappresentazione confusa, il suo impiego da parte del bambino e solo alla fine della catena la sua reale assimilazione.*" (Vygotskij, 1990, p.207), "*Per questa ipotesi, ci fondiamo sulla semplice considerazione, sviluppata sopra, che i concetti scientifici non sono assimilati e non sono appresi dal bambino, non sono imparati a memoria, ma nascono e si formano per la grandissima tensione di tutta l'attività del suo pensiero.*" (Vygotskij, 1990, p.215).

I concetti spontanei e quelli scientifici si influenzano a vicenda: "*Lo sviluppo dei concetti spontanei e quello dei concetti scientifici, dobbiamo presumerlo, sono processi strettamente legati, che esercitano uno sull'altro un'influenza costante.*" (Vygotskij, 1990, p.216).

Quindi, secondo la prospettiva Vygotskiana, il bambino apprende la parola usandola e deve usare un concetto prima di poter esercitare su di esso un controllo volontario e prima di conoscerlo come concetto scientifico pienamente sviluppato (Dixon-Krauss, 1996).

2.3 La Teoria della Mediazione Semiotica

Come abbiamo annunciato, questa ricerca adotta una prospettiva socio-culturale per l'interpretazione del processo di insegnamento-apprendimento, in particolare la *Teoria della mediazione semiotica* come quadro teorico di riferimento. Come afferma Radford (Radford, 2008a, 2008b), Bartolini Bussi ha introdotto, assieme a Lerman, l'approccio socio-culturale nell'ambito della didattica della matematica (Bartolini Bussi, 1998; Lerman, 1996). I lavori da parte di Bartolini Bussi e collaboratori, sia sperimentali che di ricerca teorica, sono stati sviluppati a partire dagli anni '80, ed hanno raggiunto una sistemazione organica in un lavoro del 2008 (Bartolini Bussi, Mariotti, 2008), nel quale Bartolini Bussi e Mariotti presentano il quadro teorico ed i concetti nei quali si articola la teoria, che si presenta come uno strumento per analizzare il processo di insegnamento-apprendimento della matematica in una prospettiva vygotskijana.

Tale lavoro, come scrivono le stesse autrici (Bartolini Bussi, Mariotti, 2010), si delineava come *programma di ricerca* sulla mediazione semiotica.

Una delle ragioni per la formulazione di un modello differente da quelli che erano già presenti nell'ambito della ricerca in didattica della matematica era che, in questi, il ruolo dell'insegnante non era sufficientemente analizzato, le diverse impostazioni erano di carattere costruttivista e si focalizzavano prevalentemente sull'interazione fra gli studenti. Il problema è rilevante per l'analisi equilibrata del processo di insegnamento-apprendimento, come scrivono le autrici: "*Questi esempi..sono accomunati dalla concezione della discussione come uno strumento per costruire, attraverso la negoziazione nella classe, domini di consenso nei quali possa avvenire la comunicazione su un argomento matematico. Ma riteniamo davvero che i concetti scientifici siano oggetto di negoziazione? Che gli allievi in una situazione ricca e stimolante possano ricostruire da soli la quantità e varietà di strumenti matematici messi a punto dall'umanità nel corso dei secoli e sotto la spinta di pressioni di tipo sociale, ideologico, filosofico, economico, estetico, ecc..La presenza di una guida appare necessaria. Ma nella ricerca didattica, l'enfasi sulla responsabilità dell'allievo nell'apprendere non è bilanciata dall'attenzione per la responsabilità dell'insegnante nell'insegnare.*" (Bartolini Bussi et al, 1995, p.5).

Per questo alcuni dei lavori iniziali sono stati sviluppati per cercare una definizione di *discussione matematica* che "*si distaccasse dalle caratterizzazioni costruttiviste in cui l'insegnante aveva il solo compito di costruire un contesto favorevole all'interazione fra pari*." (Bartolini Bussi, Mariotti, 2010, p.2), in particolare dalla definizione, che era stata proposta da Pirie e Schwarzenberger (Pirie, Schwarzenberger, 1988; Bartolini Bussi et al, 1995), di discussione matematica come: "*Discorso mirato su un argomento di matematica in cui ci sono contributi originali degli allievi ed interazione*". L'interazione insegnante-studenti viene successivamente teorizzata come una vera e propria interazione di *insegnamento-apprendimento* con l'adozione di un quadro teorico di tipo vygotskiano, nel quale l'esperto (insegnante o pari più capace) ha un ruolo attivo di guida. Quindi l'accento non è più posto solo sull'apprendimento ma anche sull'insegnamento. L'adozione di un quadro teorico Vygotskiano è coerente con questi aspetti, per almeno due ragioni:

- Il ruolo fondamentale che Vygotskij assegna all'esperto come guida dell'allievo nella *zona di sviluppo prossimale*;
- L'importanza del processo di *interiorizzazione* nel quale si interiorizzano anche diversi ruoli: la funzione di guida ha inizialmente una funzione sociale, successivamente viene interiorizzata dall'allievo come propria funzione sul piano mentale.

Traendo ispirazione da Bakhtin (Bakhtin, 1979, 1988), viene introdotta nell'analisi del processo di insegnamento-apprendimento, l'idea di *voce* come "*forma di discorso e di pensiero che rappresenta il punto di vista di un soggetto, il suo orizzonte concettuale, il suo intento e la sua visione del mondo.*" (Bartolini Bussi, 1991; Bartolini Bussi, Mariotti, 2010, p.3). Come scrivono: "*L'idea di* *voce sembrava catturare l'essenziale dell'interazione, a cui ciascun interlocutore porta una prospettiva (la sua 'voce' appunto) che entra a costituire il significato socialmente condiviso attraverso il processo di interiorizzazione.*" (Bartolini Bussi, Mariotti, 2010, p.3)

Fra le voci che possono essere presenti durante il processo di insegnamento-apprendimento si può considerare la voce della cultura matematica istituzionale della quale è portatore l'insegnante. Altre possibili voci, oltre a quelle portate dagli studenti sono quelle dei testi matematici (ad esempio brani tratti da testi storici, ecc..). "*Una voce rappresenta l'appartenenza ad una particolare categoria sociale e culturale ed è quindi ricollegabile ad un ruolo del dramma, metaforicamente richiamato nella legge genetica di Vygotskij.*" (Bartolini Bussi et al, 1995, p.7). Affinché le diverse voci compaiano è importante che venga dato un tempo sufficiente e la possibilità di esprimersi e "*Questa indicazione è in contrasto con ciò che avviene nelle situazioni tradizionali di classe controllate fortemente dall'insegnante, nelle quali ogni voce divergente rispetto a quella prescelta dall'insegnante è valutata immediatamente come non pertinente o perfino sbagliata: anche se in certi casi più interlocutori intervengono 'fisicamente' ciò che è salvato nel flusso del discorso è il monologo dell'insegnante e di tutti gli interlocutori che offrono contributi di sostegno rispetto ad esso.*" (Bartolini Bussi et al, 1995, p.7). L'idea di passare da una forma di discussione sostanzialmente monologica ad una forma dialogica sta alla base della definizione di *Discussione Matematica* proposta da Bartolini Bussi (Bartolini Bussi, 1996), che viene data come:

"*Polifonia di voci articolate su un oggetto matematico (concetto, problema, procedura,..) che costituisce il motivo dell'attività di insegnamento-apprendimento.*"

Nell'articolo si scrive che: "*La definizione vuole veicolare in modo sintetico alcune opzioni fondamentali che la differenziano dalla definizione costruttivista:*

- *Il riferimento ad attività di lungo termine (motivo);*
- *Il tempo lungo necessario all'articolazione delle voci (che l'insegnante non deve ricondurre troppo velocemente all'obiettivo);*
- *La presenza (polifonia) di voci diverse, tra cui la voce della cultura matematica, portata dall'insegnante;*
- *La valorizzazione di voci imitanti (come nel contrappunto);*
- *La non necessità di una comunità fisica di parlanti, per ammettere anche il dialogo fra sé e sé, il dialogo con un testo scritto.*"

Tale definizione può articolarsi in forme diverse di discussione (Bartolini Bussi et al. , 1995, p.8), fra le quali :

- Discussione matematica di tutta la classe orchestrata dall'insegnante;
- Dialogo di un insegnante con un allievo;
- Discussione di un piccolo gruppo di allievi;

- Interpretazione di un testo scritto;
- Discussione con se stessi (dialogo interiore).

Seguendo Leont'ev (Leont'ev, 1977) viene proposta una analisi a tre livelli delle attività di progettazione dell'insegnante (Bartolini Bussi, Mariotti, 2010, p.4), che deve:

- definire *motivi*: ovvero gli obiettivi a lungo termine delle attività di insegnamento-apprendimento;
- definire *scopi*: ovvero gli obiettivi delle singole discussioni;
- definire *operazioni*: ovvero le possibili strategie comunicative potenzialmente utilizzabili o utilizzate nel corso delle attività di insegnamento-apprendimento.

In particolare nella discussione matematica con l'intera classe, l'insegnante interviene ed *orchestra*, appunto, la discussione cercando di introdurre voci (la propria ma anche quella dei testi), stimolare e valorizzare la comparsa di nuove voci nella discussione.

Vengono introdotti alcuni costrutti relativi ai tipi di discussioni possibili (Bartolini et al., 1995), in particolare:

- *Discussione di soluzione*: il processo di tutta la classe nel quale si risolve un problema dato a parole con l'eventuale supporto di oggetti o immagini;
- *Discussione di bilancio*: quella che avviene dopo la soluzione individuale di problemi, e mira alla ricerca di strategie condivise;
- *Discussione di concettualizzazione*: quella che ha l'obiettivo di costruire significati condivisi, nella forma di prime definizioni di concetti (Bartolini Bussi, Mariotti, 2010, p.2);
- *Metadiscussione*: momento di definizione dei valori e degli atteggiamenti nei confronti del sapere matematico.

Alcuni esempi di tali discussioni si possono trovare in: (Bartolini Bussi, Boni, Ferri, Garuti, 1998) per la discussione di bilancio, (Bartolini Bussi, Boni, 2003) per la discussione matematica e la meta-discussione.

Fra le operazioni a disposizione dell'insegnante, ovvero fra le strategie comunicative, viene identificato e definito il *rispecchiamento* (Lumbelli, 1990a, 1990b; Bartolini Bussi et al., 1995). Come scrivono le autrici: "*Il rispecchiamento è un'alternativa efficace rispetto alla domanda diretta o al commento di valutazione di un intervento.*" (Bartolini Bussi, Mariotti, 2010, p.4). Alla luce delle ricerche in didattica, tale strategia si è rivelata più efficace rispetto a domande dirette e alle richieste di spiegazione, dato che queste ultime tendono a bloccare l'allievo (Bartolini Bussi et al, 1995, p.18). Vengono distinte diverse forme di rispecchiamento:

- *rispecchiamento semplice*: l'insegnante rilancia agli studenti senza cambiamenti e senza aggiunta di informazione;

- *rispecchiamento con aggiunta di informazione*: l'insegnante rilancia aggiungendo informazioni d'aiuto;

- *parafrasi*: l'insegnante rilancia generalizzando o particolarizzando.

Esempi tratti da sperimentazioni sono descritti in (Bartolini Bussi, 1998).

Coerentemente con la prospettiva vygotskiana adottata che considera fondamentale la funzione mediatrice dei segni per lo sviluppo del pensiero (*mediazione semiotica*), il linguaggio gioca un ruolo fondamentale come strumento di pensiero nel processo di insegnamento-apprendimento. Quindi fra le strategie basate sul linguaggio, o più in generale sull'uso di segni, che l'insegnante può utilizzare sono considerati (Bartolini Bussi et al. , 1995, p.20):

- la richiesta sistematica di verbalizzazioni da parte degli studenti relativamente alle proprie soluzioni;

- la proposta sistematica di discussioni;

- l'analisi retrospettiva dei protocolli di discussione guidata dall'insegnante;

- lettura guidata con interpretazione di testi selezionati dall'insegnante.

Inoltre l'insegnante, durante le discussioni, può:

- suggerire allo studente termini o locuzioni che lo aiutino ad esprimersi meglio;

- aiutare lo studente a prendere coscienza dei significati cristallizzati in alcuni termini ed espressioni.

Il Modello della mediazione semiotica per l'uso di artefatti

Stimolate dalla necessità di inquadrare teoricamente l'utilizzo didattico di particolari artefatti (abaco, riga e compasso, sistemi di ingranaggi, prospettografi, pantografi, curvigrafi), Bartolini Bussi e Mariotti introducono un modello ispirato al concetto di *mediazione semiotica* di Vygotskij. Bartolini Bussi e Mariotti scrivono: "*La prospettiva Vygostkiana, che include la dimensione evolutiva, interpreta la funzione degli artefatti cognitivi come elemento principale dell'apprendimento e, per tale ragione, sembra offrire un'adeguata cornice per studiare l'uso degli artefatti nel campo dell'educazione.*" (Bartolini Bussi, Mariotti, 2009). L'uso di artefatti come mediatori semiotici era stato già proposto in lavori precedenti (Bartolini Bussi, 1993). In un lavoro recente si propone questo modello anche per l'insegnamento della fisica (Bartolini Bussi, Corni, Mariani, Falcade, 2012). Nel modello l'artefatto utilizzato dall'insegnante (che può essere una macchina o un testo matematico) viene interpretato come strumento di mediazione semiotica. La consegna (task) ed il tipo di artefatto contribuiscono alla produzione si segni da parte degli studenti, che saranno *segni situati* che gli alunni, sotto la guida dell'insegnante, dovranno trasformare in *segni matematici*. Nel modello si considerano i seguenti elementi:

- l'alunno (o gli alunni);
- l'esperto (insegnante);
- un artefatto;
- una consegna;
- conoscenze matematiche legate o incorporate nell'artefatto.

In figura 1 è rappresentato lo schema proposto(Bartolini Bussi, Mariotti, 2008, 2009).

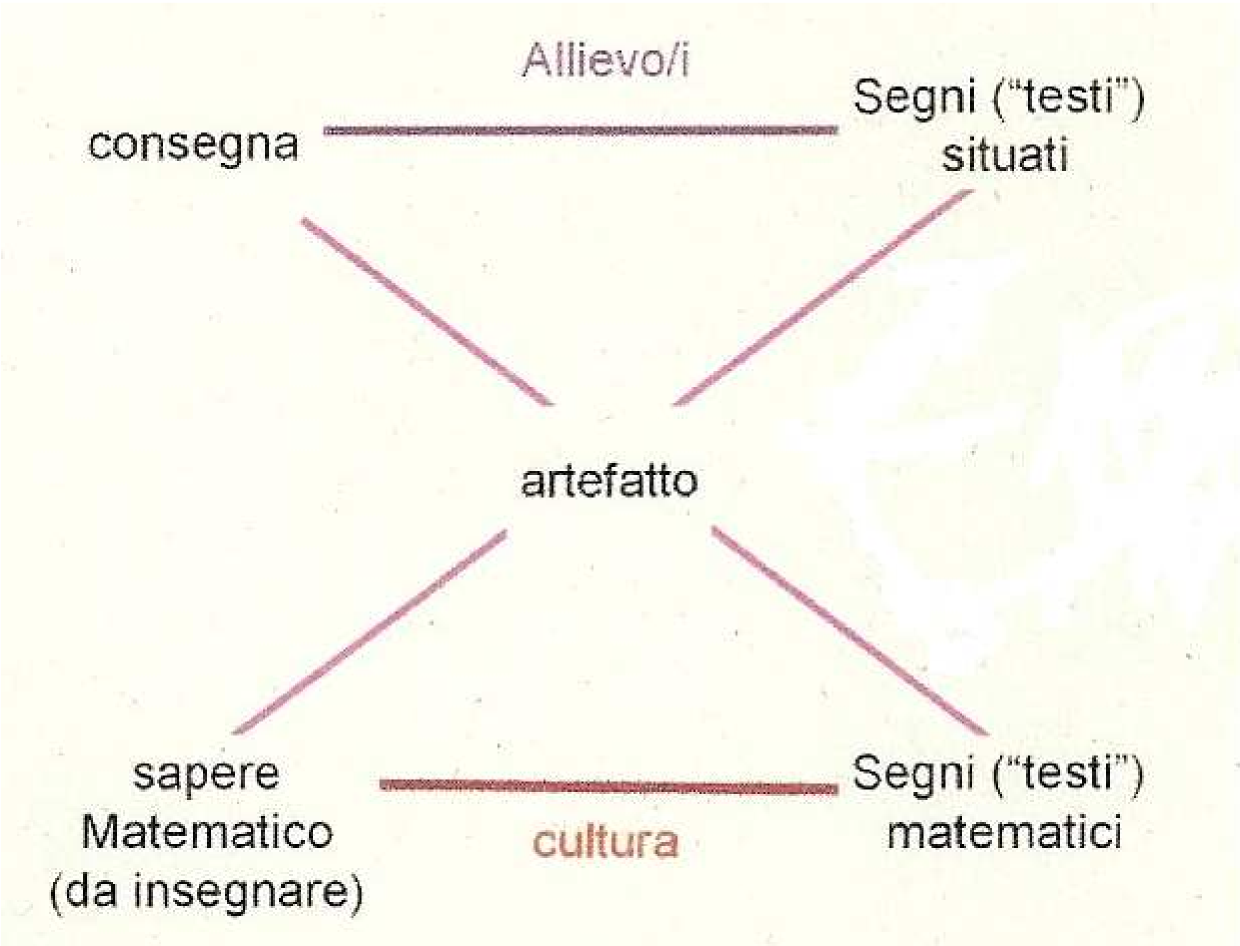


Figura 1

Chiariamo alcuni di questi elementi ed il modo in cui interagiscono secondo il modello vygotskiano proposto.

Gli artefatti, l'insegnante e la mediazione semiotica

Artefatti

"*L'idea di artefatto è molto generale e comprende diversi tipi di 'oggetti', prodotti dagli esseri umani nel corso dei secoli: suoni, gesti, utensili e strumenti, forme orali e scritte del linguaggio naturale, testi e libri, strumenti musicali, strumenti scientifici, strumenti informatici..Certamente il linguaggio in tutte le sue forme, orali e scritte, ha un ruolo centrale tra gli artefatti prodotti ed elaborati dagli esseri umani*" (Bartolini Bussi, Mariotti, 2009).

In questo modello vengono proposti punti di vista diversi sugli artefatti, ognuno dei quali contribuisce a definire il concetto di artefatto e a metterne in luce aspetti differenti. I riferimenti utilizzati per l'analisi di artefatti sono i lavori di Wartofsky, quelli di Rabardel e, naturalmente, Vygotskij. Wartofsky (Wartofsky, 1979; Bartolini Bussi, Maschietto, 2006, p.63) distingue fra:

- *artefatti primari*: sono gli artefatti che vengono utilizzato direttamente dagli individui, come strumenti, nella produzione dei mezzi di esistenza e nella riproduzione della specie;

- *artefatti secondari*: sono quelli usati nella conservazione e nella trasmissione delle abilità, dei modi di azione e della prassi acquisite e per mezzo dei quali è realizzata questa produzione. Gli artefatti secondari sono quindi rappresentazioni di questi modi d'azione ;

- *artefatti terziari*: questi costituiscono un mondo relativamente autonomo nel quale le regole, le convenzioni e i risultati non appaiono più direttamente pratici,

Un esempio di applicazione di tale distinzione ad attività di insegnamento-apprendimento della matematica è offerto da Bartolini Bussi, Boni, Ferri e Garuti, che in un lavoro sull'uso didattico degli ingranaggi, scrivono: " *Il caso degli ingranaggi illustra in modo evidente la differenza fra artefatti primari, secondari e terziari secondo Wartofsky (..) :*

- *artefatto primario: strumenti tecnico orientato verso l'esterno, direttamente usato per scopi intenzionali (ad esempio compasso, prospettografi, curvigrafi..)*
- *artefatto secondario: strumento psicologico orientato verso l'interno, usato per il mantenimento e nella trasmissione di specifiche competenze tecniche acquisite (ad esempio scritture, schemi, tecniche di calcolo, trattati d'suo..)*
- *artefatto terziario: sistema di regole formali che hanno perso l'aspetto pratico legato allo strumento (ad esempio le teorie matematiche).*

Come si vedrà anche meglio nel seguito, gli ingranaggi della vita quotidiana sono artefatti primari, le rappresentazioni di essi sono artefatti secondari, mentre le teorie sul loro funzionamento, che come vedremo divengono rapidamente decontestualizzate, sono artefatti terziari." (Bartolini Bussi, Boni, Ferri, Garuti, 1998, p. 34).

Bartolini Bussi e Maschietto scrivono: " *Esempi di artefatti terziari sono le teorie matematiche che organizzano i modelli matematici costruiti come artefatti secondari. Tali modelli sono potenzialmente espandibili fino a creare qualcosa di completamente nuovo, che mantiene solo deboli legami con l'attività pratica e rappresentativa. Appartengono a questi prodotti i significati e i processi matematici costruiti e i paradigmi scientifici ad essi collegati.*" (Bartolini Bussi, Maschietto, 2006, p. 64).

La distinzione fra artefatti primari, secondari e terziari è utile per distinguere la funzione di tali artefatti in una certa situazione e in un certo momento. Tuttavia tale distinzione non coglie gli aspetti dinamici che ci possono essere nell'evoluzione di artefatti, nelle interazioni che avvengono fra artefatto e soggetto che lo usa, che può modificare sia l'artefatto stesso che il soggetto (le sue strutture cognitive). Tale distinzione viene proposta da Rabardel il quale, occupandosi di ergonomia cognitiva, distingue l'*artefatto* dallo *strumento* (Rabardel, 1995, 1997); per questo autore lo strumento è composto da due componenti:

- *Componente Artefatto*: è l'oggetto *materiale* o *simbolico* di per sé, prodotto dal soggetto o da altri.

  Esempio: l'oggetto compasso è un artefatto;

- *Componente Schema*: sono gli *schemi d'uso* risultanti dalla costruzione propria del soggetto o dipendenti da schemi sociali d'uso già precedentemente formati.

  Esempio: l'uso del compasso per tracciare una circonferenza di dato centro e dato raggio è un possibile schema d'uso per il compasso.

Per Rabardel lo *Strumento* è l'entità composta dall'*Artefatto* e dagli *Schemi d'uso* dello stesso. Inoltre viene proposta il concetto di *genesi strumentale*, con la quale si intende il processo di cambiamento degli stessi strumenti che avviene proprio attraverso il loro uso e la loro re-interpretazione da parte dei soggetti che lo usano. In particolare il soggetto può utilizzare un dato artefatto con un nuovo schema d'uso che può modificare anche il tipo di uso che ne viene fatto, Rabardel parla di *catacresi* quando uno strumento viene usato al posto di un altro (ad esempio una chiave inglese usata come martello) oppure con un uso nuovo. Quindi c'è una evoluzione degli strumenti, sia nella loro componente *artefatto* che nella loro componente *schemi d'uso*, in particolare Rabardel distingue due modalità:

- *Strumentalizzazione*: è il cambiamento che viene diretto verso la componente artefatto, ovvero la trasformazione, tramite aggiunta, modifica, eliminazione, raggruppamento di funzioni dell'artefatto;

- *Strumentazione*: è il cambiamento rivolto al soggetto, ovvero agli schemi d'uso che possono essere applicati all'artefatto.

L'idea di genesi strumentale viene sfruttata da (Bartolini Bussi, Maschietto, 2006) per analizzare l'evoluzione storica di alcuni strumenti matematici, in particolare dei prospettografi, confrontando gli artefatti con i testi storici relativi all'uso di tali artefatti e alle proposte di modifiche che in essi comparivano. Bartolini Bussi e Maschietto scrivono: "*Il trattato di Barozzi-Danti può illustrare il ciclo d'insieme della concezione di artefatto, descritto da Rabardel: ' La concezione dell'artefatto continua durante l'uso[…]. Le operazioni sviluppate dagli utilizzatori sono poi incorporate nell'artefatto nella generazione successiva'. Il ciclo di Rabardel ci consente di introdurre un elemento dinamico nella concezione di Wartofsky. Gli artefatti primari non sono fissati una volta per tutte, ma possono essere modificati nel tempo, incorporando funzioni e modi operatori costruiti dagli utilizzatori.*" (Bartolini Bussi, Maschietto, 2006, p. 68).

Quindi il soggetto influisce sullo strumento, ma, secondo Rabardel, vale anche il contrario, scrive infatti: "*l'uso di uno strumento* non è *mai neutro*, al contrario esso da origine ad una *riorganizzazione delle strutture cognitive.*" (Rabardel, Samurçay, 2001). A questo punto possiamo riferirci alle idee di Vygotskij; come scrivono Bartolini Bussi e Maschietto: “ *Gli strumenti o i sistemi di segni hanno alcune caratteristiche fondamentali (Vygotskij, 1974):*

- *Sono il prodotto raffinato di un’attività sociale della specie umana (vedi il processo di strumentalizzazione descritto da Rabardel, Capitolo 4 paragrafo 3);*
- *Non si limitano ad agire sul mondo esterno ma inducono trasformazioni all’interno del soggetto che li utilizza (vedi il processo di strumentazione descritto da Rabardel, Capitolo 4 paragrafo 3);*
- *Incorporano (in modo spesso opaco) elementi importanti del sapere (nei casi che a noi interessano è il sapere matematico).* ” (Bartolini Bussi, Maschietto, 2006, p. 75).

Per Vygotskij c’è una analogia fra l’invenzione e l’utilizzo dei segni come mezzi ausiliari per la risoluzione di un problema dato e l’invenzione e l’utilizzo di utensili per il lavoro. Egli infatti distingueva fra (Vygotskij, 1978):

- *Artefatti:* che vengono usati nella *sfera pratica* per raggiungere scopi altrimenti non raggiungibili e sono orientati *verso l’esterno*;

- *Strumenti psicologici*: segni prodotti nei processi di interiorizzazione per supportare le attività mentali e sono orientati *verso l’interno*.

Vygotskij scriveva: “*L’invenzione e l’utilizzo dei segni come mezzi ausiliari per la risoluzione di un problema dato (ricordare, confrontare qualcosa, scegliere e così via), sono analoghe all’invenzione e all’utilizzo di strumenti sotto il profilo psicologico. I segni hanno funzione di strumento durante l’attività psicologica, analogamente al ruolo di un utensile nel lavoro.*” (Vygotskij, 1978, p.52).

Questa doppia natura degli artefatti, aspetto pragmatico ed aspetto riflessivo, è riconosciuta e studiata anche da Norman che parla di *artefatti cognitivi* (Norman, 1993, 1988). Questa differenza è presente anche nei segni: “ *L’uso dei segni nella soluzione di un compito possiede due importanti funzioni cognitive: il soggetto produce segni da un alto proprio per realizzare il compito, dall’altro per comunicare con i diversi compagni che collaborano a tale compito. Nel secondo caso, la produzione di segni risulta strettamente legata al processo di interpretazione che permette lo scambio di informazione e, conseguentemente, la comunicazione.*” (Bartolini Bussi, Mariotti, 2009).

L’elemento importante di questo modello, ripreso da Vygotskij, è la funzione *mediatrice* che possono avere gli artefatti relativamente ai saperi matematici che incorporano. Tale funzione nelle attività di insegnamento-apprendimento della matematica non è tuttavia scontata e dipende dalle interazioni in classe: “*In altre parole, le potenzialità dello strumento non coincidono con le proprietà intrinseche del materiale, ma dipendono dall’interazione realizzata in classe, sotto la guida dell’insegnante, per mezzo di particolari consegne e all’interno di pratiche sociali. Il ruolo dell’insegnante diventa essenziale nel definire la direzione del processo di esplorazione.*” (Bartolini Bussi, Maschietto, 2006, p. 77).

Fra i vari esempi disponibili di utilizzo di artefatti matematici come mediatori semiotici possiamo riferirci ad un lavoro sul pantografo di Bartolini Bussi (Bartolini Bussi, 1993) e ad un lavoro sugli ingranaggi (Bartolini Bussi, Boni, Ferri, Garuti, 1998). In tali lavori si vede come le attività di gruppo degli studenti e di produzione di segni legati all'artefatto, consentano all'insegnante di individuare una zona di sviluppo prossimale per guidare gli studenti a trasformare i loro segni situati in segni matematici. In particolare nello studio sugli ingranaggi le autrici scrivono: " *I casi raccolti nella tabella mostrano il passaggio dall'attività sugli ingranaggi fisici come artefatti primari (Wartofsky, 1979) alla teoria algebrica si di essi, che è un artefatto terziario. La transizione è guidata e controllata da opportune rappresentazioni, grafiche, linguistiche, gestuali (artefatti secondari).*" (Bartolini Bussi, Boni, Ferri, Garuti, 1998, p. 47). Nello stesso lavoro si discute un esempio di trasformazione di un segno con funzione rivolta verso l'esterno a segno con funzione psicologica, rivolta verso l'interno. Il segno in questione è il segno *freccia* che gli studenti introducono spontaneamente durante le loro attività, inizialmente per indicare "*il gesto della messa in moto iniziale e della imitazione del moto. In questo caso è uno strumento orientato verso l'esterno. Ma, quando si pongono i problemi con due o più ruote, esso si volge all'interno, diventando uno strumento di mediazione semiotica che consente di controllare il moto dell'intera ruota e di esprimere il postulato* "(p.45).

Mediazione e Mediazione Semiotica, artefatti come Strumenti di Mediazione Semiotica

Ci pare che l'estratto precedente fornisca un esempio di cosa si intenda per mediazione semiotica, e di come uno segno possa assumere un significato condiviso sotto la guida dell'insegnante.

Bartolini Bussi e Mariotti si riferiscono ad un lavoro di Hasan per definire il concetto di mediazione: " *Il sostantivo mediazione deriva dal verbo mediare, che si riferisce ad un processo con una complessa struttura semantica che include i seguenti partecipanti e circostanze che sono potenzialmente rilevanti in questo processo:*

1. *Qualcuno che media, il mediatore;*
2. *Qualcosa che viene mediato, il contenuto/forza/energia rilasciato dalla mediazione;*
3. *Qualcuno/qualcosa soggetto alla mediazione, il ricevente a cui la mediazione apporta qualche differenza;*
4. *La circostanza della mediazione;*
   a. *I mezzi della mediazione, la modalità;*
   b. *Il luogo, il sito in cui la mediazione può avvenire.*

Queste complesse relazioni semantiche non sono evidenti in ogni uso grammaticale del verbo, ma sommerse sotto la superficie e possono essere riportate alla luce tramite associazioni paradigmatiche, per esempio le loro relaziono sistemiche." (Hasan, 2002)

L'analogia fra segni ed artefatti si fonda sulla funzione di mediazione che entrambi hanno nello svolgimento di un compito. Se riconsideriamo il processo di insegnamento-apprendimento schematizzato in figura 1, data una consegna specifica (ad esempio un problema) ed un artefatto con il quale è possibile risolvere tale problema, gli studenti produrranno segni che si riferiranno da un lato al problema posto e all'artefatto, dall'altro si potranno riferire ai saperi matematici che sono l'obiettivo dell'attività. Tali segni possono essere utilizzati dall'insegnante per giungere ai segni (contenuti) matematici, quindi i segni funzionano da mezzi mediatori, il tipo di mediazione si dirà *mediazione semiotica* (mediazione tramite segni), l'oggetto della mediazione sono i saperi matematici (cultura), l'insegnante che media sarà dunque un *mediatore culturale*, l'artefatto, per l'insegnante che lo usa con l'obiettivo di mediare contenuti matematici, diventa uno *strumento* (nel senso di Rabardel di artefatto assieme a schemi d'uso) di *mediazione semiotica*.

Quindi durante le attività con l'artefatto, gli studenti lo usano come strumento di mediazione per risolvere alcuni problemi matematici posti dall'insegnante tramite una opportuna consegna, nel fare questo producono segni che l'insegnante ha l'obiettivo di trasformare in segni matematici. Per l'insegnante l'artefatto ha quindi una funzione diversa, quella di mediatore semiotico per giungere ai contenuti matematici.

Testi come artefatti

Come si è detto, in questa teoria anche i testi sono considerati dei particolari artefatti che possono essere sfruttati dagli insegnanti a fini didattici. In questo senso Mariotti e Maracci considerano il testo in senso lato come: "*qualunque tipo di sistema organizzato di segni, appartenenti anche a differenti sistemi semiotici*" (Mariotti, Maracci, 2012) e distinguono fra:

- *Testi interni*: sono sia quelli progettati dall'insegnante come particolari task per gli studenti, sia quelli prodotti dagli studenti durante le attività di insegnamento-apprendimento;

- *Testi esterni*: sono quelli che derivano da fonti storiche (passi, immagini o frasi tratte da testi).

In certi casi l'insegnante può utilizzare più artefatti contemporaneamente, può essere il caso di una macchina matematica (o un software) e di un testo che si riferisce ad essa (testo interno o esterno). Il confronto e l'attività di interpretazione degli artefatti, promossa anche da specifiche richieste, favorisce la produzione e l'elaborazione di segni (Mariotti, Maracci, 2012).

Ruolo dell'insegnante (o dell'esperto)

Due concetti sono legati a questa attività di produzione di segni da parte degli studenti e con la guida dell'insegnante:

- *Potenziale semiotico* di un artefatto (Bartolini Bussi, Mariotti, 1999; Bartolini Bussi, 2007; Falcade, Strozzi, 2009);

- *Polisemia di un artefatto*: (Bartolini Bussi, Mariotti, 2009).

La nozione di *potenziale semiotico* di un artefatto nasce con l'obiettivo di esplicitare le potenzialità che l'artefatto offre, con opportune consegne, per produrre segni potenzialmente utili ad essere trasformati, con la guida dell'insegnante, in segni matematici. Nelle parole di Mariotti e Maracci:

" *Con potenziale semiotico di un artefatto intendiamo il doppio legame semiotico che può sussistere fra un artefatto e i significati personali che emergono dal suo uso per portare a termine un task e, allo stesso tempo, i significati matematici evocati dal suo uso e riconoscibili come matematica da un esperto*" (Mariotti, Maracci, 2012).

Con *polisemia* di un artefatto si intende la presenza di più significati associabili al suo uso. Se facciamo riferimento allo schema di figura 1, da un lato l'artefatto è collegabile con lo sviluppo di una o più attività dello studente (esempio soluzione di problemi tramite una *consegna*), d'altro lato è collegabile con alcuni saperi matematici (*cultura*). In questo senso l'artefatto è *polisemico.*

Questi fattori contribuiscono alla produzione di vari tipi di segni (parole, gesti, disegni,ecc.) da parte degli studenti, la cui produzione può essere spontanea o stimolata dall'insegnante. Bartolini Bussi, Mariotti e Ferri scrivono: "*Possiamo così formulare, con Engestroem (1990), la seguente ipotesi: gli aspetti pratico, rappresentativo e teorico sono (almeno potenzialmente) incorporati nell'attività con un artefatto, che, in questo modo. È potenzialmente dotato di polisemia…In questo senso, la polisemia degli artefatti culturali fa sì che essi divengano buoni candidati per stimolare e sostenere discussioni matematiche in classe, orchestrate dall'insegnante*." (Bartolini Bussi, Mariotti, Ferri, 2003). Quindi abbiamo da un lato i segni prodotti dagli studenti, dall'altro i segni matematici. Come scrivono Bartolini Bussi e Mariotti: " *La relazione (si veda Figura 1) tra questi due sistemi paralleli di segni, correlati ad un artefatto, non è certamente né evidente né spontanea. E' proprio per questa ragione che affermiamo che:*

***la costruzione di questa relazione diventa un cruciale scopo educativo che può essere realizzato promuovendo l'evoluzione dei segni che esprimono la relazione tra l'artefatto ed i compiti in segni che esprimono la relazione tra l'artefatto e sapere**.*" (Bartolini Bussi, Mariotti, 2009).

E questo è il principale obiettivo dell'insegnante durante le attività matematiche con l'artefatto. Scrivono ancora Bartolini Bussi e Mariotti: " *L'obiettivo principale dell'azione dell'insegnante in una discussione matematica è quello di promuovere il movimento verso segni matematici, tenendo in considerazione i contributi individuali e sfruttando i potenziali semiotici che provengono dall'utilizzo di particolari artefatti.*" (Bartolini Bussi, Mariotti, 2009). Possiamo anche sfruttare le parole di Mariotti e Maracci per precisare che: "*L'obiettivo dell'orchestrazione dell'insegnante nell'approccio semiotico non è quello di guidare la genesi strumentale degli studenti, ma quella di sviluppare significati condivisi che abbiano una formulazione esplicita, decontestualizzata dall'uso dell'artefatto, riconoscibile ed accettabile dalla comunità dei matematici.*" (Mariotti, Maracci, 2012).

La polisemia degli artefatti può essere una opportunità per l'insegnante, come scrivono Bartolini Bussi, Mariotti e Ferri in un lavoro sull'uso didattico del prospettografo: "*L'insegnante consapevole delle diverse funzionalità e del conseguente carattere polisemico dell'artefatto ha puntato in tutte le fasi del lavoro ad introdurre e sviluppare le diverse interpretazioni, per tutti gli allievi. Questo 'focus permanente' sulla polisemia ha avuto lo scopo (e l'effetto) di costruire per ogni alunno, compresi quelli di livello basso, una zona di sviluppo prossimale (Vygotskij, 1987), in modo tale che la presenza dell'oggetto concreto in aula potesse favorire, in particolare, la partecipazione degli allievi in difficoltà.*" (Bartolini Bussi, Mariotti, Ferri, 2003).

Uno dei compiti che può avere l'insegnante è anche quello di valutare a-priori le potenzialità dell'artefatto e, in seguito, valutarne a-posteriori l'effettiva efficacia in classe. L'insegnante deve conoscere la polisemia dell'artefatto per poterla sfruttare e lo potrà fare usando, diverse strategie di comunicazione, alcune saranno utilizzate durante lo svolgimento delle attività, altre dopo (discussione di bilancio, discussione matematica).

Ciclo didattico

Bartolini Bussi e Mariotti propongono il costrutto del *ciclo didattico* (figura 2) per definire la struttura di una sequenza di attività di insegnamento-apprendimento con l'uso di un artefatto (Bartolini Bussi, Mariotti, 2009). Tale ciclo si compone di tre momenti:

1- Attività con l'artefatto (soluzione di un problema): in questa attività gli studenti lavorano a coppie o in piccolo gruppo, in modo che sia promossa l'interazione sociale e la produzione di segni legati all'uso dell'artefatto. In questa fase si svela il potenziale semiotico (Mariotti, Maracci, 2012);

2- Produzione di testi individuale (disegni, testi, ecc): dopo avere lavorato con l'artefatto agli studenti viene proposta una attività individuale che può anche essere svolta a casa e può essere: un resoconto su quanto fatto, un disegno (con bambini piccoli) o altro. La caratteristica di questo tipo di attività è che i segni prodotti devono essere personali e, in qualche modo, separati dalla situazione contingente con l'artefatto. Inoltre tali segni non saranno effimeri come gesti o parole solo pronunciate, ma scritti e quindi permanenti;

3- Produzione collettiva di testi (Discussione matematica orchestrata dall'insegnante): in questa fase l'intera classe lavora e produce collettivamente segni (narrativa, mimica, testi, disegni o altro). L'insegnante potrà utilizzare la discussione matematica per arrivare a segni matematici con un significato condiviso.

Dal punto 3 il ciclo ritorna al punto 1 con nuove attività con l'artefatto (altre consegne o altri artefatti).

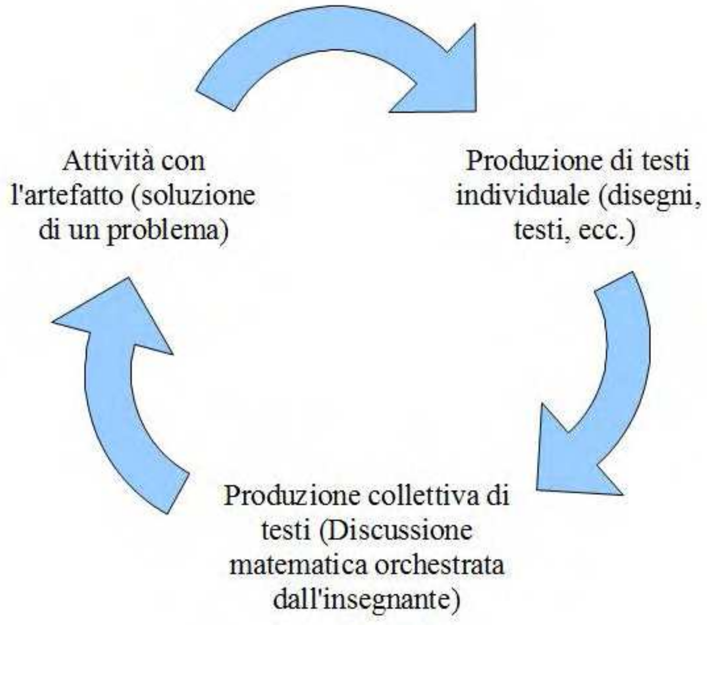


Figura 2   Il ciclo didattico

Categorie di segni

Dall'analisi di attività di insegnamento-apprendimento con artefatti del tipo descritto, è stata proposta la suddivisione dei segni prodotti in tre categorie che li distinguono in relazione alla maggiore o minore 'distanza' dal riferimento all'artefatto (Bartolini Bussi, Mariotti, 2009; Falcade, 2006):

- *Segni artefatto*: sono relativi al contesto di utilizzo degli artefatti, possono fare riferimento a sue parti o ad azioni sull'artefatto o tramite esso. Tali significati sono strettamente legati all'esperienza del soggetto, personali e spesso impliciti. Tali segni sono *segni situati* nel senso di Noss e Hoyles (Noss, Hoyles, 1997, p.122), ovvero segni che nascono da un intreccio di un contesto particolare, che, a sua volta, dà forma a al modo in cui le idee sono espresse. Tali segni, anche se personali, generalmente si prestano alla negoziazione dato che si riferiscono ad una esperienza comune.
  Ad esempio il disegno fatto da uno studente di una parte di un artefatto è un tipo si segno artefatto;

- *Segni pivot*: sono segni che hanno la caratteristica della polisemia, nel senso che si possono riferire sia all'attività con l'artefatto che al linguaggio naturale e al dominio matematico. Questa caratteristica li rende adatti ad essere utilizzati per il passaggio dal contesto dell'artefatto al contesto del sapere matematico.
  Ad esempio un simbolo come una freccia che viene utilizzato inizialmente per indicare il verso di rotazione di un ingranaggio e può, successivamente, essere utilizzato, assieme ad altri simboli freccia per ragionare sul comportamento di un sistema di ingranaggi (Bartolini Bussi, Boni, Ferri, Garuti, 1998), può essere considerato un tipo di segno pivot;

- *Segni matematici*: sono segni che si riferiscono al contesto matematico e sono collegati a significati matematici condivisi nell'istituzione a cui appartiene la classe e possono essere espressi da una proposizione che soddisfa gli standard condivisi dalla comunità matematica. Tali segni sono l'obiettivo del processo di mediazione semiotica guidato dall'insegnante.
  Ad esempio una equazione che traduce un certo problema espresso a parole è un tipo di segno matematico;

Diffusione dell'uso didattico di artefatti matematici

Come abbiamo visto, il modello della mediazione semiotica per l'uso didattico di artefatti è stato proposto inizialmente con l'obiettivo di fornire un quadro teorico per l'uso di artefatti matematici di diverso tipo (riga e compasso, abaco, ingranaggi, pascalina, prospettografi, pantografi, curvigrafi, software come cabrì, geogebra, l'algebrista, ecc.). Tale quadro può servire anche per lo studio di altri artefatti ereditati dalla storia, oppure progettati artificialmente con obiettivi didattici, o presi dalla vita di tutti i giorni (Bartolini Bussi, Boni, 2003; Castelnuovo, Barra, 1976). L'uso di artefatti matematici, e più in generale dell'idea di laboratorio di matematica, ha avuto un forte impulso negli ultimi anni in Italia e all'estero, si veda ad esempio il numero di Innovazione Educativa (InEd, 2008). In Emilia Romagna il Progetto Laboratorio delle Macchine Matematiche (Bartolini, Garuti, Martignone, Maschietto, 2011) ha visto coinvolte molte scuole con l'obiettivo di promuovere e studiare l'impatto sugli apprendimenti matematici di tali artefatti. I lavori di ricerca in tale ambito sono numerosi, alcuni sono già stati menzionati, fra gli altri aggiungiamo uno studio storico e di comparazione di esperienze internazionali con uso di artefatti (Bartolini, Taimina, Isoda, 2010), uno studio sulla prospettiva (Bartolini Bussi, Mariotti, Ferri, 2003), alcuni studi sugli ingranaggi (Bartolini Bussi, 2000; Bartolini Bussi, Boni, Ferri, Garuti, 1998), sull'uso di pantografi e le trasformazioni (Martignone, Antonini, 2009a, 2009b), su pantografi e curvigrafi (Maschietto, Martignone, 2008), e su strumenti software (Cerulli, Mariotti, 2003; Falcade, Laborde, Mariotti, 2007). Inoltre sono stati pubblicati testi che raccolgono, inquadrandole teoricamente, esperienze sull'uso didattico di artefatti matematici ad uso anche degli insegnanti. In particolare il testo già citato "Macchine Matematiche: dalla storia alla scuola" (Bartolini Bussi, Maschietto, 2006) nel quale si studiano, da diversi punti di vista, le implicazioni didattiche sull'uso di macchine matematiche del passato[1]. Più recente è un testo nel quale si sfruttano alcune di queste macchine, in una versione 'portatile', per studiare la matematica che è presente in un parco giochi (Resta, Gaudenzi, Alberghi, 2011). Proposte di nuovi artefatti matematici, con potenzialità didattiche ancora da esplorare in modo sistematico, sono in fase embrionale (Salvi, *in stampa*; Milici, Salvi, 2013; Milici, Dawson, 2012; Di Paola, Milici, 2012).

[1] Si possono trovare immagini ed animazioni del funzionamento delle macchine ed ulteriori informazioni sul sito www.macchinematematiche.org

2.4 Contratto didattico, campo di esperienza e campo semantico

Chiariamo alcuni concetti che si sono affermati nella Didattica della Matematica e dei quali faremo uso nel resto della ricerca. Si tratta dei concetti di: *contratto didattico*, *campo di esperienz*a e *campo semantico*.

Il concetto di *contratto didattico,* nato nell'ambito della Teoria delle situazioni didattiche, ha una utilità più generale e può essere utilizzato anche nell'ambito della mediazione semiotica.

Per *contratto didattico* si può dare la seguente definizione, tratta da Spagnolo (Spagnolo, 2009, p.63): "*Il contratto didattico è il risultato della negoziazione dei rapporti stabiliti esplicitamente e/o implicitamente tra allievo o un gruppo di allievi, un certo 'ambiente' ed un sistema educativo, al fine di far appropriare gli allievi di un sapere costituito o in via di costituzione.*".

Ci pare che tale definizione si possa usare senza modifiche anche in questo quadro teorico.

Analogamente ci pare che si possano utilizzare i costrutti di *campo di esperienza* e *campo semantico*, dovuti a Boero.

Un *campo di esperienza* è definito come: "*Un settore dell'esperienza di vita (reale o potenziale) degli allievi, identificabile da essi, unitario, dotato di specifiche caratteristiche che lo rendono adatto (sotto la guida dell'insegnante) per attività di modellizzazione matematica, proposizione e risoluzione di problemi matematici,ecc.* " (Boero, 1989, 1994; D'Amore, 1999), tale settore dell'esperienza è un sistema formato da tre componenti: contesto esterno, contesto interno dello studente, contesto interno dell'insegnante (Boero et al, 1995).

Alcuni esempi di possibili campi di esperienza (D'Amore, 1999, p.365): macchine, scambi, economici, produzioni, sole e terra.

Tale concetto è stato assunto in maniera ufficiale, anche se lievemente modificato, negli Orientamenti per la Scuola Materna Statale Italiana, dove si legge:

“ *Con questo termine si indicano i diversi ambiti del fare e dell’agire del bambino e quindi settori specifici ed individuabili di competenza nei quali il bambino conferisce significato alle sue molteplici attività, sviluppa il suo apprendimento, acquisendo anche le strumentazioni linguistiche e procedurali, e persegue i suoi traguardi formativi, nel concreto di una esperienza che si svolge entro confini definiti e con il costante suo coinvolgimento. Ciascun campo di esperienza presenta i suoi peculiari esiti educativi, percorsi metodologici e possibili indicatori di verifica ed implica una pluralità di sollecitazioni ed opportunità.*” [C.M. Orientamenti, 1990: capitolo III, paragrafo 2].

Nella ricerca in didattica della matematica si è imposto anche il concetto di *campo semantico*, legato al campo di esperienza.

Per campo semantico si intende: “ *Un aspetto dell’esperienza umana (inerente la conoscenza della natura, o l’azione sul mondo che ci circonda, o la realtà artificiale e i sistemi di convenzioni prodotti dall’uomo) che si presenta al ricercatore, in uno o più campi di esperienza, come unitario, non ulteriormente scomponibile, e razionalizzabile solo attraverso un uso pertinente, intenso e significativo di concetti e/o procedure disciplinari (matematiche e/o non matematiche)*”. (Boero, 1989, 1992).

Esempi di campi semantici proposti da Boero: ombre del sole, formazione dei costi di produzione, percorsi a piedi, calcolatrici tascabili, equilibrio delle leve, rappresentazione prospettica.

I concetti di campo di esperienze e campo semantico ci paiono legati al concetto di dominio di conoscenza, come abbiamo definito nel primo capitolo. Notiamo che la definizione di dominio di conoscenza può comprendere come casi specifici gli altri due, nei quali compare esplicitamente l’uso didattico. Tale uso non compare nella definizione di dominio di conoscenza dato che il nostro obiettivo era definire in maniera operativa e abbastanza generale la metafora.

I concetti di campo di esperienza e campo semantico sono senz’altro compatibili con la prospettiva socio-culturale, ad esempio sono usati in (Bartolini Bussi, Boni, Ferri, 1995).

3. Integrazione dei concetti di Metafora, Analogia ed Ostacolo nel quadro teorico adottato

In questa ricerca il quadro delle mediazione semiotica viene integrato con i concetti di *ostacolo, misconcezione, metafora* ed *analogia*, ai quali ci riferiremo usando le definizioni proposte nei capitoli 1 e 2. In particolare nel paragrafo 3.2 vogliamo chiarire le modalità con le quali, in tale quadro, le metafore possono essere considerate come particolari *segni* che possono essere riconosciuti e sfruttati produttivamente. Nel paragrafo 3.1 cerchiamo di giustificare il lavoro svolto nei primi due capitoli sul significato da attribuire a metafora, analogia ed ostacolo, alla luce della necessità/opportunità di integrarli nel modello della mediazione semiotica. Per fare questo mettiamo in luce le caratteristiche delle definizioni che abbiamo cercato e mostriamo come, ed in che misura, siano compatibili con il quadro teorico generale. Il tipo di operazione che facciamo, e che in parte abbiamo iniziato a fare nel paragrafo precedente, è simile, ci sembra, a quello che si fa per mettere in networking diverse teorie, come abbiamo mostrato nel paragrafo1.2 precedente. Il tipo di discussione che proponiamo è forse assimilabile ad una strategia di integrazione, nella quale alcuni concetti provenienti da altre teorie, in parte rielaborati ed in parte ridefiniti (metafora, analogia, ostacolo e misconcezione), vengono integrati in una teoria più estesa ed affermata, discutendo la possibilità e la coerenza di tale integrazione. Tuttavia e' evidente la differenza: qua si fa una operazione "in piccolo" ed in autonomia, senza una discussione con la comunità estesa dei ricercatori e con il solo obiettivo di cercare la coerenza, almeno nelle definizioni e nell'impianto concettuale, all'interno di questa ricerca. Pensiamo, tuttavia, che potrebbe essere il primo passo per proporre, in futuro, discussioni più estese su alcune di queste idee.

3.1 Metafora, Analogia, Ostacolo e Misconcezione nel quadro della Teoria della Mediazione Semiotica

Metafora ed Analogia

Se consideriamo le definizioni che abbiamo proposto nel capitolo 1 per metafora ed analogia, vediamo come siano fondate sul concetto di *dominio di conoscenza*, il quale è stato definito come :

"*Insieme delle situazioni reali o ideali (concettuali) definite da: oggetti o esseri viventi, azioni, concetti, relazioni ed operazioni congiuntamente ad una comunità/società di individui per la quale tali situazioni abbiano un significato condiviso*." (Cap. 1 par 5.4).

Ci pare che tale definizione sia compatibile con la prospettiva socio-culturale, dato che viene esplicitamente sostenuto il carattere *sociale* della conoscenza, nel senso che il significato dei concetti, azioni, relazioni è condiviso da una comunità di individui. Certamente questo apre il problema di cosa significhi *condiviso*, ma questo è un problema, in generale, che si presenta in ogni quadro teorico che consideri la *negoziazione* di significati. Potremmo riformulare il problema dicendo che l'insieme degli individui, relativamente ad un certo significato (ad esempio il concetto di triangolo), potrà generare una discussione (la discussione può essere la *discussione matematica orchestrata dall'insegnante*), durante la quale potranno comparire significati differenti, se tale discussione raggiunge un equilibrio, nel senso che tutti gli individui si dicono d'accordo (d'accordo con l'insegnante) sul significato costruito dalla discussione, allora tale significato sarà *condiviso*. Il fatto che sia condiviso ad un certo momento non esclude che possa non esserlo più alla luce di nuove conoscenze od elaborazioni. Crediamo che la condivisione di un significato non sia un fatto dato una volta per tutte ma abbia sempre un carattere provvisorio e rivedibile. Nelle situazioni di aula è comune il fatto che gli studenti dicano di avere capito, per poi scoprire che avevano capito una cosa diversa da quella che l'insegnante immaginava, non è garantito che i significati personali degli oggetti matematici coincidano con quelli istituzionali (Godino, Batanero, 2000) anche se si arriva ad un accordo sulla condivisione. Queste considerazioni ci sembrano del tutto compatibili con il modello della mediazione semiotica, dato che in questo modello il compito dell'insegnante (esperto) è quello di guidare i significati personali o situati degli studenti verso i significati istituzionali. Se consideriamo le definizioni che abbiamo proposte di analogia e metafora:

" *Per **Analogia** intendiamo l'individuazione di:*

- *due domini di conoscenza (che possono coincidere);*
- *degli elementi (almeno due) in ciascun dominio;*
- *delle relazioni (almeno una) fra alcuni degli elementi di ciascun dominio;*
- *una mappatura (iniettiva) fra alcuni degli elementi di un dominio (almeno due) e gli elementi dell'altro;*

- *una mappatura (iniettiva) fra alcune (almeno una) delle relazioni di un dominio e quelle dell'altro.*

Per ***Metafora*** *intendiamo: qualunque* **espressione comunicabile** *ad altri soggetti, in forma verbale, scritta, gestuale, grafico-pittorica bidimensionale o tridimensionale, di animazione (film o altre forme), o qualunque oggetto che permetta, in un dato contesto e con dati obiettivi, ad un soggetto di* ***individuare o costruire*** *una analogia fra due domini di conoscenza diversi.*" (Cap. 1 par 5.4).

Vediamo che per quanto riguarda la definizione di analogia, essa si basa sull'individuazione di domini di conoscenza, di elementi e relazioni fra essi (che sono parte dei domini di conoscenza) e mappature fra elementi e relazioni. La componente socio-culturale di domini, elementi e relazioni è già contenuta nella definizione di dominio di conoscenza. La costruzione della mappatura, dopo che è stata iniziata con la metafora, fa parte del *ragionamento analogico*, che è un processo cognitivo riconosciuto e studiato, come mostrato nel capitolo 1, e che può avvenire sia individualmente che tramite interazioni con altri individui, in particolare con la guida di un insegnante.

Per quanto riguarda la definizione di metafora, vediamo che il possibile problema in una prospettiva educativa socio-culturale (che viene in parte indagato con la prima sperimentazione nel capitolo 4), è l'idea che la metafora possa avere di per sé l'effetto di innescare l'individuazione di una analogia, in maniera autonoma, indipendentemente da azioni dell'insegnante (o esperto). Crediamo che alcune forme di metafora possano avere questa caratteristica (e questa è una delle ipotesi messe alla prova, su un caso particolare, nel capitolo 4), ma che non sia possibile raggiungere, con la sola presenza di metafore, la costruzione di saperi matematici. Nel capitolo 4 riprendiamo la questione alla luce della prima sperimentazione.

Ostacolo e Misconcezione

Per giungere alla definizione proposta di ostacolo, siamo partiti dall'idea di conoscenza-ostacolo, che abbiamo definito come:

" *un insieme di conoscenze intuitive o formali, delle quali si può avere o meno consapevolezza, e che si manifestano non solo in maniera proposizionale ma anche operativa e comportamentale in un ambito specifico ed in modo coerente, anche se con modalità differenti. Facciamo rientrare nell'idea di conoscenza-ostacolo: modelli taciti di Fischbein, p-prims di Di Sessa, regole intuitive di Tirosh e Stavy.*" (Cap. 2 Par.3.3).

Le conoscenze possono essere di origine culturale, acquisite in modo formale o non formale, oppure di origine filogenetica (come è stato ipotizzato, ad esempio, per alcune p-prims). Nel caso di conoscenze che hanno origine filogenetica, la loro origine è di tipo storico ma non di origine direttamente culturale; la storia è quella dell'evoluzione genetica della specie umana in relazione all'ambiente nel quale si è trovata a vivere nelle corso del tempo (se si accetta, come noi facciamo, una prospettiva evolutiva delle specie). Questo elemento sembrerebbe discostarsi e contraddire i principi della prospettiva socio-culturale, in particolare se consideriamo i primi due principi proposti da Radford (paragrafo 2.1 di questo capitolo):

"p1: la conoscenza è storicamente generata durante il corso delle attività matematiche degli individui;

p2: la produzione di conoscenze non risponde ad un criterio adattivo ma è inclusa in forme culturali di pensiero che sono legate ad una realtà materiale e simbolica che fornisce le basi per l'interpretazione, la comprensione e la trasformazione del mondo degli individui e dei concetti e delle idee che gli individui si formano a proposito di tale mondo."

Si vede che la conoscenza della quale parla Radford è quella che deriva da *attività matematiche,* (quindi attività di tipo culturale), inoltre, anche se afferma che tale produzione non è legata direttamente all'adattamento, le forme culturali di pensiero sono legate ad una *realtà materiale* e simbolica. Noi crediamo che si possa evitare una contraddizione e fare rientrare anche quelle conoscenze che, in qualche modo, la filogenesi ha incorporato nella specie umana se si considerano ad un livello differente rispetto alle *attività matematiche*. Se consideriamo tali conoscenze come parte della realtà materiale (realtà materiale *interna* invece che *esterna*), allo stesso modo con il quale possiamo considerare il moto dei pianeti, e le differenziamo dalle attività matematiche che utilizziamo per descriverle, ci pare che si possa evitare una contraddizione. In questo modo riusciamo a considerare tali conoscenze come oggetto legittimo di analisi, anche da una prospettiva socio-culturale. Ad esempio, il fatto che un individuo tenda a ragionare seguendo alcune regole intuitive ("più A-più B") o modelli taciti (ad esempio il modello di insieme come collezione di oggetti materiali), può essere descritto in maniere differenti che dipendono dal tipo di cultura che li descrive. Inoltre tali descrizioni sono approssimazioni di un comportamento umano che, come tali, ammettono generalizzazioni o particolarizzazioni differenti che, a loro volta, possono dipendere dalla cultura di appartenenza o dalle condizioni storiche. In questo caso, secondo noi, la vera *attività matematica*, sta proprio nella descrizione e modellizzazione del fenomeno, ovvero nella descrizione (tramite proposizioni, modelli matematici, teorie) del comportamento dell'individuo. Ci sembra che un caso emblematico di questo fenomeno possa essere la teoria del comportamento umano in condizioni di incertezza di Kahneman e Tversky (Kahneman, Tversky, 1979). Il punto che ci pare interessante è che in questi casi la realtà materiale che si vuole descrivere formalmente (al limite matematicamente) riguarda un comportamento o una conoscenza dell'individuo che può avere effetti sul suo modo di fare attività matematica. Anche Fischbein ha analizzato tali comportamenti per quanto riguarda il concetto di probabilità ed il suo uso (Fischbein et al., 1991).

Con questo crediamo che la definizione proposta di conoscenza-ostacolo possa essere accolta senza contraddizioni nel nostro quadro teorico di riferimento.

Se prendiamo in considerazione la definizione che proponiamo di ostacolo:

" *possiamo individuare un ostacolo con una terna (Si, Co, Sn), dove Co è una conoscenza-ostacolo (nel senso chiarito precedentemente) con le seguenti caratteristiche:*

- *resistente al cambiamento, indipendentemente dalle strategie dell'insegnante;*
- *origina concezioni che sono compatibili (non in contraddizione), secondo metodi di valutazione propri della situazione Si, con la situazione Si;*
- *origina concezioni che non sono compatibili (sono in contraddizione), secondo metodi di valutazione propri della situazione Sn, con la situazione Sn. In Sn tali concezioni sono considerate misconcezioni."* (Cap. 2 Par.3.3).

vediamo che la dipendenza dalle condizioni socio-culturali sono contenute nella definizione, in particolare l'ostacolo deriva non solo da una conoscenza (la conoscenza-ostacolo appunto) ma anche da due situazioni e dai criteri di valutazione adottati in ciascuna delle situazioni.

Nella nostra definizione continuiamo, arrivando ad una classificazione degli ostacoli:

" gli ostacoli potrebbero essere classificati a seconda dell'origine delle conoscenze-ostacolo che generano le misconcezioni, e potremo definire i seguenti tipi di ostacolo:

- *Culturale, se la conoscenza-ostacolo si è formata a seguito del processo di inculturazione, delle pratiche sociali proprie della cultura di appartenenza o della propria famiglia;*

- *Epistemologico, se la conoscenza-ostacolo si è formata culturalmente ma con caratteristiche comuni a tutti i componenti di una società (quindi può essere un particolare ostacolo culturale diffuso in tutta una società);*

- *Didattico, se la conoscenza-ostacolo si è formata a seguito della particolare scolarizzazione (scelte didattiche dell'insegnante, della scuola);*

- *Filogenetico, se la conoscenza-ostacolo si è formata in seguito all'evoluzione della nostra specie, ed è quindi incorporato nella nostra struttura neurale;*

- *Ontogenetico, se la conoscenza-ostacolo si è formata in un momento dello sviluppo dell'individuo che ne ha determinato alcune delle caratteristiche.*" (Cap. 2 Par.3.3)

Anche in questo caso, nelle prime tre forme di ostacolo è esplicita l'origine socio-culturale, negli ultimi due valgono le considerazione che abbiamo fatto relativamente alle conoscenze-ostacolo.

In definitiva crediamo che sia giustificata e non contraddittoria la definizione che abbiamo proposto di ostacoli all'interno di questo quadro teorico.

Per quanto riguarda la Misconcezione, che abbiamo definito come: "*una proposizione (nel senso di enunciato orale, scritto, espressione comprensibile di altre forme) che in una data situazione venga considerata errata.*" (Cap.2, par.3.3), ci pare che non porti a contraddizioni, chiarito che il fatto di essere considerata errata dipende dalla situazione nella quale viene considerata.

3.2 Ruolo della metafora nella Teoria della mediazione semiotica

Dopo avere giustificato e discusso la coerenza delle definizioni date e dei concetti utilizzati, cerchiamo di spiegare come la metafora possa svolgere un ruolo potenzialmente utile nel processo di insegnamento-apprendimento nel quadro della Teoria della mediazione semiotica.

La metafora nelle possibili strategie di comunicazione

L’idea di sfruttare le metafore come mezzo per guidare gli studenti verso l’appropriazione di significati matematici “fa capolino” già in un testo di Bartolini Bussi dove scrive: *“Ad esempio, la costruzione del germe di teoria sugli ingranaggi è compiuta dall’insegnante creando intenzionalmente un ponte tra le metafore utilizzate dagli allievi e gli enunciati ripresi dalla ‘Meccanica’ di Erone.*” (Bartolini Bussi, 2000, p.243). Anche Brousseau ha visto nelle situazioni fondamentali delle metafore (metafore fondamentali) che potevano servire ad un transfer analogico (Spagnolo, 2009). Crediamo che si possa in qualche modo “ufficializzare” l’utilità dell’uso di metafore prodotte dagli studenti inquadrando il loro uso nelle strategie di comunicazione a disposizione dell’insegnante. Come abbiamo visto nel paragrafo 2.3 di questo capitolo, fra le strategie possibili ci sono il *rispecchiamento* e la *parafrasi*, ed utilizzando queste strategie l’insegnante potrà sfruttare le metafore prodotte dagli studenti, in particolare:

- Tramite *rispecchiamenti*: l’insegnante può *riconoscere* (e per fare questo ci pare importante darne una definizione) la presenza di metafore nei testi (orali o scritti) degli studenti, e riprenderle con un intervento che può limitarsi a ripetere ciò che è stato proposto dagli studenti (eco), tramite un riassunto di più interventi (ricapitolazione), oppure tramite la ripetizione con aggiunta di qualche informazione (informazione). In questo modo può favorire la presa di coscienza da parte degli studenti sulla metafora usata e l’emergere dei significati ad essa associati;

- Tramite *parafrasi*: l’insegnante riconosce la metafora e la sfrutta per proporre agli studenti una prima forma di generalizzazione o particolarizzazione utile ad avviare il discorso verso i significati matematici che la metafora può mediare (quando il tipo di metafora lo permette).

L’insegnante potrà sfruttare le potenzialità di eventuali metafore anche nella *discussione matematica*. Al tal fine l’insegnante potrà valutare la produttività della metafora (o delle metafore) relativamente ai contenuti matematici che sono il motivo delle attività, andando ad analizzare la o le possibili analogie che sono associate alla metafora. Riprenderemo questo discorso nel capitolo 6, dove proporremo e discuteremo alcuni casi tratti dalle sperimentazioni.

L’insegnante potrà introdurre metafore od analizzare le metafore prodotte dagli studenti sia nella discussione di bilancio, che nella discussione di concettualizzazione. Ci pare che soprattutto in quest’ultima le metafore eventualmente evocate dagli studenti possano essere strumenti particolarmente utili per il passaggio da esperienze vissute o concetti quotidiani, dalle quali probabilmente tali metafore sorgono, ed i concetti scientifici, ovvero i significati matematici ai quali tende l’attività di insegnamento-apprendimento sotto la guida dell’insegnante.

Oltre alle metafore prodotte dagli studenti durante le attività in classe, possiamo considerare le metafore introdotte dall’insegnante direttamente o indirettamente, tramite opportuni testi matematici o artefatti. Principalmente nel caso di metafore introdotte dall’insegnante, basandoci sui quanto visto nel capitolo 1 (par. 4), crediamo di poter dire che uno dei compiti dell’insegnante sia quello di valutare le potenzialità della metafora, analizzando le analogie potenzialmente collegate, riconoscendo le misconcezioni che possono sorgere, e considerando la possibile presenza di ostacoli. Nei casi in cui tali metafore vengano usate in maniera non intenzionale, l’analisi potrà essere fatta a posteriori, in modo da predisporsi ad un loro uso futuro più consapevole. Nel capitolo 6 riprenderemo questo discorso analizzando su alcuni episodi tratti dalle sperimentazioni.

La metafora nel modello della mediazione semiotica con uso di artefatti

Come abbiamo visto nel paragrafo 2.3 Bartolini Bussi e Mariotti hanno proposto un modello specifico per inquadrare all'interno della Teoria della mediazione semiotica l'uso di artefatti matematici. Noi pensiamo che tale modello possa servire anche ad inquadrare i diversi modi con i quali la metafora può presentarsi in tali attività. In generale si possono ipotizzare diverse modalità con le quali la metafora potrebbe giocare un ruolo in tale processo (queste sono ipotesi che, in parte, vengono messe alla prova con le sperimentazioni descritte nei capitoli 4 e 5). Abbiamo sintetizzato nella figura 2 che, che riprende lo schema di figura 1, le possibilità che abbiamo individuato (non escludendo che ce ne possano essere altre):

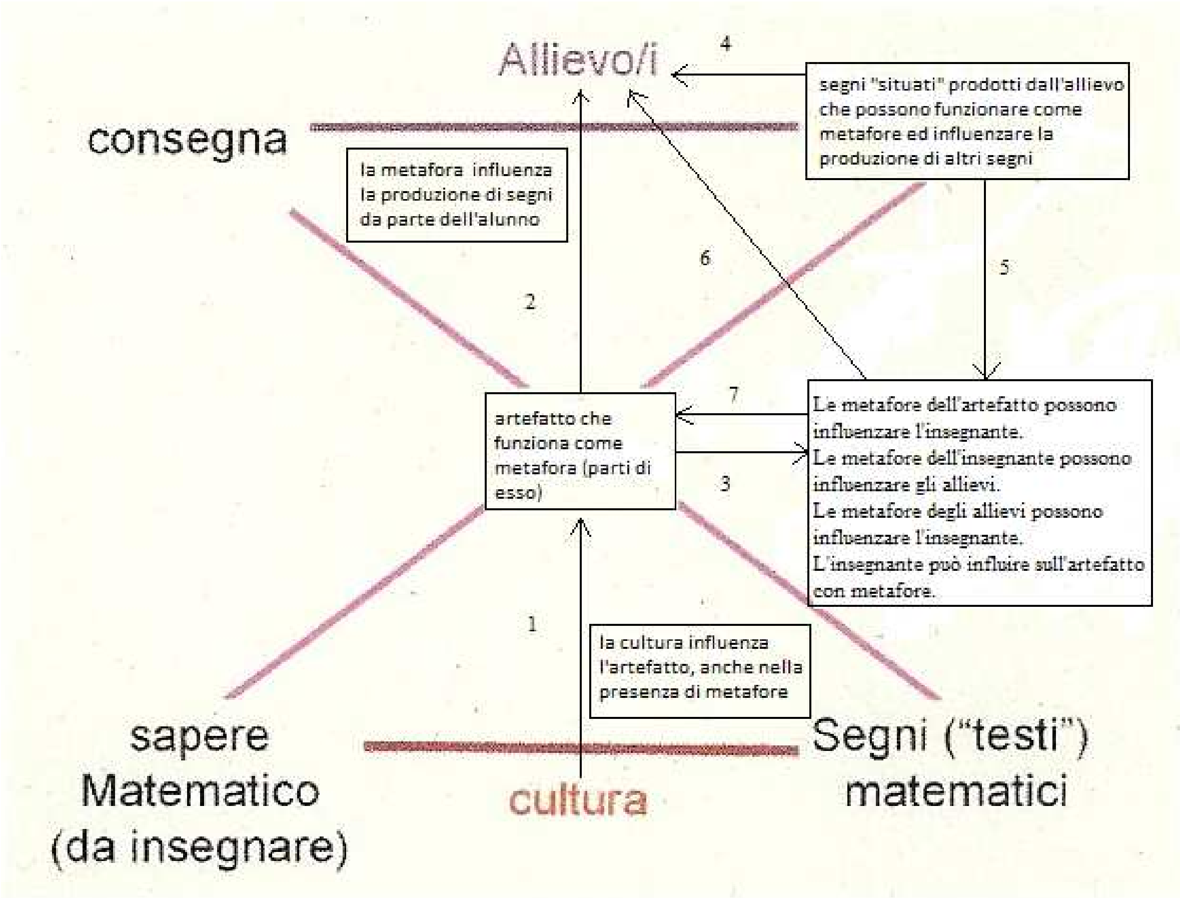


Figura 3

Chiariamo lo schema di figura 3:

Al centro dello schema è l'artefatto (testo o macchina matematica o altro) che può contenere metafore (segni, frasi, schemi, sue caratteristiche..). La presenza di metafore nell'artefatto può avere una origine culturale (freccia 1). Le caratteristiche dell'artefatto possono provenire dalla storia e dall'evoluzione dell'artefatto, incorporando metafore che sono presenti nella cultura (ad esempio la presenza di scale graduate o particolari simboli). Non intendiamo con questo dire che la metafora dipenda *solo* dalla *cultura che ha prodotto* l'artefatto (sia esso un testo, una macchina o altro); nella definizione che abbiamo proposto di metafora, è esplicitato il fatto che l'essere o non essere metafora dipende dall'effetto potenziale che questa ha su un soggetto di individuare una analogia, e questo potrà dipendere anche dalla *cultura nella quale è immerso l'individuo* e dalla storia individuale che ha . Le due culture possono coincidere oppure no. E' possibile così che un artefatto contenga una metafora per un individuo e non per un altro, dipendendo anche dalle culture di appartenenza degli individui. Un oggetto con particolari caratteristiche potrà essere visto come una metafora da un individuo che attribuisce particolari significati o che vede alcune connessioni con un altro dominio di conoscenze, mentre per in un altro individuo, che non ha le stesse conoscenze, tale connessione non avviene.

In questo (come vedremo anche nella discussione sulle sperimentazioni nel capitolo 6) gioca un ruolo importante l'insegnante.

Le metafore presenti nell'artefatto possono influenzare sia gli studenti che l'insegnante:

- La presenza, più o meno esplicita, di metafore in un testo o, più in generale, in un artefatto, può avere effetti sulla scelta di particolari parole o segni utilizzati per rappresentarla o analizzarla. Questo sia da parte degli studenti (freccia 2) che da parte dell'insegnante (freccia 3).

Nella parte superiore dello schema abbiamo gli allievi che possono produrre metafore durante le loro attività, tali metafore possono influenzare le attività in (almeno) due modi:

- Le metafore (eventualmente) prodotte influenzano la produzione di segni da parte degli stessi studenti (freccia 4);

- Le metafore (eventualmente) prodotte possono influenzare l'insegnante (freccia 5).

A destra abbiamo rappresentato l'insegnante, che può essere influenzato sia dalle metafore dell'artefatto che da quelle degli studenti. L'insegnante potrà sfruttare sia le proprie metafore, sia le metafore che trova nell'artefatto, sia le metafore prodotte dagli stessi studenti per guidarli nel processo di appropriazione dei contenuti matematici che sono l'obiettivo dell'attività (freccia 6).
L'insegnante può avere una influenza anche sull'artefatto stesso, ad esempio nella progettazione o nella scelta di testi. Tale influenza può consistere nell'inserimento di metafore che derivano direttamente dall'insegnante (volontariamente o meno), ad esempio tramite l'uso di particolari termini, espressioni, schemi, disegni o altro (freccia 7). Questa è una influenza che non si ha durante le attività ma si può avere prima, in fase di progettazione.

Come abbiamo visto nel paragrafo 2.3, nel modello proposto da Bartolini Bussi e Mariotti, l'insegnante ha il compito di guidare gli studenti, all'interno di una zona di sviluppo prossimale, partendo dai segni situati da essi prodotti per arrivare ai segni matematici, ovvero a segni che hanno un preciso significato matematico, istituzionalmente definito. Se consideriamo come segni le metafore che possono essere prodotte dagli studenti, il compito dell'insegnante è quello di utilizzare tali metafore (quando ciò è possibile e conveniente) per fare avvicinare gli studenti ai contenuti

matematici. Ci sembra che la metafora, per la sua caratteristica di poter collegare domini differenti con la guida dell'insegnante, necessaria in misura variabile (questa è una delle questioni indagate nelle sperimentazioni), possa svolgere pienamente una funzione di *mediazione semiotica*. Infatti Bartolini Bussi e Mariotti scrivono a proposito dei segni prodotti dagli studenti durante le attività matematiche: "*Da una parte, questi segni sono legati allo svolgimento di un compito, in particolare all'artefatto utilizzato, dall'altra essi possono essere in relazione al contenuto che deve essere mediato.*" (Bartolini Bussi e Mariotti, 2008, p.281). In particolare ipotizziamo che le metafore possano svolgere una funzione di segni pivot.
Alcuni artefatti possono avere una maggiore o minore capacità di produrre metafore o funzionare come metafore, crediamo che questa caratteristica possa fare parte di ciò che è stato definito *potenziale semiotico*.

3 Ruolo del quadro teorico in questa ricerca

Dopo avere chiarito il quadro teorico che intendiamo utilizzare ed averlo integrato con alcuni concetti in qualche modo esterni, vediamo in che forma tale quadro viene utilizzato sia nell'indagine sperimentale delle ipotesi di ricerca che nel discorso, più generale, relativo alle due domande di ricerca che abbiamo introdotto nel primo capitolo (par. 5.4).

4.1 Le ipotesi di ricerca ed il modello di mediazione semiotica con uso di artefatti

Le prime ipotesi di ricerca che abbiamo già introdotto nel capitolo 1 (par. 5.4) e che vengono indagate nel capitolo 4, riguardano la produttività di alcune metafore e la dipendenza di tale produttività sia dalle caratteristiche del testo (dialogato o impersonale) nel quale si trovano, sia dalle caratteristiche delle stesse metafore (esplicite o implicite). Per comodità riproponiamo le ipotesi nella figura 4.

Prime ipotesi di ricerca

I1: Nel caso di testi con metafora esplicita l'uso della stessa per costruire una analogia non dipende dalla forma impersonale o dialogata del testo;

I2: Nel caso di testo con metafora implicita c'è dipendenza dalla forma del testo e mi aspetto che nel testo dialogato ci sia maggiore facilità ad utilizzare la metafora;

I3: Nel caso di testo con metafora implicita c'è una forte dipendenza dall'intervento dell'insegnante/sperimentatore indipendentemente dal testo;

I4: Nel caso di testo con metafora esplicita una c'è una dipendenza minore, rispetto al caso precedente, dall'insegnante/sperimentatore per l'interpretazione della metafora.

Figura 4

Nella prima sperimentazione l’artefatto è dunque un *testo*, che contiene (almeno) una metafora. Sia il testo che la metafora sono stati progettati dallo sperimentatore che durante le fasi della sperimentazione fungeva da esperto (con precise modalità di interazione che verranno discusse nel capitolo 4).

Nella seconda sperimentazione si indagano le ipotesi di ricerca riformulate, che riproponiamo nella figura 5. In questa seconda sperimentazione l’artefatto è composto da una macchina matematica (in un caso un pantografo per la simmetria assiale nell’altro un pantografo per lo stiramento) assieme ad un testo. Le ipotesi riguardano la possibilità di distinguere due forme di metafora, intuitiva o formale (questione che verrà affrontata nel capitolo 5), la produttività di metafore presenti nell’artefatto (macchina e testo) e la sua dipendenza da caratteristiche della metafora (esplicita o implicita e intuitiva o formale).

Ipotesi di ricerca riformulate

I2.1: è possibile distinguere due tipi di metafore (intuitiva/incorporata o formale/culturale) con caratteristiche distinguibili (la prima spontanea e non consapevole la seconda non spontanea e che richiede consapevolezza);

I2.2: se la metafora è di tipo incorporato-intuitivo allora la sua produttività non dipende dall’essere esplicita o implicita nel testo;

I2.3: se la metafora è di tipo culturale-formale allora la sua produttività dipende dall’essere esplicita o implicita nel testo e la produttività è maggiore nel caso di metafore esplicite.

Figura 5

Anche in questo caso il testo è progettato dallo sperimentatore che, nelle attività funge da esperto (con precise modalità di interazione che verranno discusse nel capitolo 5), mentre le macchine sono riproduzione di macchine la cui esistenza ed il cui uso è documentato a partire dall’800.

Pertanto il tipo di influenza delle metafore che viene indagata nelle due sperimentazioni riguarda solo alcune fra quelle individuate nello schema di figura 3. In figura 6 abbiamo indicato con le frecce in grassetto le dipendenze direttamente indagate o implicate nelle questioni oggetto dell’indagine.

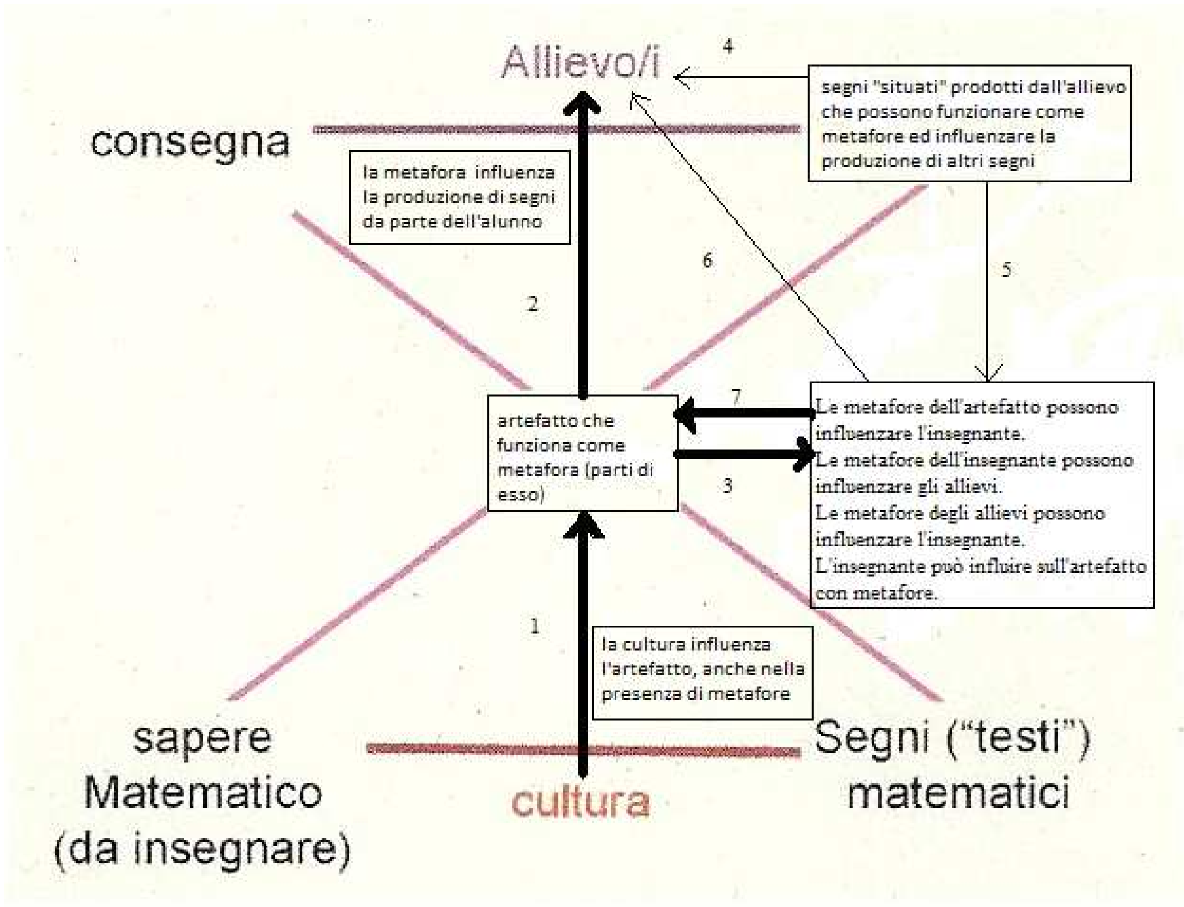


Figura 6

In particolare, nelle ipotesi di ricerca, siamo interessati all'effetto che la metafora (nei testi o nella macchina) ha direttamente sugli studenti (freccia 2), la macchina può avere caratteristiche che funzionano come metafore e che derivano da come sono state progettate, quindi dalla cultura che le ha prodotte (freccia 1), i testi sono stati progettati dall'esperto (sperimentatore) che ha introdotto in essi metafore, in maniera consapevole o meno, (freccia 7). Infine per la progettazione dei testi che si riferivano ad una macchina (nella seconda sperimentazione) lo sperimentatore può essere stato influenzato dalle caratteristiche della macchina che potevano funzionare come metafore (freccia 3).

Come vedremo le sperimentazioni sono state pensate per analizzare queste dipendenze e non le altre. Non indagheremo, ad esempio, il modo in cui durante le attività un esperto potrebbe utilizzare le metafore per guidare gli studenti verso l'appropriazione di significati matematici, oppure il modo in cui alcune metafore prodotte dagli stessi studenti possono influire sulle loro stesse produzioni.

4.2 Le domande di ricerca ed il modello di mediazione semiotica

Nel paragrafo 3.2 abbiamo cercato di integrare la metafora nel modello della mediazione semiotica, questo si collega direttamente alle due domande di ricerca generali che ci hanno guidato (capitolo 1 par. 5.4):

1. Da quali elementi dipende la produttività ai fini didattici di una metafora?

2. Quali possono essere le conseguenze in termini di misconcezioni ed ostacoli che le analogie associate alle metafore possono generare ?

Con le sperimentazioni cerchiamo di indagare la prima di queste domande nel caso specifico di metafore contenute in alcuni artefatti ed indagando le dipendenze che abbiamo chiarito nel paragrafo precedente. Potremmo aggiungere una ulteriore domanda, che si collega direttamente a queste, ma che è centrata sull'insegnante:

3. Come può l'insegnante utilizzare in maniera produttiva e consapevole le metafore presenti (effettivamente o potenzialmente) durante l'attività di insegnamento-apprendimento?

Ci sembra chiaro che queste domande richiedano sperimentazioni ed analisi che non si possono esaurire in una ricerca come questa, ma piuttosto necessitino di un vero e proprio programma di ricerca. In particolare l'uso produttivo e consapevole delle metafore implica che l'insegnante sappia giudicare quando la metafora può portare ad una analogia che, a sua volta, può creare misconcezioni che, se derivano da conoscenze-ostacolo, possono essere ostacoli (nel senso già chiarito). E questo, come abbiamo argomentato, richiede studi approfonditi e sul lungo periodo. Riprenderemo queste domande nel capitolo 6, nel quale cercheremo di discutere alcuni episodi tratti dalle sperimentazioni in modo da prendere in considerazione alcuni di questi aspetti che non erano il focus delle sperimentazioni stesse. In particolare prenderemo in considerazione il potenziale uso da parte dell'insegnante (freccia 6) di metafore generate dagli studenti, il modo in cui possono influenzare l'insegnante (freccia 5), riferendoci quindi alle dipendenze che sono evidenziate in figura 7.

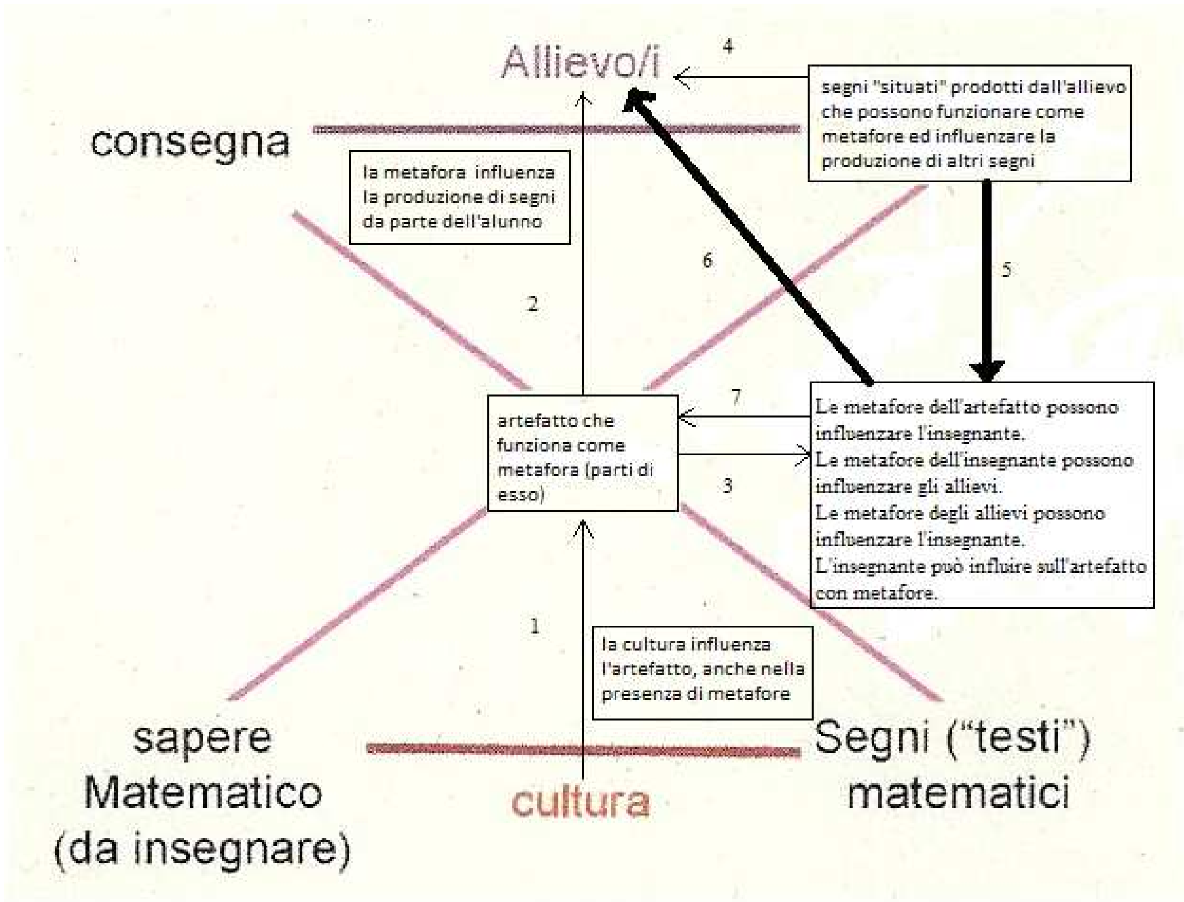

Allievo/i
4
segni "situati" prodotti dall'allievo che possono funzionare come metafore ed influenzare la produzione di altri segni
consegna
la metafora influenza la produzione di segni da parte dell'alunno
6
5
2
7
artefatto che funziona come metafora (parti di esso)
Le metafore dell'artefatto possono influenzare l'insegnante.
Le metafore dell'insegnante possono influenzare gli allievi.
Le metafore degli allievi possono influenzare l'insegnante.
L'insegnante può influire sull'artefatto con metafore.
3
1
la cultura influenza l'artefatto, anche nella presenza di metafore
sapere Matematico (da insegnare)
cultura
Segni ("testi") matematici

Figura 7

Capitolo 4

In questo capitolo vengono presentate in dettaglio le prime ipotesi di ricerca, che sono già state introdotte nel primo capitolo (par. 5.4), spiegando la scelta delle variabili da indagare. Illustriamo la metodologia ed il progetto del primo esperimento e la sua effettuazione. Infine valutiamo l'esito dell'esperimento relativamente alle ipotesi di ricerca. Proponiamo alcune osservazioni che ci sono parse interessanti per le domande di ricerca e che vengono riprese nei capitolo seguenti. Infine avanziamo alcune nuove ipotesi di ricerca le quali vengono studiate nel capitolo 5.

1. Primo esperimento: obiettivi e ipotesi di ricerca

In questo paragrafo chiariamo gli obiettivi del primo esperimento e giungiamo alla formulazione delle prime ipotesi di ricerca dopo avere considerato e discussi alcune fra le variabili di interesse. Discutiamo e cerchiamo di giustificare il tipo di esperimento proposto ed il tipo di task proposto agli studenti. Entriamo nei dettagli delle modalità di esecuzione nel paragrafo 2.

1.1 Obiettivi del primo esperimento

Il primo esperimento è stato pensato avendo in mente la prima delle domande generali di ricerca che abbiamo formulato nel capitolo 1 (par. 5.4):

1. *Da quali elementi dipende la produttività ai fini didattici di una metafora?*

Nel perseguire questo primo obiettivo vengono anche messa alla prova "sul campo" le definizioni proposte di metafora e di analogia, dato che a tali definizioni si farà riferimento nella scelta, nel riconoscimento e nell'uso di metafore e di analogie ad esse associate.

Nel raffinare la domanda 1 precedente, in modo da giungere a precise ipotesi di ricerca che siano adatte ad essere valutate in una sperimentazione, dobbiamo analizzare alcune fra le possibili variabili che possono incidere sulla produttività della metafora. In particolare, dato il modello di insegnamento-apprendimento che abbiamo presentato nel capitolo 3 (par. 2.3), siamo interessati a verificare quale sia il peso, relativamente alla produttività di una metafora, delle variabili che dipendono dall'insegnante e quello delle variabili che sono, in qualche modo, intrinseche alla metafora stessa. Nel prossimo paragrafo prenderemo in considerazione e discuteremo alcune di queste variabili. Quindi possiamo stabilire che gli obiettivi di questa prima sperimentazione sono:

a- valutare la dipendenza della produttività di una metafora/similitudine da alcune possibili variabili durante un processo di insegnamento-apprendimento;

b- valutare se la definizione proposta è utile a descrivere fenomeni che avvengono durante un processo di insegnamento-apprendimento.

1.2 Analisi delle variabili da valutare e prime ipotesi di ricerca

Per quanto riguarda l'individuazione di variabili ed il ruolo che possono svolgere nel processo di insegnamento-apprendimento, possiamo riferirci alle parole di Arzarello, il quale scrive: " *Riassumendo, molti ricercatori italiani concordano nel dire che fare RDM oggi significa studiare i processi di insegnamento-apprendimento della matematica in tutta la loro complessità in quanto sistemi dinamici. Ciò vuol dire che essi sono analizzati (o per lo meno dovrebbero esserlo) come processi dove le diverse componenti vivono assieme, nel concreto in cui ciò avviene.*" (Arzarello, 2000, p.210). Questo rende chiara, crediamo, la difficoltà di individuare, in generale, variabili che siano indipendenti e che siano significative per gli obiettivi che si pone il ricercatore. Il carattere sistemico del processo di insegnamento-apprendimento comporta il non semplice isolamento di cause prime, ovvero di variabili che si possano significativamente isolare e considerare come cause degli effetti che si vogliono analizzare, ammesso che questo obiettivo si possa perseguire. Per queste ragioni siamo consapevoli della difficoltà che si impone nella scelta di alcune variabili da considerare, e sappiamo che ogni scelta è soggetta a critiche e miglioramenti. Tuttavia pensiamo che il processo di ricerca in sé sia un processo dinamico che, partendo da situazioni iniziali anche approssimate o sfumate, può permettere successivi raffinamenti e miglioramenti.

Alcune variabili che possono influire sull'esperimento

Per iniziare la nostra analisi, ci pare che le variabili che potevano influire sul risultato, si possano raggruppare come segue:

- Variabili dipendenti dall'insegnante (sperimentatore);
- Variabili dipendenti dal compito proposto;
- Variabili dipendenti dagli alunni;
- Variabili ambientali.

Fra le *variabili che dipendono dall'insegnante (sperimentatore)* consideriamo:

- credibilità dell'insegnante (sperimentatore): modo con cui presenta il lavoro e se stesso;
- ruolo svolto dall'insegnante (sperimentatore): tipo di interazione con gli alunni, obiettivi che si pone nella relazione di insegnamento-apprendimento o di sperimentazione;
- nel caso di presenza contemporanea di insegnante e sperimentatore può essere importante il tipo di interazione insegnante/sperimentatore;
- azioni e strategie comunicative che adotta durante il processo di insegnamento-apprendimento.

Fra le *variabili che dipendono dal compito proposto* consideriamo:

- tipo obiettivo del compito: quelli descritti precedentemente;
- tipo di problema proposto;
- tipo di lavoro: singoli alunni, coppie, piccoli gruppi..;
- caratteristiche della metafora utilizzata: registro semiotico usato, sua estensione;
- variabili testuali: in quale contesto (nel testo proposto) si inserisce la metafora, tipo e caratteristiche del testo utilizzato: stile della narrazione, tipo di narrazione (scritta, orale, grafico-pittorica, video..).

Fra le *variabili che dipendono dagli alunni* consideriamo:

- motivazione, obiettivi a medio e lungo termine;
- visione che hanno della scuola;
- visione che hanno della matematica (o delle scienze in generale);
- livello di collaborazione o competizione;
- tipo di organizzazione che assumono;
- conoscenze e competenze che possiedono;
- età degli alunni.

Fra le *variabili ambientali* che possono influire sull'esperimento consideriamo:

- tempi a diposizione: numero di sessioni di lavoro, tempo per ogni sessione, frammentazione del lavoro, parte della giornata dedicata alle sessioni (prima mattinata, tarda mattinata, pomeriggio..);
- come viene vista l'attività di sperimentazione: considerata come attività curricolare o extra-curricolare, obbligatoria o facoltativa;
- continuità del lavoro: assenza o presenza di alunni, assenza o presenza degli insegnanti;
- accettazione dell'esperimento in classe: come viene vissuto dagli alunni e come viene presentato dal loro insegnante e dalla scuola in generale (momento di svago, lavoro serio di formazione o approfondimento, momento di valutazione..);
- credibilità dell'insegnante/sperimentatore: modo con cui viene visto dalla classe, dagli altri insegnanti, dalla scuola in generale.

Una prima selezione delle variabili

Alcune di queste variabili sono valutabili a priori, altre solo a posteriori o durante lo svolgimento delle attività. Per questo scegliamo di formulare le prime ipotesi di ricerca considerando solo quelle variabili che possiamo controllare a priori tramite la progettazione dei testi e tramite la definizione delle azioni dello sperimentatore e dell'insegnante. Prendiamo in considerazione e cerchiamo di valutare altre variabili (quando possibile) durante le attività e nell'analisi a posteriori (valutazione finale). Le variabili scelte devono servire a valutare alcuni degli aspetti interessanti per il quadro teorico adottato. In particolare siamo interessati:

- alla dipendenza della produttività metaforica dalle *caratteristiche intrinseche della metafora*; ovvero da come è fatta, da quale registro semiotico usa, da quali domini mette in relazione. Per esempio da:

    - natura implicita o esplicita della metafora all'interno del testo. Ovvero se la metafora è oggetto esplicito di attenzione da parte del testo oppure no (ma è comunque presente);
    - registro semiotico con il quale la metafora viene espressa all'interno del testo;
    - estensione della metafora (quantità di informazioni che fornisce, capitolo 1);
    - coerenza interna della metafora;

- alla dipendenza della produttività metaforica dalla *mediazione dell'insegnante/sperimentatore*: ovvero da come la metafora viene presa in considerazione o utilizzata come produttrice di analogie in seguito all'interazione con l'insegnante/sperimentatore;

- alla dipendenza della produttività metaforica da alcune *variabili ambientali* (tipo di lavoro: singoli, coppie, gruppi, tempi..) e *testuali* (tipo di testo ed artefatti utilizzati: solo scritto, con dialoghi o senza, scritto e grafico-pittorico, video, artefatti fisici come la riga ed il compasso..).

Scelta definitiva delle variabili

Delle possibili variabili sopra analizzate, ne abbiamo scelte solo alcune, sia in base alla importanza prevista (ovviamente questa importanza era una ipotesi da verificare) sia alla semplicità di valutazione. In particolare, data l'importanza riconosciuta dagli studiosi agli aspetti narrativi del testo per il coinvolgimento in attività di insegnamento-apprendimento (Egan, 1989; Bruner, 1991; Corni F., Mariani C., Laurenti E., 2010; Mariani, Giliberti, Corni, 2010), consideriamo la dipendenza della produttività metaforica dal tipo di testo proposto:

- *impersonale*: testo scritto in maniera impersonale, senza dialoghi;

- *dialogato*: testo che contiene dialoghi fra due o più personaggi.

Ci aspettiamo che la produttività possa dipendere dal tipo di testo, in altre parole che la presenza, nel testo, di più *voci* (nel senso chiarito nel capitolo 3), possa incidere sul riconoscimento ed utilizzo delle metafore in esso presenti. L'idea implicita è che il testo in forma dialogica possa favorire un maggiore coinvolgimento emotivo, e che questo possa avere effetti anche sulla attenzione posta sulla metafora e sulla sua interpretazione.

Inoltre ci aspettiamo che il riconoscimento ed utilizzo di una metafora dipenda dal fatto che essa compaia in diversa forma:

- *esplicita*: nel testo la metafora è resa esplicita, il significato del testo (parte di esso) fa riferimento ad essa;

- *implicita*: nel testo la metafora è presente in forma non esplicita, ovvero una parte del testo può essere vista come metafora ma il significato del testo non pone l'attenzione su di essa.

Nel seguito presentiamo alcuni esempi che rendono più chiara questa distinzione.

Per quanto detto, la nostra scelta finale, relativamente valutazione della dipendenza della produttività metaforica, è ricaduta sulle seguenti variabili:

- *interazione con l'esperto (insegnante o sperimentatore);*

- *natura implicita/esplicita della metafora;*

- *natura impersonale/dialogata del testo.*

Il tipo di interazione ipotizzata fra studenti ed esperto viene chiarita successivamente, quando definiamo nel dettaglio il task proposto agli studenti nell'esperimento. Con riferimento alla figura 2 successiva, l'artefatto posto al centro è un testo (un problema come descriviamo in seguito) che contiene una metafora, le variabili che consideriamo riguardano :

- dipendenza della produttività (per gli studenti) da una caratteristica del testo e dal tipo di metafora in esso contenuta, (freccia 2);

- dipendenza della produttività (per gli studenti) da una specifica azione dell'insegnante sugli studenti relativa alla metafora contenuta nel testo (freccia 6);

Nella scelta che abbiamo compiuto abbiamo cercato di individuare, anche in base alle nostre aspettative, variabili che fossero sia analizzabili e sia significative per gli obiettivi dell'esperimento. Questa scelta non è facile, può accadere che le variabili più significative restino difficili da individuare (e quindi difficili da valutare) e, viceversa, che variabili facili da valutare non si rivelino significative (Cobb, Confrey, diSessa, Lehere, Schauble, 2003).

Formulazione delle prime ipotesi di ricerca

Dopo avere definito le variabili sulle quali concentrare il primo esperimento, nella figura 1 sono sintetizzate le prime ipotesi di ricerca. E' evidente che sono molto più specifiche e limitate nella portata rispetto alla prima domanda di ricerca ma questo ci pare inevitabile se si vuole avere la possibilità di fare un esperimento e trarre qualche informazione con i limiti di tempo imposti per una ricerca come questa. Nelle ipotesi compaiono le dipendenze attese relativamente alle caratteristiche intrinseche del testo (dialogato o impersonale) e della metafora (esplicita o implicita) in esso contenuta e l'azione dell'insegnante (che viene chiarita in seguito).

Prime ipotesi di ricerca

I1: Nel caso di testi con metafora esplicita l'uso della stessa per costruire una analogia non dipende dalla forma impersonale o dialogata del testo;

I2: Nel caso di testo con metafora implicita c'è dipendenza dalla forma del testo e mi aspetto che nel testo dialogato ci sia maggiore facilità ad utilizzare la metafora;

I3: Nel caso di testo con metafora implicita c'è una forte dipendenza dall'intervento dell'insegnante/sperimentatore indipendentemente dal testo;

I4: Nel caso di testo con metafora esplicita una c'è una dipendenza minore, rispetto al caso precedente, dall'insegnante/sperimentatore per l'interpretazione della metafora.

Figura 1

Ipotesi di ricerca in qualche modo assomiglianti a queste sono state formulate da alcuni ricercatori, per esempio Julo (Julo, 1990) analizza l'effetto di caratteristiche superficiali sulla risoluzione di alcuni problemi e la dipendenza della stabilità della rappresentazione da alcuni interventi mirati dell'insegnante (suggerimenti). In tale studio non si parla di metafora, ma ci pare che si potrebbe leggere il nostro problema anche in termini di cambiamenti di rappresentazione, ovvero la metafora potrebbe servire allo studente, nel momento in cui la nota e la usa (con o senza intervento dell'insegnante), come modo per collegare il problema ad un altro dominio di conoscenza (analogia), che può servire a rappresentarlo (capitolo 1 par. 5.3). Nel caso di metafore implicite, la dipendenza dalla loro presenza nel testo per l'attivazione del collegamento analogico può forse essere messo in relazione con il *priming*, si veda per esempio (Spellman, Holyoak, Morrison, 2001), nel senso che una parte del testo funziona (o può funzionare) come attivatore di una analogia, anche se il contenuto di tale parte di testo (la metafora implicita) non è portato al centro dell'attenzione di chi legge dal significato del testo, come nella frase. In uno studio più recente Elia, Gagatsis e Demetriou (Elia, Gagatsis, Demetriou, 2007) studiano gli effetti che diverse rappresentazioni di un problema possono avere sui processi cognitivi degli studenti.

1.3 Il tipo di esperimento e task proposti

L'esperimento

L'esperimento che proponiamo deve, nelle nostre intenzioni, consentire la valutazione delle precedenti ipotesi sperimentali che riguardano *l'individuazione e l'uso di metafore*. Non siamo interessati al successivo (eventuale) sviluppo ed ai problemi di modellizzazione che possono seguire l'utilizzo di una analogia. Siamo interessati alla *fase iniziale* di questo ideale percorso (vedere capitolo 1):

individuazione di una metafora → individuazione di una analogia → uso dell'analogia per la risoluzione del problema dato (modello);

Per questa ragione il tipo di attività sperimentale che proponiamo si delinea come *esperimento didattico*, nel quale lo sperimentatore e l'insegnante interagiscono con gli studenti secondo modalità predefinite e coerenti con le ipotesi sperimentali da mettere alla prova. Ci pare che l'esperimento che proponiamo abbia alcune delle caratteristiche del paradigma della *Ricerca in Didattica* nella presenza di una analisi a-priori dei comportamenti attesi, e del paradigma della *Ricerca Sperimentale*, nel tentativo di controllare alcune delle condizioni sperimentali (Spagnolo, 2009). Possiamo forse inquadrare questo primo esperimento come un esperimento di *ricerca teorica* che, tuttavia, ha l'obiettivo di integrarsi in un modello che è nato e si sviluppa nell'ambito della *ricerca per l'innovazione* (Bartolini Bussi, 1998).

Come descriviamo più in dettaglio nel prossimo paragrafo, l'intervento sperimentale in ogni classe dura soltanto due ore, e il principale obiettivo non è quello di insegnare alcuni specifici contenuti matematici (che pure ci sono) ma quello di analizzare la relazione fra alcune variabili in una fase precisa del processo di insegnamento-apprendimento. Anche l'analisi che proponiamo relativamente ai protocolli (Appendice1) si concentra solo su questa fase e non indaghiamo le fasi successive (che sono in certi casi presenti) o altre forme di interazione che non abbiamo interpretato come pertinenti per i nostri fini.

Quindi anche se la metafora è stata definita (nel capitolo 1) come un particolare segno che abbiamo successivamente inquadrato (nel capitolo 3) nel modello della mediazione semiotica, l'esperimento non viene progettato ed analizzato secondo questo modello, dato che gli obiettivi, come abbiamo già affermato, non sono didattici. Questa modalità può evidentemente essere criticata da diversi punti di vista, fra i quali, quello secondo noi più rilevante, è il fatto che il comportamento degli studenti, rispetto all'interazione con l'insegnante e nell'interpretazione del testo, può cambiare a seconda che l'attività si svolga in condizioni sperimentali controllate (come nell'esperimento appunto) oppure in un "normale" processo di insegnamento-apprendimento, nel quale gli studenti e l'insegnante interagiscono liberamente e non vengono osservati.

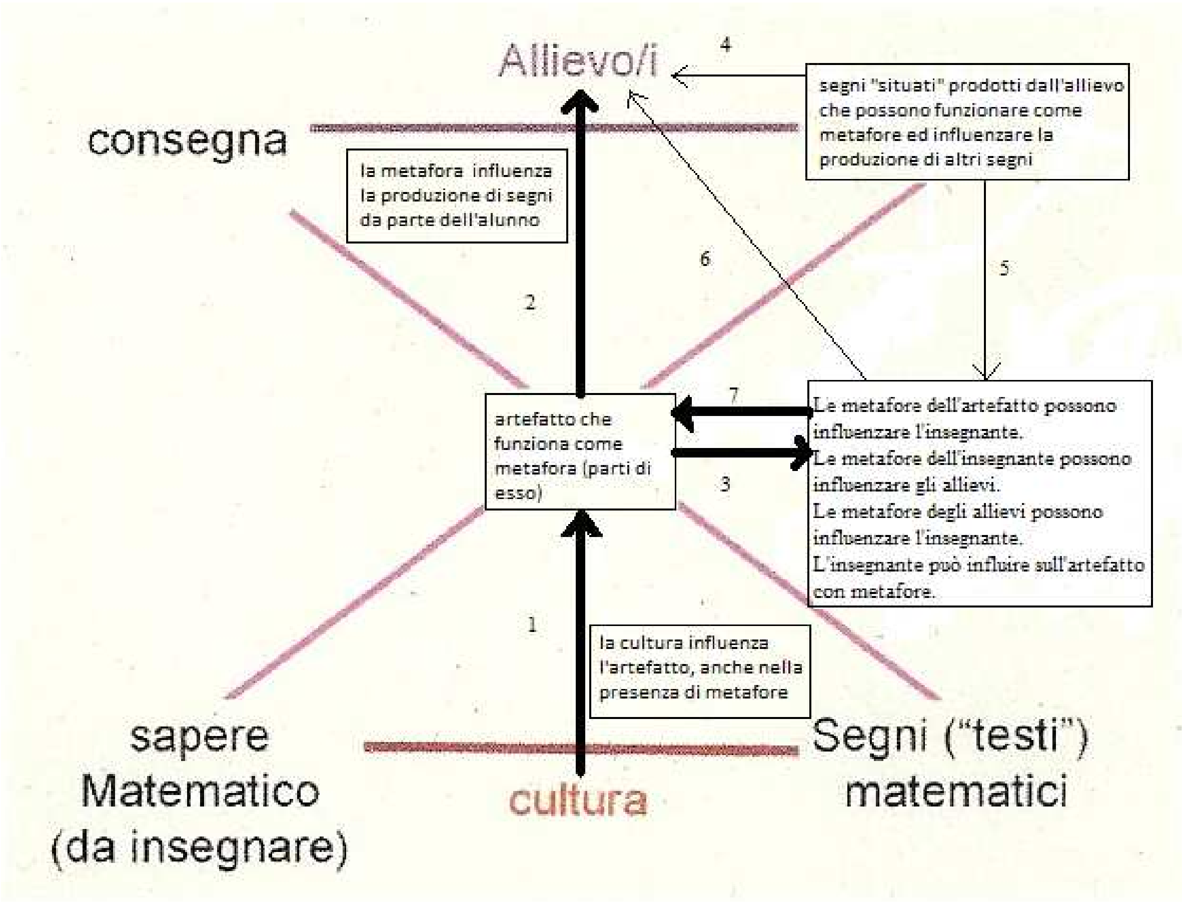


Figura 2

In riferimento alla figura 2, nel primo esperimento sono coinvolte:

- Influenza della metafora contenuta nel testo sulle produzioni degli studenti (freccia 2): questo è uno dei principali obiettivi dell'esperimento come abbiamo scritto nelle ipotesi di ricerca di figura 1;

- Influenza dello sperimentatore nelle metafore presenti nel testo (freccia 7), non necessariamente quelle che lo sperimentatore ha pensato nell'analisi a-priori e nella progettazione del testo, ma anche eventuali altre metafore, introdotte in maniera inconsapevole (questo può venire analizzato in fase di analisi a-posteriori);

Altre dipendenze che possono essere rilevanti (analizzate a-posteriori), sono:

- Influenza di metafore, presenti nella cultura, sul testo progettato (freccia 1);
- Influenza di metafore presenti nel testo sull'insegnante (freccia 3) che può produrre metafore che influenzano gli studenti (freccia 6).

Il task

Per questo primo esperimento abbiamo scelto come tipologia di task la soluzione di problemi descritti da un testo, tipologia nota in letteratura come *word problems* (Greer, 1997). Questa scelta è dovuta, in parte, dalla somiglianza con il tipo di attività che generalmente vengono proposte durante le lezioni, in modo da non cambiare eccessivamente, almeno nel primo esperimento, il tipo di richiesta che gli alunni sono abituati ad affrontare, ed in parte per avere un maggiore controllo su alcune delle variabili in gioco. Nella seconda sperimentazione (capitolo 6) il tipo di attività sarà diversa, e riguarda un diverso campo di esperienza.

Scegliere come tipo di task la risoluzione di problemi matematici scritti significa porsi all'interno di un ambito la cui letteratura è molto vasta e sviluppata (Verschaffel, Greer, Van Dooren, Mukhopadhyay, 2009). Tale ambito comprende ricerche sorte per indagare i diversi interrogativi che sono stati posti relativamente ai problemi che sorgono quando si analizza una attività si risoluzione di problemi in matematica. Fra tali problemi c'è quello della modellizzazione (Palm, 2009) e del corretto utilizzo di modelli in testi che descrivono situazioni problematiche potenzialmente reali (Verschaffel, Greer, Van Dooren, Mukhopadhyay, 2009, p.xii). La presupposta corrispondenza fra modelli e realtà che si riscontra nell'uso tradizionale dei problemi in matematica (Verschaffel, Greer, Van Dooren, Mukhopadhyay, 2009, p. xiv) non è sempre giustificata e nell'attività di risoluzione di problemi, i modelli che vengono sfruttati o costruiti dagli alunni potrebbero non essere corrispondenti alla realtà descritta dal problema. Relativamente a quest'ultimo punto abbiamo già specificato che non siamo interessati ad analizzare le modalità con le quali le analogie associate alle metafore possono servire alla modellizzazione.

I problemi matematici possono essere considerati anche come genere didattico che è esistito sin dall'antichità. In quanto tale un tipo di problema può portare l'impronta su come la matematica era usata e valutata ed anche sul clima economico e sociale del proprio tempo (Swetz, 2009). Questo significa che i problemi hanno caratteristiche che possono dipendere anche dalla loro origine storica e geografica. Inoltre è stato ipotizzato (Gerofsky, 2004, 2009) che alcuni tipi di problemi possano avere svolto un ruolo preciso nelle società pre-algebriche, ovvero come esempi paradigmatici (modelli?) che potevano servire a raggiungere una certa generalità in mancanza di una notazione opportuna e di metodi algebrici.

Una questione che per i nostri obiettivi è piuttosto importante è quella relativa all'importanza delle caratteristiche del testo che influiscono sulle scelte risolutive degli studenti, molti studi dimostrano che spesso (soprattutto con i bambini) sono le caratteristiche superficiali, come parole chiave, che influiscono su tale scelta. Inoltre le descrizioni verbali di situazioni dipendono da regole di interpretazione che sono tacitamente accettate, e tali regole sono molto sensibili al contesto socio-culturale e a variabili emotive (Greer, 1997; Zan, 1998). Un fatto ampiamente riconosciuto nell'ambito della ricerca sull'insegnamento-apprendimento matematico, e che può interessare anche noi per l'esperimento, è la " *netta frattura fra problemi reali e problemi scolastici sia a livello di caratteristiche strutturali che a livello di processi risolutivi. Ad esempio P. Nesher (1980) riferisce che molti bambini cui viene chiesto 'Quale sarà la temperatura dell'acqua in un recipiente se ci metti una caraffa d'acqua a 80°F e una a 40°F?' rispondono '120°F'. Se però agli stessi bambini viene posto il problema reale 'Come diventa l'acqua se in un recipiente metti acqua calda ed acqua fredda?' essi rispondono 'Tiepida'* " (Zan, 1998, p.27).

La logica di costruzione che abbiamo utilizzato per i testi (l'artefatto della figura 2) è sintetizzabile come segue:

- *Problema* formulato con un *testo T;*
- Il *testo T* può contenere una *metafora M;*
- Dalla *metafora M* si può generare una *analogia A;*
- *L'analogia A* può servire a *risolvere il problema.*

Durante l'esperimento gli studenti lavorano a piccoli gruppi (3 o 4 componenti) in modo da avere maggiori possibilità che la metafora venga individuata ed utilizzata a partire dalla discussione nel gruppo. Inoltre la presenza di più studenti che lavorano assieme stimola la discussione e quindi l'emergenza di più voci rappresentanti differenti punti di vista. Una parte di questi gruppi funge da controllo, ovvero il problema proposto a questi non contiene la metafora che è oggetto di studio. Dato il numero relativamente basso di gruppi (38) non utilizziamo metodi statistici. La valutazione è basata su un confronto qualitativo fra il comportamento dei gruppi le cui attività vengono analizzate a "grana media", nel senso che non analizziamo il dettaglio delle interazioni fra studenti ma ci limitiamo a sintetizzarne le attività in momenti prestabiliti utilizzando anche i protocolli scritti.

2. Metodologia utilizzata

2.1 Organizzazione dell'esperimento

In ogni classe viene proposta una sessione di lavoro di due ore, da svolgere senza interruzioni, in modo da non introdurre discontinuità con effetti difficilmente valutabili ed in modo da non incidere troppo sulle attività curricolari della classe. Il lavoro in classe viene organizzato a gruppi di tre-quattro alunni e a ciascun gruppo viene consegnato un differente testo. I gruppi vengono formati con l'aiuto dell'insegnante, in modo che siano omogenei relativamente alle conoscenze e competenze matematiche, nella convinzione che questo possa migliorare l'efficacia del lavoro a gruppi. L'esperimento non prevede una fase teorica iniziale, ma solo una breve introduzione al lavoro successivo, poi la classe viene suddivisa in gruppi, con l'aiuto dell'insegnante, e a ciascun gruppo consegnato un testo. Prima di assegnare i testi a ciascun gruppo, viene spiegata la consegna agli alunni senza fare alcun riferimento agli obiettivi dell'esperimento (che ovviamente non coincide con la consegna che hanno gli alunni). Agli alunni di ciascun gruppo raccomandiamo di collaborare fra di loro ma di non comunicare, relativamente alle consegne assegnate, con gli altri gruppi.

All'insegnante, che resta presente durante le attività, spieghiamo a grandi linee l'obiettivo dell'esperimento e gli/le proponiamo di partecipare e concordando alcune tipologie di intervento (che spieghiamo in seguito). Agli alunni di ciascun gruppo chiediamo di produrre testi scritti finali ed osserviamo ciascun gruppo registrando gli eventi più significativi relativamente agli obiettivi dell'esperimento. Non è prevista una discussione finale di bilancio con tutta la classe ma si provvede a chiarire le possibili soluzioni con ciascun gruppo al momento della consegna del lavoro finale. Per la valutazione dell'esperimento vengono utilizzati i testi prodotti degli alunni, le registrazioni dello sperimentatore, le osservazioni dell'insegnante e quanto emerge dalla discussione con i gruppi durante il lavoro (le schede utilizzate vengono descritte in seguito). L'analisi dei testi prodotti è di tipo qualitativo, con l'obiettivo di valutare la presenza o assenza delle dipendenze ipotizzate e la dipendenza da altre variabili non direttamente prese in considerazione nei testi proposti.

2.2 Ruoli dello sperimentatore e dell'insegnante: azioni previste

Agli insegnanti delle classi viene proposto di essere presenti durante la sperimentazione e di aiutare lo sperimentatore a gestire le attività. In particolare a contribuire alla iniziale formazione di gruppi omogenei, alla disposizione dei gruppi nell'aula ed alla successiva gestione delle attività secondo alcuni accordi:

- se uno studente fa domande relative al testo, l'insegnante e lo sperimentatore si devono consultare e decidere il tipo di risposta da dare indicandolo nel registro attività (descritto in seguito);
- non si deve suggerire (tramite parole, gesti o altro) l'interpretazione delle metafore presenti nei testi e nemmeno dare suggerimenti utili a risolvere il problema anche con altri metodi;
- l'insegnante può aiutare lo sperimentatore ad interpretare le dinamiche di classe e ad interpretare le produzioni dei gruppi (anche in relazione alle conoscenze pregresse degli alunni) ed in base alle caratteristiche specifiche dei componenti dei gruppi.

Come abbiamo detto, non prevediamo una fase teorica iniziale (lezione) ma, dopo una breve presentazione del lavoro e la suddivisione in gruppi, consegniamo loro i materiali per le attività.

Nella fase iniziale di ogni sessione indichiamo il tipo di lavoro che gli alunni devono fare, mettendo bene in chiaro che:

- il lavoro fa parte di una ricerca che lo sperimentatore sta conducendo e non viene stato usato per valutarli;

- quello che ci interessa è osservare quello che fanno e vedere se si verificano alcuni fatti specifici al centro della ricerca, ma senza specificare cosa. Il loro obiettivo è comunque quello specificato dal testo;

- eventuali chiarimenti vengono forniti durante il lavoro dallo sperimentatore e dall'insegnante;

- invitiamo gli studenti a scrivere, disegnare, spiegare tutto quello che veniva discusso nel gruppo, attraverso fogli consegnati all'inizio dell'attività ad ogni gruppo;

- chiariamo che in ogni gruppo gli alunni devono discutere e collaborare fra di loro in modo costruttivo ma che ogni gruppo deve lavorare in maniera indipendente dagli altri, senza collaborazioni o scambi di idee o materiali fra diversi gruppi, visto che questo può incidere sull'esperimento alterando i dati;

- il comportamento dello sperimentatore e dell'insegnante non è uguale rispetto a tutti i gruppi durante l'attività perché l'obiettivo della sperimentazione prevede azioni diverse a seconda del tipo di attività proposte. Quindi il diverso comportamento non deve essere interpretato come disattenzione verso alcuni di loro o preferenza verso altri.

Nell'attività proposta ai gruppi prevediamo tre tipi di attività relativamente all'insegnante e allo sperimentatore, per ognuna delle quali l'intervento dello sperimentatore è diverso:

- *attività di interpretazione e comprensione del problema*: in queste attività l'intervento dello sperimentatore (e quello dell'insegnante) sono limitate a condurre il gruppo ad una comprensione del problema posto, senza introdurre elementi o esempi che possano già indicare una soluzione o metafore. Gli interventi vengono trascritti nella maniera più completa possibile nel registro delle attività;

- *attività di esplorazione, trasformazione, formulazione di ipotesi, rappresentazione, risoluzione*: in questa fase l'intervento dello sperimentatore (e quello dell'insegnante) si limitano all'osservazione, ad eventuali domande di chiarimento ai gruppi per l'interpretazione di quello che stanno facendo ed alla registrazione degli eventi tramite il registro attività;

- *attività di individuazione, interpretazione e della metafora e suo uso per lo sviluppo di una analogia:* questo è il focus della sperimentazione e le azioni dello sperimentatore vengono riassunte in figura 3. In questa consideriamo come significative tutte le attività degli alunni che siano centrate o sulla metafora proposta (in forma implicita od esplicita) o su altre metafore che possono sorgere in maniera spontanea e finalizzate alla soluzione del problema. Possono essere parole, gesti, disegni, rappresentazioni..ecc. In questi casi viene chiesto al gruppo di scrivere quello che dicono ed viene registrato l'evento sul registro attività.

Come sintetizzato nella seguente tabella in figura 3, le azioni previste rispetto alle variabili oggetto della sperimentazione sono solo dello sperimentatore e sono soltanto quelle descritte, ovvero:

- registrazione dei tempi di accadimento di alcuni fatti (nel registro attività);
- porre l'attenzione su una metafora nel caso che il gruppo non l'abbia ancora fatto (dopo un certo tempo): questo sia con frasi sia con gesti che vengono registrati;
- proporre una prima analogia ai gruppi che hanno già individuato la metafora ma che non l'hanno ancora sfruttata per generare una analogia (dopo un certo tempo): questo viene fatto proponendo alcune corrispondenze fra due domini e registrando quanto detto.

Tabella delle azioni previste dello sperimentatore

Situazioni / tipo di testo	S1:individuano la metafora	S2:non individuano la metafora	S3:generano una analogia a partire dalla metafora individuata	S4:non generano analogie a partire dalla metafora individuata
Nessuna metafora	Registro il fatto ed il tempo trascorso dall'inizio	Nessuna azione	Registro il fatto ed il tempo trascorso dall'inizio	Nessuna azione
Metafora implicita o esplicita	Registro il fatto ed il tempo trascorso dall'inizio	Dopo un certo tempo (es.1 ora) pongo l'attenzione sulla metafora e registro il fatto	Registro il fatto ed il tempo trascorso dall'inizio	Dopo un certo tempo trascorso dall'individuazione della metafora (es.1/2 ora) propongo una analogia a partire dalla metafora e registro il fatto

Figura 3

2.3 La scelta dei problemi da proporre

Versioni dei problemi

A partire dal numero di classi disponibili e dal fatto che vogliamo testare le variabili descritte in precedenza proponendo uno stesso testo almeno due volte, abbiamo scelto 3 diversi problemi (descritti in quanto segue). Ciascuno di tali problemi è presentato in 6 possibili versioni differenti, a seconda del tipo di testo usato (impersonale o dialogato), del tipo di metafora (nessuna metafora, metafora implicita o esplicita), come viene schematizzato nella figura 4. L'utilizzo di un problema senza metafora ha l'obiettivo di testare anche il caso nullo, ovvero di vedere come gli alunni affrontano il problema senza uso esplicito o implicito di metafore (controllo). Gli altri due tipi di testo hanno lo scopo di differenziare, come abbiamo già descritto, due possibili modi con cui una metafora può entrare in un testo, in forma *esplicita* oppure *implicita*. Quindi, dato un particolare problema P1 (nell'esperimento ne utilizziamo tre indicati con P1, P2 e P3) consideriamo 6 possibili versioni (testi) secondo la tabella:

Problema P1	Nessuna metafora	Metafora implicita	Metafora esplicita
Testo impersonale	P1_Ipr_NM	P1_Ipr_Mi	P1_Ipr_Me
Testo dialogato	P1_Dia_NM	P1_Dia_Mi	P1_Dia_Me

Figura 4

I problemi

Nella scelta di problemi da proporre nel primo esperimento ci siamo basati, oltre che sulla nostra esperienza personale (di studenti prima e di insegnanti poi), anche sulla consultazione di alcuni testi potenzialmente utili. I criteri che ci hanno guidato per la scelta sono stati:

a) la possibilità che il problema si possa risolvere tramite una analogia in modo da poterlo riformulare con la presenza di opportune metafore di collegamento;

b) l'accessibilità da parte di alunni di tutte le classi della superiore (dalla prima alla quinta) perché questo è il tipo di target al quale il primo esperimento è rivolto.

Fra i primi due problemi che abbiamo scelto ci sono alcune somiglianze, sia nella situazione descritta che in uno dei possibili modi per risolverlo:

Problema 1:Consideriamo un tino di forma cilindrica graduato e con tre rubinetti nel suo fondo, di diverso diametro che servono a svuotare il tino. La capacità del tino è di 50 l. Riempiendo il tino e lasciandolo svuotare, si impiegano 10 minuti col rubinetto più largo, 15 minuti con quello medio e 20 minuti con quello più stretto. Quanto tempo si impiegherà aprendo tutti i rubinetti?

Problema 2: *Si vuole riempire una vasca di 300l di capienza con dell'acqua pompandola da un laghetto vicino. Usando la pompa A la vasca si riempie in 20 minuti, usando la pompa B in 30 minuti ed usando la pompa C in 10 minuti. Quanto tempo si impiegherà utilizzando le tre pompe assieme?*

Il secondo problema si può trovare, in diverse versioni, nei libri di testo di scuole medie inferiori e superiori (ad esempio tre imbianchini con tempi diversi di imbiancatura..ecc.) ed è simile a problemi che hanno una origine antica e la cui presenza è documentata nella storia di varie civiltà del passato: per esempio questo tipo di problemi si trova, come scrive Martzloff (Martzloff, 1997, p.52), in un testo matematico cinese del 1247 ed anche nell'Antologia greca di Metrodoro (6° secolo) (Paton, 1979). Il primo problema, è simile al secondo con alcune differenze che ci sembrano interessanti ai fini dell'utilizzo di metafore (ed analogie) per trovare una soluzione. Il primo problema è strettamente legato al problema del calcolo della velocità di fuoriuscita dell'acqua da un foro in un recipiente, questione della quale si è occupato già Torricelli (Torricelli, 1664), il quale nello studio "*Sul moto delle acque*" ha proposto il suo principio, in analogia con la legge di caduta dei gravi di Galileo (Vedere Appendice 2 nella quale discutiamo una possibile soluzione). Tale problema si presta a considerazioni matematiche e quindi a modellizzazioni più avanzate rispetto al secondo. Come abbiamo spiegato non è la modellizzazione il focus dell'esperimento, ma ci pare interessante vedere come gli alunni posso reagire, anche nei termini di riconoscimento di metafore e loro uso, posti di fronte ad un problema somigliante al secondo ma con qualche differenza che può rivelarsi importante.

Per il terzo problema abbiamo pensato di cambiare completamente i domini che potenzialmente potevano essere messi in corrispondenza e quindi abbiamo scelto un problema che può essere agevolmente risolto, con le competenze matematiche degli alunni, interpretando geometricamente i dati contenuti nel piano cartesiano. Quindi il collegamento atteso è con il dominio della geometria analitica. Il problema, tratto da (Brandi, Salvadori, 2004) con alcune modifiche al testo, è il seguente:

Problema 3*: Volendo noleggiare una macchina per viaggiare per un giorno, immaginiamo di avere le tre possibili opzioni:*

- *A- quota fissa di 20 euro più 0,25 euro per Km percorso*
- *B- quota fissa di 26 euro più 0,20 euro per Km percorso*
- *C- franchigia di 50 Km (ovvero per distanze percorse giornalmente inferiore a 50 Km vengono comunque pagati 50 Km) più 0,5 euro per Km percorso*

Quindi possiamo esprimere matematicamente il costo delle tre opzioni come segue:

$c_A = 20 + 0,25d$; $c_B = 26 + 0,20d$; $c_A = \begin{cases} 25 & 0 < d \leq 50 \\ 0,5d & d > 50 \end{cases}$ *dove d è la distanza percorsa in Km*

Quale delle tre opzioni conviene adottare in funzione del numero di Km che intendiamo percorrere?

L'Allegato1_ProblemiItaliano contiene tutte le 18 versioni dei tre problemi P1, P2 e P3 in italiano.

2.4 Le possibili metafore legate ai testi scelti e possibili comportamenti degli studenti: analisi a priori

Le metafore inserite nei testi

Nei testi proposti abbiamo aggiunto alcune parole, frasi o simboli che, secondo la nostra ipotesi, possono funzionare come metafore (implicite o esplicite) e quindi favorire l'individuazione di una analogia fra due domini.

Consideriamo prima i alcuni dei testi con le metafore che abbiamo considerato *esplicite*, che sono in grassetto:

P1_Ipr_Me

Consideriamo un tino di forma cilindrica graduato e con tre rubinetti nel suo fondo, di diverso diametro e che servono a svuotare il tino. La capacità del tino è di 50 l ed il volume contenuto è leggibile osservando il livello del liquido sulla sua scala graduata.

*Riempiendo il tino e lasciandolo svuotare aprendo solo il rubinetto più largo, il livello del liquido impiega 10 minuti per scendere fino al fondo del tino, impiega invece 15 minuti aprendo solo quello medio e 20 minuti con quello più stretto. Quanto tempo serve per svuotare il tino se si aprono tutti i rubinetti?**Si può pensare che il livello dell'acqua letto sulla scala graduata si muova verso il basso ad una certa velocità.***

P2_Dia_Me

Guido vuole riempire una vasca di 300l di capienza con dell'acqua pompandola da un laghetto vicino e chiede informazioni a suo papà che di solito compie quell'operazione:

G:Papà vorrei riempire la vasca che è vuota, quale pompa posso usare per fare prima?

P:allora…noi abbiamo tre pompe, se vuoi fare prima puoi usarle tutte insieme…dunque..quella *rossa ci mette 20 minuti..quella gialla 30 minuti e quella verde 10 minuti.*

G:E se le uso insieme quanto tempo ci mettono?

P:.non ho mai provato…ci devo pensare..magari chiediamolo a Marta che è sempre brava in questo tipo di cose…sai io sono bravo con il giardino ma per i numeri è meglio lei

Guido spiega il problema alla sorella maggiore Marta che si mette a pensare e dopo poco dice a Guido:

*M:**mi pare che sia come se ci fosse una certa distanza da percorrere**…*

G: come?

*M: **si…se si usa una pompa più veloce l'acqua sale più velocemente e raggiunge prima il bordo della vasca, come se ci fosse una distanza da percorrere ad una certa velocità**…*

Quale è il ragionamento che ha in mente Marta? Provate a rispondere facendo continuare il dialogo fra Guido, Marta ed il papà

P3_Ipr_Me

Volendo noleggiare una macchina per viaggiare per un giorno, immaginiamo di avere le tre possibili opzioni:

- *A- quota fissa di 20 euro più 0,25 euro per Km percorso*
- *B- quota fissa di 26 euro più 0,20 euro per Km percorso*
- *C- franchigia di 50 Km (ovvero per distanze percorse giornalmente inferiore a 50 Km vengono comunque pagati come 50 Km) più 0,5 euro per Km percorso*

Quindi possiamo esprimere matematicamente il costo delle tre opzioni come segue:

$c_A = 20 + 0{,}25d$; $c_B = 26 + 0{,}20d$; $c_A = \begin{cases} 25 & 0 < d \le 50 \\ 0{,}5d & d > 50 \end{cases}$ *dove d è la distanza percorsa in Km*

***Tali equazioni possono essere interpretate come rette**. Quale delle tre opzioni conviene adottare* *in funzione del numero di Km che intendiamo percorrere?*

Figura 5

Seguono alcuni dei testi con le metafore che abbiamo considerato *implicite*, che sono in grassetto (nell'ultimo caso consideriamo come metafora implicita le equazioni che contengono la x e la y e possono favorire un collegamento con la rappresentazione sul piano cartesiano):

P1_Dia_Mi

Carlo sta giocando con un tino che suo papà Mario usa per fare il vino. Tale tino è di forma cilindrica ed è graduato ed ha tre rubinetti nel suo fondo, di diverso diametro e che servono a svuotare il tino quando si deve imbottigliare il vino.

Mario:"Carlo, cosa stai combinando con il mio tino?"

Carlo: "Niente, mi diverto a riempirlo di acqua fino a questo segno..e poi faccio uscire l'acqua dal rubinetto…ma cos' è questo segno?"

M: "indica il volume che occupa il ***vino quando lo raggiunge****…vedi c'è scritto 50 l..significa 50 litri..quando il* ***livello del vino arriva qua*** *vuol dire che ci sono 50 litri di vino, se poi il livello è diverso basta leggere in questa linea graduata."*

C:" capito….adesso lo riempio d'acqua e misuro il tempo che ci mette a svuotarsi quando apro i rubinetti.. "

M:"…e come fai con l'acqua che esce?"

C:"riempio questi secchi e poi alla fine la uso per riempire di nuovo il tino.."

M:"..ingegnoso..bene..bene..magari prova a calcolare i tempi per ognuno dei rubinetti..vedi che hanno diametri diversi…magari i tempi sono diversi…"

Carlo misura i tre tempi, e trova che per svuotare il tino impiega 10 minuti col rubinetto più largo, 15 minuti con quello medio e 20 minuti con quello più stretto. A quel punto torna il papà che gli propone a un problema, sapendo a Carlo la matematica piace e se la cava bene:

M:".vediamo se riesci a capire, senza fare la prova, quanto tempo ci mette il tino a svuotarsi se *apriamo tutti i rubinetti insieme...”*

C:”..ma è difficile..sicuramente fa ancora prima…ma come faccio a dire esattamente quanto?”

Come può ragionare Carlo? Come prosegue il dialogo*?*

P2_Ipr_Mi

Si vuole riempire una vasca di 300l di capienza con dell’acqua pompata da un laghetto vicino. Usando la pompa A ***l’acqua raggiunge il bordo*** *della vasca in 20 minuti, usando la pompa B* ***lo raggiunge*** *in 30 minuti ed usando la pompa C in 10 minuti. Quanto tempo si impiegherà per riempire la vasca utilizzando le tre pompe assieme?*

P3_Ipr_Mi

Volendo noleggiare una macchina per viaggiare per un giorno, immaginiamo di avere le tre possibili opzioni:

- *A- quota fissa di 20 euro più 0,25 euro per Km percorso*
- *B- quota fissa di 26 euro più 0,20 euro per Km percorso*
- *C- franchigia di 50 Km (ovvero per distanze percorse giornalmente inferiore a 50 Km vengono comunque pagati 50 Km) più 0,5 euro per Km percorso*

Quindi possiamo esprimere matematicamente il costo in funzione dei Km percorsi delle tre opzioni come segue:

$A: y = 0{,}25x + 20$; $B: y = 0{,}20x + 26$; $C: y = \begin{cases} 25 & 0 < x \leq 50 \\ 0{,}5x & x > 50 \end{cases}$ *dove x è la distanza percorsa in Km ed y è il costo*

Quale delle tre opzioni conviene adottare in funzione del numero di Km che intendiamo percorrere?

Figura 6

Consideriamo le parti in grassetto come metafore basandoci sulla definizione che abbiamo proposto nel capitolo 1. Quelle contenute in figura 5 sono esplicite dato che il collegamento fra domini è il contenuto sul quale verte il senso della frase. Quelle contenute in figura 6 sono implicite dato che il collegamento fra domini è implicito e non è il contenuto principale sul quale verte la parte di testo considerata.

Le metafore e le possibili analogie associate

Nella tabella seguente sintetizziamo le possibili metafore e le analogie che ci aspettiamo di vedere nei protocolli degli alunni:

Testo	Metafore possibili	Analogie possibili derivate
Problema 1	Corrispondenza fra volume dell'acqua che diminuisce ed un punto che si muove su di una retta	Come l'acqua esce dal tino con un certo tempo, il punto (indicato dal livello dell'acqua) scende lungo la retta (scala graduata del tino) con lo stesso tempo. Quindi si può ragionare sul punto che scende ed interpretare il tempo come tempo in cui il tino si svuota. Aprire tutti i rubinetti è analogo ad aumentare la velocità del punto che si muove lungo la retta.
Problema 2	Corrispondenza fra volume dell'acqua che occupa un volume ed un punto che si muove su di una retta	L'acqua raggiunge il bordo della vasca in un certo tempo così come un punto che si muove su di un segmento partendo da un estremo raggiunge l'altro estremo. Gli estremi del segmento corrispondono alle situazioni vasca vuota e vasca piena e la posizione del punto sul segmento corrisponde alla quantità di acqua che è entrata nella vasca. Usare più pompe contemporaneamente corrisponde ad aumentare la velocità del punto sul segmento.
Problema 3	Corrispondenza fra una equazione lineare ed una retta, fra una coppia di numeri ed un punto sul piano. Nel caso P3_Ipr_Mi, consideriamo l'uso delle variabili x ed y come una possibile metafora che può fare interpretare l'equazione come una retta.	Come in un certo intervallo di valori il costo in un caso è più basso che il costo in un secondo caso, anche la prima retta starà sotto la seconda nello stesso intervallo si valori. Così come per certi valori il costo per due casi è uguale, anche le rette passeranno per gli stessi punti, ovvero si intersecano.

Figura 7

Possibili comportamenti e strategie degli studenti

Tentativi di soluzione senza uso delle analogie ipotizzate

In generale, per tutti i problemi, è possibile che gli studenti trovino strade per risolverli che non necessitano delle analogie che abbiamo pensato. Per esempio potrebbero:

- Risolvere P2 calcolando le portate dei rubinetti singoli, poi sommarle per ricavare la portata complessiva ed usarla poi per ricavare il tempo si svuotamento;

- Risolvere P1 in maniera analoga a quella precedente senza considerare la differente situazione fisica di portata non costante;

- Risolvere P3 facendo delle prove e cercando la soluzione migliore, senza utilizzare metodi geometrici.

Tentativi di soluzione con uso esplicito delle analogie ipotizzate

Consideriamo alcuni dei comportamenti che ci aspettiamo nel caso che gli studenti individuino le metafore e le utilizzino nel modo che abbiamo previsto in figura 7.

Per quanto riguarda il problema P2, alcune possibilità sono:

- gli studenti associano il moto del liquido al moto di un punto su un segmento che rappresenta il volume della vasca ma non sanno come procedere;

- gli studenti associano il moto del liquido al moto di un punto su un segmento che rappresenta il volume della vasca, associano le velocità a questo punto ma non sanno come procedere;

- gli studenti arrivano fino al punto precedente e continuano ipotizzando di poter sommare le velocità al punto quando si usano le diverse pompe e calcolano il tempo di riempimento;

Nella successiva figura 8, ipotizziamo una possibile soluzione da parte degli studenti.

Esempio di possibile strategia (analogica) adottata dagli studenti

Il volume della vasca viene rappresentato con un segmento di lunghezza data che indichiamo con V. Il riempimento della vasca con ciascuna delle pompe viene associato al moto uniforme di un punto sul segmento che parte da un estremo (per esempio quello a sinistra) e giunge all'altro nel tempo indicato dal testo (tempo di riempimento). Quindi abbiamo tre velocità:

$$v_1 = \frac{V}{T_1} \qquad v_2 = \frac{V}{T_2} \qquad v_3 = \frac{V}{T_3}$$

nell'ipotesi di applicare un ragionamento analogico con il moto di un punto, si può inferire che il moto del punto, quando tutte le pompe sono in funzione, sia un moto uniforme con velocità data dalla somma:

$$v_f = v_1 + v_2 + v_3 = \frac{V}{T_1} + \frac{V}{T_2} + \frac{V}{T_3}$$

Quindi si calcola il tempo di riempimento quando le tre pompe funzionano assieme, ragionando sul tempo che il punto impiega per percorrere il segmento di lunghezza V.

$$T = \frac{V}{v_f} = \frac{V}{\frac{V}{T_1} + \frac{V}{T_2} + \frac{V}{T_3}} = \frac{1}{\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3}}$$

Figura 8

Per quanto riguarda il problema P1 alcune possibilità sono:

- gli studenti associano il moto del liquido al moto del punto che ne indica il livello sulla scala graduata del tino, associano le velocità a questo punto ma non sanno come procedere;

- gli studenti arrivano fino al punto precedente e continuano ipotizzando di poter sommare le velocità al punto quando si aprono entrambi i rubinetti, ma poi non sanno quali velocità associare al moto del punto;

- gli studenti giungono fino al punto precedente ed ipotizzano di poter usare come velocità le velocità medie;

- gli studenti associano il moto del liquido al moto del punto che indica il livello sulla scala graduata, ipotizzano di sommare le velocità quando si aprono entrambi i rubinetti. Si rendono conto che le velocità non sono costanti ed ipotizzano un moto decelerato ma non procedono ulteriormente;

- Gli studenti arrivano al punto precedente ed utilizzano le conoscenze sul moto rettilineo uniformemente accelerato per calcolare le velocità del punto in funzione della posizione, le sommano, e provano a calcolare il tempo complessivo.

- Gli studenti potrebbero proporre una strategia risolutiva analoga a quella della figura 8, considerando le velocità come velocità medie (con gli opportuni cambiamenti dovuti alle caratteristiche del problema).

Per quanto riguarda il problema P3, alcune possibilità sono:

- Gli studenti associano le equazioni a rette ma non sanno come procedere;

- Gli studenti associano le equazioni a rette, le disegnano sul piano, determinando i punti di intersezione ma non sanno come utilizzare i grafici fatti;

- Gli studenti giungono fino al punto precedente, comprendono che le rette di interesse per il problema sono quelle che sono al di sotto delle altre e capiscono che i punti di intersezione sono i punti nei quali cambia la convenienza delle diverse opzioni.

2.5 La valutazione delle ipotesi di ricerca

Nell'analisi delle produzioni degli studenti, consideriamo gli episodi nei quali viene sfruttata la metafora da noi inserita per iniziare a costruire una analogia potenzialmente utile per la soluzione del problema. Nei casi nei quali ha senso consideriamo la gradualità con la quale l'analogia associata alla metafora può essere sviluppata (come abbiamo delineato nel paragrafo precedente).
Per valutare la dipendenza della produttività della metafora dal *tipo di metafora* (*esplicita* o *implicita*) consideriamo anche i tempi richiesti per la presa in considerazione delle metafore.

Per valutare la dipendenza della produttività della metafora *dall'azione dell'insegnante* confrontiamo i casi nei quali l'intervento non è necessario con quelli nei quali lo è.

In particolare confrontiamo i casi nei quali entro un certo tempo (circa un'ora) la metafora esplicita od implicita del testo non diviene produttiva (ovvero non è viene sfruttata dagli alunni per produrre l'analogia attesa od un'altra analogia) ed a questo è seguito uno stimolo da parte dello sperimentatore per fare prendere in considerazione la metafora.

Per valutare la dipendenza dalla variabile *testo dialogato/testo impersonale* confrontiamo i protocolli relativi a problemi dello stesso tipo verificando se ci sono evidenze di un differente comportamento nei due casi (a parità di tipo di problema e di tipo di metafora esplicita od implicita).

2.6 Altri materiali da utilizzare nell'esperimento

Per lo svolgimento delle attività, oltre ai testi con i problemi che vengono consegnati ad ogni gruppo (Allegato1_ProblemiItaliano e Allegato2_ProblemiPortoghese), lo sperimentatore registra gli avvenimenti utilizzando un registro delle attività strutturato come segue:

Registro Attività

Classe :________________________________:

Sessione:__________Data:_______________

Tempo	Gruppo	Descrizione evento	Azioni sperimentatore	Azioni insegnante

Ad intervalli variabili (dai 5 agli 8 minuti circa), viene aggiornata l'attività di ogni gruppo, andando a chiedere cosa stanno facendo gli studenti, quali problemi hanno, e cosa stanno scrivendo. Quindi viene aggiunta una riga di informazione al registro, scrivendo il tempo al quale avviene l'aggiornamento, il codice del gruppo, i contenuti dello scambio con lo sperimentatore (Descrizione evento), le azioni dello sperimentatore, le domande fatte, gli eventuali stimoli proposti e previsti dalle azioni della figura 3 (Azioni sperimentatore) e gli eventuali interventi dell'insegnante (Azioni insegnante).

Per l'organizzazione dei lavori in ogni singolo incontro, viene utilizzata una scheda, strutturata come segue:

Scheda Gruppi

Classe :______________________

Gruppo	Componenti	Testo assegnato

In tale scheda viene scritta la classe (Classe), il codice del gruppo (Gruppo), i nomi dei componenti del gruppo (Componenti) e il codice del testo assegnato (Testo assegnato).

Per facilitare il compito (dello sperimentatore) di assegnare ad ogni gruppo un codice per la registrazione, all'inizio della sessione viene fissato sul banco dei gruppi un foglio identificativo come quello che segue (che è un esempio), in modo da poter immediatamente associare a ciascun gruppo il codice precedentemente definito ed il tipo di testo assegnato.

Foglio identificativo

Gruppo: G1_1

Testo: P1_Dia_Me

3. Esecuzione dell’esperimento ed analisi dei protocolli

3.1 Tempi, modi ed organizzazione dell’esperimento

I contatti che lo sperimentatore aveva in Brasile (lavoro precedente in una scuola italo-brasiliana) hanno permesso l’organizzazione di un periodo di permanenza in questo paese e di sperimentazione in una scuola brasiliana. Anche se questo non è il focus delle ipotesi di ricerca, questa opportunità può servire per fare un confronto con due contesti socio-culturali differenti. Per questa ragione il primo esperimento viene svolto in parte in Brasile ed in parte in Italia. Eventuali differenze vengono discusse a posteriori.

Organizzazione

Le modalità di organizzazione delle attività sono quelle descritte nel paragrafo 2 precedente, con alcuni dettagli aggiuntivi che sintetizziamo di seguito:

Classi che hanno partecipano: 1° (18 alunni), 2°(17), 3°(9), 4°(10) liceo scientifico della scuola italo-brasiliana Fundaçao Torino con sede a Belo Horizonte (Brasile), e classi 2°(21), 3°(22), 4°(18) liceo scientifico e 4° (19) itis meccanici del Polo “Montessori-Da Vinci” di Porretta Terme (Bo);

Periodo in cui si svolge l’esperimento: febbraio-maggio 2012;

Durata complessiva di 16 ore;

Tipo di attività proposta agli alunni: Seguendo quanto scritto nel paragrafo 2.1, in ogni classe sono stati individuati, con l’aiuto dell’insegnante, di 3 o 4 alunni (in alcuni casi non è stato possibile ed il gruppo si è ridotto a 2 alunni). Ad ogni gruppo è stato consegnato un foglio identificativo del gruppo e del problema che è stato fissato sul tavolo con la funzione di identificare più facilmente il gruppo ed il tipo di problema al quale hanno lavorato durante l’attività. In ogni classe è stata proposta 1 sessione di lavoro di 2 ore senza interruzioni. In ogni sessione è stato proposto un problema diverso per ogni gruppo e nei casi in cui non è stato possibile (numero di gruppi maggiore di 3) sono state proposte versioni diverse dello stesso problema ad alcuni gruppi. In quest’ultimo caso i gruppi con versioni diverse dello stesso problema sono stati collocati in zone non adiacenti della classe, per evitare possibili influenze. Ogni gruppo doveva produrre testi scritti finali. Ciascun gruppo è stato osservato registrando gli eventi più significativi relativamente agli obiettivi dell’esperimento. Non è stata fatta una discussione finale di bilancio con tutta la classe ma si è provveduto a chiarire le modalità possibili di soluzione con ciascun gruppo al momento della consegna, anche se non sempre questo è stato possibile.

Segue la suddivisione delle classi in gruppi e l'assegnazione di un codice identificativo (per semplificare la gestione delle attività, la raccolta e l'analisi dei dati):

Classi	Gruppi
3°liceo scientifico Brasile (9 alunni):C1	**G1_1:G1_2:G1_3**
4°liceo scientifico Brasile (10): C2	**G2_1:G2_2:G2_3**
1°liceo scientifico Brasile (18):C3	**G3_1:G3_2:G3_3:G3_4**
2°liceo scientifico Brasile (17): C4	**G4_1:G4_2:G4_3:G4_4**
3°liceo scientifico Italia (22): C5	**G5_1:G5_2:G5_3:G5_4:G5_5:G5_6**
2°liceo scientifico Italia(21): C6	**G6_1:G6_2:G6_3:G6_4:G6_5:G6_6**
4°liceo scientifico Italia (18):C7	**G7_1:G7_2:G7_3:G7_4:G7_5:G7_6**
4°itis meccanica Italia (19):C8	**G8_1:G8_2:G8_3:G8_4:G8_5:G8_6**

Figura 8

Le assegnazioni sono state fatte in modo che:

- in ogni sessione non ci fossero due gruppi a lavorare sullo stesso tipo di problema, ovvero con lo stesso tipo di testo (impersonale o dialogato) e con lo stesso tipo di metafora (nessuna, implicita od esplicita);

- ogni tipo di problema venisse affrontato almeno due volte (da due diversi gruppi) nel corso di tutte le attività;

Tali assegnazioni sono state usate anche nella preparazione delle schede gruppi (paragrafo 2.6).

Segue l'assegnazione dei problemi ai diversi gruppi e le date delle sessioni:

Data	Gruppo	Testo consegnato
14/02/2012	G1_1	P1_Dia_Me
	G1_2	P2_Ipr_NM
	G1_3	P3_Ipr_Mi
24/02/2012	G2_1	P1_Dia_NM
	G2_2	P2_Ipr_Mi
	G2_3	P3_Ipr_Me
19/03/2012	G3_1	P2_Ipr_Me
	G3_2	P3_Dia_NM
	G3_3	P1_Dia_Mi
	G3_4	P1_Dia_Me
23/03/2012	G4_1	P3_Ipr_Mi
	G4_2	P1_Dia_NM
	G4_3	P2_Dia_Mi
	G4_4	P2_Ipr_Me
	G5_1	P1_Ipr_NM
	G5_2	P3_Dia_Me

28/04/2012	**G5_3**	**P1_Ipr_Me**
	G5_4	**P2_Dia_Mi**
	G5_5	**P2_Dia_Me**
	G5_6	**P3_Ipr_Me**
02/05/2012	**G6_1**	**P2_Ipr_Mi**
	G6_2	**P1_Ipr_Mi**
	G6_3	**P2_Dia_NM**
	G6_4	**P3_Dia_NM**
	G6_5	**P3_Ipr_NM**
	G6_6	**P1_Dia_Me**
	G7_1	**P1_Ipr_Me**
	G7_2	**P2_Dia_NM**
	G7_3	**P1_Dia_Mi**

05/05/2012	**G7_4**	**P3_Ipr_NM**
	G7_5	**P3_Dia_Mi**
	G7_6	**P2_Ipr_NM**
16/05/2012	**G8_1**	**P2_Ipr_Me**
	G8_2	**P1_Ipr_Mi**
	G8_3	**P3_Dia_Me**
	G8_4	**P1_Ipr_NM**
	G8_5	**P2_Dia_Me**
	G8_6	**P3_Dia_Mi**

Figura 9

Il contesto delle scuole e delle classi

Le due scuole

Parte delle informazioni che vengono descritte nel seguito derivano dall'esperienza lavorativa personale dello sperimentatore, che è insegnante di ruolo nella scuola italiana ed ha lavorato per un anno (2002) nella scuola brasiliana. Parte delle informazioni derivano da colloqui personali con alcuni degli insegnanti che lavorano in queste scuole e con gli studenti. La scuola italiana, "Polo Montessori-Da Vinci" di Porretta Terme è una scuola statale localizzata sull' appennino tosco-emiliano, in Emilia Romagna e a pochi chilometri dal confine con la Toscana. Da sempre è afflitta da un forte turn-over degli insegnanti che, se non sono nativi o stabilizzati in tale regione, tendono ad "avvicinarsi" a Bologna, con conseguenze negative sulla continuità nelle classi. Anche la dirigenza della scuola tende spesso a cambiare, con ulteriori effetti negativi sulle scelte strategiche e sull'organizzazione generale. La scuola, nel suo complesso, gode di buona considerazione fra i suoi utenti e le famiglie, che ne apprezzano la serietà, l'affidabilità e l'offerta formativa (la scuola è test center AICA per il patentino ECDL, organizza da molti anni spettacoli teatrali e musical, e porta avanti diversi altri progetti). Il Polo comprende diversi licei (scientifico, linguistico, scienze umane, economico sociale), istituti tecnici (meccanica, meccatronica e energia; elettronica ed elettrotecnica; informatica e telecomunicazioni; chimica, materiali e biotecnologie) e istituti professionali (servizi commerciali). Gli studenti che la frequentano appartengono a tutte le categorie sociali.

La *escola internacional e centro de lingua e cultura italiana* "Fundaçao Torino", con sede a Belo Horizonte (terza città del Brasile come numero di abitanti), è un istituto parificato, nato come scuola privata italiana per le famiglie che si trasferivano dall'Italia per lavorare nello stabilimento della FIAT. Con gli anni la scuola si è resa indipendente dalla FIAT. La scuola offre un programma di studi che parte dall'asilo per arrivare alle superiori e alla formazione. In particolare essa comprende: scuola materna, scuola elementare, medie, liceo scientifico, liceo delle scienze umane, istituto tecnico per l'amministrazione. È molto ben considerata e conosciuta, anche se è una scuola "per pochi", nella quale le famiglie pagano rette mensili superiori a quelle delle altre scuole private. Le famiglie degli studenti sono benestanti e la scuola è situata in uno dei quartieri più ricchi della città. I programmi tendono ad integrare la cultura brasiliana con quella italiana, alcune lezioni sono svolte in italiano ed altre in portoghese e questo a partire dalla materna. Per questa ragione gli studenti delle superiori parlano tutti anche la lingua italiana, anche se non allo stesso livello della madrelingua portoghese. In matematica i programmi sono gli stessi della scuola italiana, i libri in adozione nei diversi indirizzi sono testi italiani ed è stata fatta la scelta di avere insegnanti italiani sia per l'insegnamento dell'italiano, della storia e della filosofia che della matematica (almeno al liceo scientifico). Gli insegnanti sono trattati bene dall'istituto, con stipendi al di sopra della media e con diversi benefici, e anche questo contribuisce alla loro lunga permanenza nella scuola, garantendo continuità. Un problema che alcuni degli insegnanti vivono è il clima a volte troppo "aziendale" e poco trasparente in alcune delle scelte dell'amministrazione.

Le classi

Il lavoro nelle classi brasiliane è stato facilitato dal modo con il quale i due insegnanti hanno presentato agli studenti l'attività di sperimentazione nelle classi, infatti è stato vissuto da tutte le classi con impegno e partecipazione. Gli insegnanti sono sempre stati presenti e, anche se non hanno partecipato sostanzialmente alla gestione attiva della classe durante le attività (e lo si può rilevare dai pochi interventi che sono nei registri), hanno contribuito a mantenere un clima positivo e serio nella classe. Il clima in classe era tranquillo, i rapporti fra gli studenti durante le attività sono parsi buoni, non conflittuali (per quello che si può dire da un intervento di due ore) ed il rapporto con l'insegnante è parso rispettoso anche se non distaccato, forse per la giovane età di entrambi gli insegnanti. Il numero non alto di studenti delle classi ha permesso di formare meno gruppi in ogni classe (al massimo quattro) e questo ha inciso sia sul clima che sulla gestione delle attività e la raccolta di dati.

Nelle classi italiane l'organizzazione e la gestione delle classi è stata, in qualche caso, più difficoltosa, in parte per i problemi degli insegnanti. Infatti uno degli insegnanti si è trasferito durante l'anno dopo che aveva già accettato di partecipare e non potendo essere presente durante la sessione di lavoro; tutto questo, crediamo, ha influito sull'atteggiamento degli studenti, rendendoli meno tranquilli e vivendo l'esperienza non con il massimo dell'impegno. In un secondo caso, in seguito ad un litigio con l'insegnante dell'ora precedente, parte di una classe non è riuscita a immergersi nell'attività con l'impegno da noi auspicato. Il numero di alunni di tutte le classi era maggiore rispetto al caso brasiliano, questo ha comportato la necessità di formare un maggiore numero di gruppi e, di conseguenza, maggiori difficoltà per la gestione e la raccolta dati. Gli insegnanti delle classi (a parte i casi già detti) hanno partecipato alle attività anche con interesse per la novità rappresentata dal tipo di lavoro proposto. Anche in questo caso gli interventi attivi degli insegnanti durante il lavoro sono stati sporadici. Altre informazioni specifiche per ogni classe si trovano all'inizio di ogni sessione di lavoro nel registro attività (Allegato0_ProtocolliPriSpe).

3.2 I protocolli

I protocolli derivanti dalle attività si trovano in Allegato0_ProtocolliPriSpe. In questo allegato sono trascritti dagli originali (scritti a mano), per ogni sessione di lavoro, i registri delle attività (paragrafo 2.6). Tale allegato contiene anche una sintesi per ciascun gruppo di lavoro che lo sperimentatore ha scritto subito dopo gli interventi, integrando le informazioni dei registri attività con quanto prodotto dagli studenti, ovvero i loro protocolli (testi, disegni, schemi..) e con le impressioni che lo sperimentatore ha registrato subito dopo la fine di ogni sessione. Questo con il fine di riuscire a registrare anche quelle impressioni o scambi verbali che non erano stati registrati e che potevano servire a completare il quadro delle attività. I protocolli degli studenti sono stati scannerizzati e posti alla fine del registro di ogni sessione.

3.3 Difficoltà organizzative, di gestione, e osservazioni metodologiche

Uso videocamera

Inizialmente avevamo pensato di utilizzare una videocamera per filmare alcune fasi della sperimentazione in classe. Alla prova dei fatti, tuttavia, la gestione della video-camera è stata piuttosto difficoltosa perché nei momenti in si è deciso di usarla, non sono stati colti "al volo" gli episodi più significativi, inoltre la riduzione del campo visivo dello sperimentatore aveva effetti anche sulla sua attenzione. Non abbiamo giudicato utili i pochi filmati prodotti e non li usiamo per le valutazioni. In Italia non ho abbiamo usato la video-camera dato che si è guastata ed inoltre sarebbe stato ancora più difficoltoso per il maggior numero di gruppi.

Protocolli scritti

Nonostante i ripetuti stimoli a scrivere quanto pensavano, discutevano o decidevano, i protocolli prodotti non rispecchiano fino in fondo quanto avvenuto durante il lavoro. Pare che l'idea degli alunni (esattamente come avviene durante i compiti in classe normali) sia quella di limitarsi al risultato finale, presentando i risultati in forma matematica (calcoli, equazioni…) senza tutta la storia che li ha prodotti e limitando fortemente la parte verbale/scritta. (Questa, ci pare, che sia una attitudine presente anche nell'insegnamento tradizionale della matematica dove vengono presentati i risultati "puliti", senza commentare o dare importanza anche a tutto il travaglio che li ha prodotti, potrebbe essere forse un effetto del contratto didattico implicito?). Nel caso degli alunni brasiliani, il problema non risiede nella lingua perché gli alunni avevano la possibilità di scegliere di scrivere in italiano o in portoghese.

Uso dei dialoghi scritti

Abbiamo provato a spingere esplicitamente alcuni gruppi a scrivere dei dialoghi che sintetizzassero il loro lavoro. In generale alcuni dei concetti che erano presenti nel lavoro sono stati chiariti, crediamo tuttavia che per riuscire ad ottenere una migliore rappresentazione di quello che avviene nel gruppo serva più tempo e probabilmente una diversa organizzazione all'interno dei gruppi. Anche con le classi italiane abbiamo provato a spingere esplicitamente alcuni gruppi a scrivere dei dialoghi che sintetizzassero il loro lavoro. Non ci possiamo dire soddisfatti, speravamo che con il dialogo apparissero più elementi interessanti mentre spesso erano semplici traduzioni troppo sintetiche.

Numero di gruppi

Abbiamo verificato che, con i vincoli imposti (uno sperimentatore e l'insegnante in ciascuna classe), quando il numero di gruppi da gestire è maggiore di tre, la possibilità di cogliere gli avvenimenti in maniera efficace diminuisce sensibilmente. Anche con tre gruppi l'analisi che lo sperimentatore è riuscito a svolgere (in assenza di altri collaboratori o senza videocamere fisse) è una analisi a "grana grossa", nel senso che non si è potuto cogliere e registrare in dettaglio i dialoghi all'interno di ogni gruppo ma ci si è limitati a sintetizzare lo stato del lavoro di ciascun gruppo in alcuni momenti. In Italia la maggiore numerosità delle classi ha reso necessario avere un maggior numero di gruppi (nella convinzione, in parte derivata dall'esperienza dello sperimentatore come insegnante, che gruppi con più di 4 persone siano poco efficaci e siano dispersivi). Questo ha avuto effetti anche sulle registrazioni che sono state più distribuite e quindi più sintetiche. Non siamo riusciti ad approfondire tutti i punti di interesse perché questo avrebbe portato a tralasciare completamente alcuni gruppi.

Coinvolgimento insegnanti

Mentre in Brasile c'è stata collaborazione, anche se non sempre attiva rispetto alla sperimentazione, in Italia non siamo riusciti a coinvolgere tutti gli insegnanti, soprattutto per il fatto che alcuni hanno confermato la loro disponibilità molto tardi e con tempi molto ristretti per l'organizzazione. Inoltre, in due casi l'insegnante curricolare non era presente e solo in un caso l'insegnante ha aiutato nella creazione dei gruppi e nella gestione della classe durante il lavoro.

Tipo di classi coinvolte

Un aspetto critico può essere stato il fatto che su 8 classi 7 sono state prese dal liceo scientifico e solo una dall'itis. Poteva essere interessante variare maggiormente la tipologia di classi. Alcune osservazioni potrebbero infatti dipendere proprio da questo. Purtroppo non c'era molta scelta perché abbiamo potuto lavorare solo con le classi i cui insegnanti si sono resi disponibili.

Coerenza con le azioni previste dello sperimentatore

Per quanto riguarda le azioni che avevamo previsto di compiere a seconda degli eventi (figura 3), non sempre sono state rispettate durante le attività (per esempio il rispetto dei tempi prestabiliti per proporre gli stimoli). Crediamo che abbia influito su questo anche il numero di gruppi da gestire, in certi casi troppo alto. Inoltre, relativamente ai problemi P1 e P2, in alcuni casi non sono state seguite le azioni esatte previste dato che sono state individuati alcuni fatti interessanti e, a nostro avviso, da indagare. Perciò sono state proposte alcune domande (stimoli) che non erano state previste all'inizio (cambiamento in corso delle azioni dello sperimentatore) e che hanno cambiato la direzione, prevista in fase di progettazione, per le attività dei gruppi in cui sono state proposte. In particolare abbiamo proposto, in alcuni gruppi, le seguenti domande:

- Perché la portata delle pompe (e dei rubinetti) viene sommata?
- La velocità di fuoriuscita dell'acqua dal tino è costante o no?
- Perché la velocità di fuoriuscita del liquido nel primo problema viene considerata costante?
- Quale parte del testo proposto è stata più utile?
- Quale problema simile, ma in un altro dominio, riescono a individuare?
- Che tipo di grandezza è litri/tempo?
- Perché utilizzano il termine "*velocità*"?

Tali domande ci hanno portato ad alcune nuove ipotesi che si collegano con la valutazione delle prime, che riprenderemo alla fine del capitolo. Da un lato la scelta di "rompere" le regole inizialmente stabilite ci ha portato ad avere meno elementi per la valutazione finale delle ipotesi di ricerca, dato che nei casi in cui avevano risolto il problema senza usare la metafora in alcuni casi non li abbiamo spinti ad utilizzarla ma abbiamo indagato su alcune loro scelte (somma delle velocità per P2 e P1, uso della stessa strategia per P2 che alcuni usavano per P1). Dall'altro lato, le domande fatte e non previste, ci hanno permesso di fare luce su alcuni aspetti che non avevamo considerato a priori, e che hanno contribuito (come mostriamo nel capitolo 5) alla nostra scelta di riformulare le ipotesi di ricerca in una maniera, secondo noi, più realistica.

4. Valutazione complessiva del primo esperimento

Partendo dalle registrazioni dei protocolli sono stati ricostruiti i percorsi che ciascun gruppo ha seguito durante le attività, mettendo in evidenza anche i tempi. Questa prima elaborazione dei protocolli (Allegato3_SintesiProtocolliPerClasse) ha reso più semplice la valutazione del primo esperimento. La valutazione che descriviamo è una valutazione che comprende la valutazione delle prime ipotesi di ricerca e altri aspetti che ci sono parsi di interesse.

4.1 Valutazione delle ipotesi di ricerca

Materiali usati per la valutazione

Per la valutazione dell'esperimento sono stati utilizzati:

- testi prodotti degli alunni;
- registrazioni dello sperimentatore;
- osservazioni dell'insegnante;
- discussione con i gruppi durante il lavoro.

L'analisi dei testi prodotti è stata di tipo qualitativo, con l'obiettivo di valutare la presenza o assenza delle dipendenze ipotizzate e l'eventuale dipendenza da altre variabili non direttamente prese in considerazione nei testi proposti.

Metodi di valutazione

Dalla necessità di interventi da parte dello sperimentatore entro un tempo prestabilito (circa un'ora per l'individuazione della metafora che avevamo posto nel testo) è stato possibile valutare la dipendenza della produttività metaforica dal tipo di metafora (*esplicita* o *implicita*) e dal tipo di testo (*impersonale* o *dialogato*) e dall'azione dell'insegnante (sperimentatore).

Le azioni che abbiamo considerato per la valutazione delle ipotesi di ricerca sono solo le azioni previste per lo sperimentatore (figura 3), anche se, come abbiamo detto nella parte finale del paragrafo 3.6 (coerenza dello sperimentatore), lo sperimentatore non ha, in certi casi, seguito le azioni previste. Questo ha avuto l'effetto negativo di ridurre il numero di casi possibili per il confronto, dato che per fare il confronto finale non abbiamo potuto considerare i gruppi nei quali si è proposta una domanda diversa, invece dello stimolo a considerare la metafora.

Per la valutazione delle ipotesi di ricerca le sintesi dei protocolli sono state suddivise per tipologia di problema (metafora esplicita, metafora implicita, assenza di metafora) ed analizzate rispetto alle variabili da valutare, ma non solo rispetto ad esse. I risultati di questi confronti parziali sono stati posti in alcune tabelle riassuntive che poi sono state confrontate fra loro per una sintesi complessiva finale. L'analisi completa è nell'Appendice 1 in fondo al capitolo. Tale analisi qualitativa ha permesso anche di fare altre osservazioni che vengono discusse in seguito nel paragrafo 4.2.

Azione dell'insegnante (ipotesi I3 e I4)

Per valutare la dipendenza della produttività della metafora dalla variabile *azione dell'insegnante* (nel senso specificato dalla figura 3) abbiamo confrontato i casi nei quali tale azione non è stata necessaria per la considerazione della metafora con quelli nei quali lo è stata. In particolare abbiamo confrontato i casi nei quali entro un certo tempo (circa un'ora) la metafora esplicita od implicita del testo non è stata produttiva (ovvero non è stata sfruttata dagli alunni per produrre l'analogia attesa od un'altra analogia) ed a questo è seguito uno stimolo da parte dello sperimentatore per fare prendere in considerazione la metafora.

In un numero ancora inferiore di casi, dopo che la metafora era stata presa in considerazione ma in maniera infruttuosa, lo stimolo dello sperimentatore si è spinto fino a suggerire alcuni elementi di una possibile analogia (secondo quanto previsto). Nella valutazione sono stati confrontati anche questi casi (anche se sono stati complessivamente un numero esiguo).

(vedere tabelle da 1 a 9 in Appendice 1).

Metafora esplicita/implicita e *Testo dialogato/impersonale* (ipotesi I1 e I2)

Per valutare la dipendenza dalle variabili *testo dialogato/testo impersonale* e *metafora implicita/metafora esplicita* abbiamo confrontato prima i protocolli relativi a problemi dello stesso tipo raggruppati nei tre gruppi: testi con metafora esplicita, testi con metafora implicita e testi senza metafora. In ciascun gruppo abbiamo valutato la dipendenza dalla variabile *testo dialogato/testo impersonale*, per poi sintetizzare alla fine i risultati su tutti i gruppi.

Per una analisi dettagliata rimandiamo all'Appendice 1 e alle tabelle riassuntive da 1 a 9.

Risultati della valutazione

Dato il numero relativamente esiguo di casi, non abbiamo ritenuto opportuno utilizzare metodi statistici e per questo stesso motivo alcune delle evidenze che abbiamo ho riscontrato a favore o sfavore delle ipotesi non hanno un valore probatorio definitivo (possono evidentemente essere frutto del caso) ma le consideriamo evidenze o, meglio, *indizi* che utilizziamo per orientare la ricerca successiva per la riformulazione di ipotesi e per il miglioramento della metodologia per il prossimo esperimento).

Dalla valutazione emerge che:

- ci sono alcune evidenze (diremmo indizi) favorevoli all'ipotesi I1 (relativamente al problema P3)

  I1**:** *Nel caso di testi con metafora esplicita l'uso della stessa per costruire una analogia non dipende dalla forma impersonale o dialogata del testo***.**

Infatti nel solo caso del problema P3, abbiamo visto che la metafora, implicita o esplicita, ha avuto un effetto indipendente dal fatto di comparire in un testo dialogato o impersonale. Escludiamo i casi dei problemi P1 e P2 perché, come di vede dall'analisi, in questi casi la metafora non è mai stata utilizzata spontaneamente ed i casi in cui è stata utilizzata dopo l'intervento dello sperimentatore sono pochi.

- non ci sono evidenze favorevoli all'ipotesi I2

  I2: *Nel caso di testo con metafora implicita c'è dipendenza dalla forma del testo e mi aspetto che nel testo dialogato ci sia maggiore facilità ad utilizzare la metafora*.

- non ci sono evidenze favorevoli alle ipotesi I3, I4

  I3: *Nel caso di testo con metafora implicita c'è una forte dipendenza dall'intervento dell'insegnante/sperimentatore indipendentemente dal testo*.

  I4: *Nel caso di testo con metafora esplicita una c'è una dipendenza minore, rispetto al caso precedente, dall'insegnante/sperimentatore per l'interpretazione della metafora*.

Infatti la dipendenza dall'intervento dell'insegnate che abbiamo rilevato, non è legata alla forma esplicita o esplicita del testo, ci sono casi sia favorevoli che sfavorevoli all'ipotesi.

Alcune osservazioni

1) Anche se non ci sono complessivamente evidenze per le ultime 3 ipotesi, nelle attività abbiamo registrato alcuni casi che, presi isolatamente, sarebbero a favore delle ipotesi I3 e I4:

- nel gruppo G5_5 (che aveva il testo P2_Dia_Me), in assenza di stimoli dell'esperto, la metafora esplicita viene usata produttivamente fino ad ottenere una analogia che permette loro di risolvere il problema dagli studenti;

- nel gruppo G5_4 (che aveva il testo P2_Dia_Mi), la metafora implicita viene usata produttivamente in seguito all'intervento dell'esperto.

2) In alcuni casi (gruppi G1_3, 7_4) l'intervento dell'esperto, limitato ad una prima associazione fra i domini, è sufficiente per fare avanzare gli studenti autonomamente verso nuove conoscenze, in un modo forse spiegabile con il concetto di zona di sviluppo prossimale.

3) Dall'analisi di evidenzia come, indipendentemente dal tipo di problema, i problemi con i testi dialogati richiedono più tempo per essere risolti. Probabilmente questo è dovuto al maggior tempo richiesto per l'analisi e l'individuazione delle informazioni utili.

4) Dall'analisi qualitativa dei protocolli e dalle osservazioni in classe non abbiamo riscontrato evidenti differenze fra alunni brasiliani ed italiani relativamente a quello che era l'oggetto dell'indagine (individuazione di metafore e loro utilizzo). I programmi scolastici degli studenti brasiliani, per quanto riguarda matematica e fisica, sono uguali a quelli italiani anche se vengono affrontati con tempi diversi. Inoltre gli insegnanti di tali materie sono in prevalenza italiani ed usano l'italiano come lingua veicolante. Anche i testi matematici in adozione sono italiani. Alcune differenze riscontrate, ad esempio l'uso della "regola del tre" e quindi della proporzionalità da parte di molti alunni brasiliani, sono riconducibili alle scelte didattiche degli insegnanti (come è risultato da colloqui diretti con un insegnante).

5) Anche se non abbiamo analizzato il possibile diverso comportamento rispetto all'età (e non era nei nostri obiettivi), non ci pare che si possa individuare qualche forma di differenza che non sia dovuta ad una diversa esperienza e conoscenza matematica. Inoltre abbiamo rilevato esempi sia di difficoltà e sia di buone competenze sia nelle classi inferiori (1° e 2°) che in quelle superiori (4°).

Valutazione a posteriori di alcune variabili

Proviamo a discutere alcune delle variabili considerate nel paragrafo 1.2, che non erano il focus dell'esperimento ma che lo possono avere influenzato. In fase di progettazione non abbiamo pensato a strumenti specifici per la valutazione di queste variabili, e quanto segue è frutto delle osservazioni, dei dialoghi con insegnanti e studenti e delle impressioni dello sperimentatore.

Credibilità/autorevolezza dell'insegnante e interazione insegnante/studenti:

Dalle nostre osservazioni possiamo dire il comportamento degli studenti di tutte le classi è sempre stato rispettoso verso gli insegnanti presenti durante la sperimentazione. Dalle modalità con le quali gli studenti si rivolgevano all'insegnante e seguivano le sue indicazioni (in fase di organizzazione iniziale ed in alcuni momenti durante le attività) concludiamo che, in tutte le classi, ci sono parsi autorevoli e credibili. Le interazioni fra insegnante e studenti sono state in tutti i casi rispettose ed educate, anche se, in un solo caso, un poco "*direttive*" da parte dell'insegnante.

Credibilità/autorevolezza dello sperimentatore

Anche in questo caso dall'osservazione dei comportamenti durante le attività e dal tipo di impegno manifestato, possiamo concludere che lo sperimentatore fosse credibile ed autorevole agli occhi degli studenti. Consideriamo anche il fatto che le attività sono state prima presentate agli studenti dai loro insegnanti, previa comunicazione ed approvazione da parte dei dirigenti scolastici, quindi lo sperimentatore giungeva nelle classi con una approvazione della scuola che, crediamo, abbia contribuito alla sua credibilità ed autorevolezza.

Visione della sperimentazione da parte degli studenti

In tutte le classi, tranne in un caso, abbiamo sempre avuto un atteggiamento serio ed impegnato degli studenti. L'esperienza non è stata vissuta, anche grazie agli insegnanti, come una attività di svago. In un solo caso parte degli studenti non si è impegnata pienamente a causa di un diverbio avuto con un insegnante (non quello rimasto in classe) prima di iniziare l'attività.

Interazione insegnante/sperimentatore

Durante le attività le interazioni fra insegnante e sperimentatore sono state coerenti con quanto previsto in fase di progettazione. In generale gli insegnanti hanno partecipato ma sono intervenuti poco, generalmente venivano chiamati dai gruppi per chiedere chiarimenti che venivano dati direttamente se si trattava di dubbi di interpretazione dei testi, altrimenti venivano comunicati allo sperimentatore e si accordava una risposta. Le interazioni insegnante-sperimentatore sono sempre state cordiali e collaborative.

Interazione fra studenti

Per quanto riguarda alcune delle variabili che dipendono dagli studenti, anche in questo caso non abbiamo utilizzato strumenti specifici, quindi non possiamo dire molto su motivazione allo studio, obiettivi a medio e lungo termine, visione che gli studenti hanno della scuola. Dalle nostre osservazioni possiamo affermare che durante le attività di gruppo non abbiamo rilevato livelli eccessivi di competizione né fra i diversi gruppi né fra i componenti di ogni singolo gruppo (i gruppi sono stati formati con l'aiuto dell'insegnante). In generale abbiamo osservato una buona collaborazione ed organizzazione all'interno dei gruppi, anche se in alcuni casi il gruppo si è diviso nel seguire idee differenti, ma sempre senza contrasti personali.

Conoscenze e competenze matematiche degli studenti

Dai colloqui con gli insegnanti risulta che le conoscenze matematiche previste dai programmi erano state affrontate da tutte le classi, anche se con diversi livelli di competenza. Abbiamo potuto constatare, dalle strategie risolutive adottate nei gruppi, diverse capacità di utilizzare conoscenze matematiche acquisite in alcuni ambiti per risolvere un nuovo problema. Nonostante le lamentele di uno degli insegnanti della scuola brasiliana, che ci ha descritto come basse le competenze degli alunni brasiliani, noi non abbiamo trovato evidenti differenze con gli alunni della scuola italiana. In entrambi i gruppi abbiamo trovato sia eccellenze che casi mediocri.

Tempi e continuità del lavoro

Ogni gruppo ha lavorato per una sola sessione di due ore, senza interruzioni. Questo fatto, se da un lato ha permesso di lavorare con continuità e senza introdurre altre variabili dovute ad intervalli nel lavoro, dall'altro lato non ha permesso di sviluppare appieno alcune delle strategie che alcuni gruppi stavano sviluppando. Inoltre non sempre ha permesso allo sperimentatore di chiarire alcune strategie possibili per risolvere i problemi, come auspicato, anche se non era questo l'obiettivo delle attività. In pochi casi ci sono state alcune assenze che comunque non hanno inciso sul numero di gruppi previsti.

Dimensioni del testo
Fra le caratteristiche del testo proposto, abbiamo riscontrato che nel caso dei testi più lunghi (dialogati o meno), la metafora può rimanere meno in vista (esempio G8_3), quindi il fatto di avere molto testo può in realtà rendere più difficile la produzione metaforica.

4.2 Altre osservazioni sulla produttività delle metafore

Crediamo che, in base a quanto osservato dai protocolli, si evidenzi l'utilità della definizione proposta di metafora. È chiaro che abbiamo pensato le metafore poste nei testi in modo tale da soddisfare alla definizione che abbiamo proposto. Durante le attività, tuttavia, abbiamo individuato anche metafore non previste, prodotte in modo più o meno consapevole dagli studenti, per le quali, ci sembra, si possa adattare la nostra definizione. Riprendiamo questo punto nel capitolo 6, per ora vogliamo solo osservare alcune caratteristiche relative alla produttività delle metafore che abbiamo rilevato durante le attività.

Intervento dell'esperto
In particolare, per quanto riguarda l'importanza dell'intervento dell'esperto (sperimentatore), se è vero che in certi casi il semplice porre l'attenzione sulla metafora è stata sufficiente per farla sfruttare (per esempio nel gruppo G8_3, vedere Allegato3_SintesiProtocolliPerClasse), in molti casi l'intervento dell'esperto (sperimentatore) si è dimostrato essenziale.
L'importanza di tale intervento si è evidenziata sia nel porre l'attenzione sulla metafora, sia nel guidare successivamente la mappatura fra domini nella costruzione dell'analogia (per esempio nei gruppi G1_3, G8_3, G2_3, G4_1). In generale non è scontata la mappatura fra domini, anche se questi sono conosciuti (come nel caso del problema P3), l'esperto deve intervenire per favorire alcune interpretazioni al fine di chiarire l'analogia che interessa per la soluzione del problema. Dalla nostra analisi abbiamo rilevato che questa dipendenza, in certi casi forte, della produttività delle metafore dall'intervento dell'insegnante, è indipendentemente dal tipo di testo dialogato o impersonale e dal tipo di metafora. Quindi queste osservazioni non sono in contraddizione con la mancanza di evidenze per le ipotesi I3 ed I4, dato che in queste si ipotizza una differenza di questa dipendenza nei diversi casi.

4.3 Punti critici dell'esperimento

Pensiamo che si possano avanzare critiche generali, che crediamo si possano quasi sempre applicare agli esperimenti di questo tipo, che cercano di indagare alcuni aspetti di un sistema certamente complesso. Oltre a queste abbiamo trovato diversi aspetti critici, forse veri e propri errori, nella progettazione e nell'esecuzione dell'esperimento:

- Poteva essere utile proporre un questionario iniziale ed uno finale sia agli studenti che agli insegnanti per riuscire ad avere qualche elemento aggiuntivo per la valutazione di alcune delle variabili non direttamente oggetto delle attività (paragrafo 2.1). Questo avrebbe evidentemente richiesto più tempo;

- Poteva esserci maggiore varietà di problemi, forse i problemi P1 e P2 erano troppo somiglianti, e invece di proporre ognuno dei problemi due volte poteva essere più informativo proporre più problemi (di tipo diverso) una sola volta;

- Inoltre i problemi potevano essere tali da richiedere necessariamente una analogia per essere risolti, in questo modo, forse, si sarebbe evitata la "rottura" delle regole previste in anticipo da parte dello sperimentatore;

- Il tipo di architettura dell'esperimento, con un confronto in parte qualitativo (sulle strategie dei singoli gruppi) ed in parte quantitativo (il confronto fra strategie e comportamenti dello stesso tipo) ha contribuito, crediamo, ad una non semplice valutazione, complicata anche dalla riduzione dei casi utili al confronto dovuta al cambiamento in corso di alcune delle azioni (domande non previste da parte dello sperimentatore). Il risultato complessivamente nullo sulle ipotesi sperimentale è certamente, in parte, una conseguenza di queste scelte;

- Le difficoltà nella valutazione qualitativa potevano essere ridotte, crediamo, anche da una maggiore chiarezza nelle ipotesi stesse, da una definizione più chiara delle variabili e ad una più chiara definizione delle condizioni che si andavano ad osservare;

Crediamo, tuttavia, che sia quasi sempre possibile, in questo tipo di indagini, avanzare alcune delle critiche precedenti. Ci sembra un aspetto forse inevitabile se lo inquadriamo nella dinamica esistente fra la costruzione e l'affinamento di ipotesi e di costrutti teorici da un lato, ed il tentativo di verificare tali ipotesi dall'altro; la teoria contribuisce a identificare possibili fatti da mettere alla prova e l'interpretazione di tali fatti, corrispondente o meno alle previsioni, contribuisce all'identificazione e definizione di costrutti teorici.

4.4 Effetti sul contratto didattico

Alcuni aspetti delle attività possono avere influito sul contratto didattico e quindi sull'atteggiamento degli studenti. In generale le attività in classe sono state svolte dallo sperimentatore in presenza dell'insegnante e probabilmente anche questo ha contribuito al fatto che gli alunni abbiano partecipato in maniera seria e lavorato con impegno. Nei casi in cui non era presente l'insegnante, in due casi lo sperimentatore conosceva già le classi perché è stato loro insegnante l'anno precedente, questo (probabilmente) ha comportato un atteggiamento da parte loro di rispetto e serietà. In un caso, per una sola ora lo sperimentatore ha lavorato da solo con la classe, che non conosceva, e l'insegnante lo ha raggiunto l'ora successiva. Questo pensiamo possa avere contribuito ad un atteggiamento non partecipativo da parte di alcuni alunni. Per quanto riguarda eventuali effetti meno visibili e relativi ai contenuti delle loro produzioni non avevamo preparato strumenti specifici per una loro valutazione.

4.5 Altre considerazioni

Durante l'attività in classe e la successiva ricostruzione ed analisi dei protocolli abbiamo osservato alcuni fatti che, anche se non direttamente implicati negli obiettivi principali dell'esperimento, potrebbero essere utili per il seguito della ricerca. Riprendiamo alcuni di queste osservazioni nel capitolo 5 successivo e nel capitolo 6 finale.

- Alcune risposte, alle domande non previste inizialmente, e relative ai problemi P1 e P2, hanno caratteristiche costanti in quasi tutte le classi; per esempio il fatto di non sapere spiegare il motivo della somma delle portate o il fatto di considerare costante la velocità di fuoriuscita del liquido dal tino.

- Anche le difficoltà rilevate da alcuni gruppi (per esempio il gruppo G8_1) nella mappatura fra i due domini nei problemi P1 e P2 potrebbe essere indicativa di un modello intuitivo che viene applicato in maniera spontanea, oltre che lasciare aperti all'indagine alcune caratteristiche che devono avere i domini affinché risulti naturale una mappatura analogica.

- In alcuni casi (per esempio nel gruppo G7_6) compaiono metafore che comportano analogie con altri ambiti per giustificare l'uso della somma. In questi casi sono gli alunni stessi che propongono le metafore.

- Un possibile problema che richiede l'intervento dell'insegnante è il rischio che gli alunni deleghino alle metafore la spiegazione ed il ragionamento, senza tuttavia approfondirlo (anche per cogliere le differenze e le somiglianze fra i domini per capire fino a che punto l'inferenza analogica sia giustificata) (per esempio nel gruppo G7_6).

5. Possibile spiegazione dei risultati ottenuti e nuove ipotesi

In questa sezione consideriamo alcune delle osservazioni fatte durante il primo esperimento e trattate nel capitolo precedente. Utilizziamo queste osservazioni, assieme ad alcune idee teoriche, per riformulare le nostre ipotesi sperimentali sul comportamento delle metafore. L'operazione che cerchiamo di fare è duplice, da un lato vogliamo sfruttare il primo esperimento per affinare le ipotesi di ricerca, dall'altro affinare la nostra concezione di metafora in modo da renderla più aderente a quanto osservato. Concludiamo con alcune nuove ipotesi di ricerca che vengono studiate nel secondo esperimento, trattato nel capitolo 5.

5.1 Alcune osservazioni sul primo esperimento

Dall'analisi dei protocolli risolutivi dei problemi P1 e P2 (Appendice1Cap4), abbiamo visto come alcuni procedimenti siano una costante nei diversi gruppi, non solo, ma anche le risposte seguono un copione che pare molto simile. In particolare abbiamo visto come:

- Nel problema P1 sembra che gli studenti considerino implicitamente costante la velocità con la quale l'acqua fuoriesce dal tino. Infatti, se dallo sperimentatore viene messo in dubbio questo fatto con una domanda esplicita, gli studenti intuiscono che la velocità non è costante. Inoltre, in qualche caso, provano anche a darne una giustificazione basata sulle loro conoscenze e iniziano a rivedere la soluzione proposta (per esempio il gruppo G1_1);

- In entrambi i problemi P1 e P2, gli studenti sommano le portate (in un caso delle pompe e nell'altro dei rubinetti) senza giustificare tale operazione. Anche in questo caso ci pare che tutti gli studenti utilizzino implicitamente un fatto fisico. Dalle risposte che vengono date alla domanda dello sperimentatore, si vede che non solo non riescono a giustificare ma non vedono nemmeno la necessità di una giustificazione(per esempio i gruppi G7_1, G5_4).

Possiamo ipotizzare che gli studenti affrontino questi tipi di problemi facendosi qualche tipo di *modello mentale* (Capitolo 1 paragrafo 5.3), o, nei termini di Fischbein (Fischbein et al., 1985; Fischbein, 1989), di *modello intuitivo*. Pensiamo che il termine *modello intuitivo,* in questi casi, sia migliore, dato che, da quanto abbiamo potuto constatare, le conoscenze che gli studenti usano non sono completamente esplicitate e di esse gli studenti non paiono completamente consapevoli.

Il modello intuitivo relativo ai problemi P1 e P2, è praticamente una costante in quasi tutte le classi.

Siamo consapevoli che, per poter arrivare a conclusioni più certe, si dovrebbero indagare con maggiore dettaglio e sistematicità le condizioni ed il contesto nei quali è avvenuto l'esperimento. Tuttavia, anche con tale consapevolezza, avanziamo l'ipotesi che questi comportamenti si possano spiegare tramite l'uso di modelli intuitivi (generati dall'esperienza, da forme apprendimento non formali, o incorporate nell'individuo) che possono essere attivati da elementi del testo o della situazione che funzionano da metafore, secondo la definizione che ne abbiamo data nel capitolo 1.
Inoltre, come abbiamo scritto nel paragrafo 4.2, si evidenzia una differenza nel comportamento degli studenti, in seguito all'intervento dell'esperto, fra i problemi P1 e P2 ed il problema P3. Infatti in certi casi, per il problema P3, il semplice porre l'attenzione sulla metafora è sufficiente per farla sfruttare (per esempio nel gruppo G8_3, vedere Allegato3_SintesiProtocolliPerClasse), mentre questo non è vero per i problemi P1 e P2.
Nell'elaborazione di una possibile spiegazione per i risultati ottenuti nel primo esperimento, abbiamo trovato conveniente formulare alcune nuove ipotesi sulle metafore che, da un lato diventano nuovi oggetti di ricerca e dall'altro consentirebbero di spiegare quanto osservato. Siamo consapevoli che altre interpretazioni sono possibili, tuttavia ci è parso che il tipo di spiegazione (ipotesi) che proponiamo sia coerente con alcune idee che emergono dalla letteratura (che viene indicata successivamente), sia in didattica della matematica che in psicologia cognitiva.

Vogliamo chiarire che, dal nostro punto di vista, le ipotesi che proponiamo non sono una conseguenza delle sole osservazioni del primo esperimento (esse stesse frutto, in parte, della nostra interpretazione) ma anche dell'influenza che la letteratura in questo ambito ha avuto su di noi.

In generale siamo convinti che lo sperimentatore non sia mai un soggetto neutro, qualunque sia il tipo di esperimento che propone e la distanza che pone fra sé e l'oggetto del proprio studio.

5.2 Due tipi di metafore?

La natura dei primi due problemi è diversa rispetto al terzo, infatti i primi hanno coinvolto *conoscenze intuitive* in tutti i gruppi che non hanno mai sentito la necessità di giustificarle e *non erano consapevoli* delle assunzioni implicite nel metodo risolutivo. Il terzo problema ha richiesto sempre *consapevolezza* per poter essere risolto con metodo geometrico il quale implicava molte *conoscenze formali*.

Ipotizziamo che si possano distinguere due tipi di metafore (ipotesi I2.1):

- Un primo tipo di metafora, che definiamo *incorporata o intuitiva*, la quale collega (ovvero che permette la costruzione di una analogia fra) un dominio target con un dominio source di *conoscenze embodied*, nel senso di Lakoff, Johnson e Núñez (Lakoff, Johnson, 1999; Lakoff, Núñez, 2000), oppure di conoscenze acquisite tramite attività sociali ma mai formalizzate (e in una maniera che potrebbe essere anche inconsapevole);

- Un secondo tipo di metafora che definiamo *culturale/formale*, la quale collega (ovvero che permette la costruzione di una analogia fra) un dominio target con un dominio source di conoscenze acquisite tramite attività socio-culturali in maniera formale.

In altre parole nel primo tipo il dominio source è un dominio di conoscenze incorporate o culturali ma acquisite in maniera intuitiva, nel secondo caso il dominio source è un dominio di conoscenze culturali acquisite in maniera formale.

La differenza fra i due tipi di metafore ipotizzate, può essere paragonata a quella fatta da Piaget, e ripresa criticamente da Vygotskij ed altri, fra *concetti spontanei* e *concetti scientifici* (Vygotskij, 1990, Cap.6). Di questa distinzione abbiamo già detto nel capitolo 3 (paragrafo 2.2). Il legame che intravediamo si basa sul fatto che per Vygotskij il significato di una parola è il concetto ad essa legato, e questo concetto può essere spontaneo oppure scientifico. In maniera analoga una metafora di tipo intuitivo o incorporato associa un primo dominio ad un secondo dominio la cui origine è intuitiva o incorporata, nel senso che i concetti, le relazioni che lo formano sono state acquisite in maniera non formale (esperienze della vita). Invece una metafora di tipo culturale/formale associa un primo dominio ad un secondo dominio che è stato acquisito culturalmente dal soggetto in maniera formale (tramite insegnamento). Mentre una parola è un segno (insieme di segni) che è associata ad un concetto, una metafora è una espressione (nel senso chiarito nel capitolo 1) che può connettere due domini.

Nel seguito cerchiamo di chiarire le precedenti definizioni.

Metafora incorporata o intuitiva

Forse una tale metafora è quella che genera il collegamento fra il dominio di conoscenza dei problemi P1 e P2 ed il modello intuitivo che gli studenti usano (è una nostra ipotesi) nel quale le portate hanno proprietà additiva e le velocità vengono considerate costanti: che queste siano alcune delle caratteristiche dei modelli che vengono implicitamente sfruttate dagli alunni risulta molto chiaro da tutti i casi considerati nell'esperimento.

Tali assunzioni sono sempre presenti, immediatamente applicate in maniera inconsapevole e difficilmente esplicitabile dagli alunni, infatti lo sperimentatore è sempre dovuto intervenire per renderli consapevoli. In questi casi sono possibili contro-esempi, variazioni del problema nel quale le conoscenze applicate non sono più valide ad esempio usando sostanze liquide diverse (acqua ed alcool) o materiali granulari come sabbia o ghiaia che unendosi occupano un volume che non è pari alla somma ma è minore. Nel caso del problema P1 è la domanda sulla costanza della velocità che, ci sembra, rende evidente l'implicita assunzione della sua costanza da parte di tutti gli alunni.

Possiamo paragonare questa situazione a quella che si osserva con le operazioni elementari (ma non solo) ed i problemi in matematica come è stato mostrato, fra gli altri, da Fischbein (Fischbein, 1985, 1992), che ha proposto l'idea di modello intuitivo per dare conto di questi fenomeni (come abbiamo visto nel capitolo 2). Fischbein parla di *forze intuitive* (Fischbein, 1998, pag.27) che sono comunque presenti nell'attività matematica degli studenti e delle quali l'insegnante dovrebbe essere consapevole, noi vediamo le metafore intuitive o incorporate come un modo in cui queste forze intuitive possono prendere forma.

Una differenza con i modelli intuitivi intesi da Fischbein potrebbe essere che in questo caso i modelli intuitivi sono più elaborati, perché si riferiscono a situazioni più ricche e complesse. Per esempio nei modelli che gli alunni sfruttano (ammesso che si possa parlare effettivamente di tali modelli) per la risoluzione di un problema come P1 o P2 potrebbero esserci sia conoscenze embodied che conoscenze intuitive derivanti dalle esperienze quotidiane.

Ci sembra che anche in questi casi lo studente decida in maniera inconsapevole, diremmo "automatica" (in base ad alcuni elementi, dei quali potrebbe fare parte la metafora), che il problema appartiene ad una certa categoria (*modello intuitivo*) e che sfrutti poi l'analogia con tale modello per fare alcune deduzioni nel dominio di partenza. L'uso non consapevole di conoscenze derivanti da metafore, collegate ad analogie, è stato rilevato anche da altri ricercatori (Bazzini, 1994a), in particolare per le metafore sotto forma di immagini (Duit, 1991; Dreistadt, 1969). Nel caso del riempimento/svuotamento (problemi P1 e P2) il modello intuitivo potrebbe avere alcune caratteristiche che si possono ipotizzare dal tipo di scelte e dalle risposte date: quantità che rimangono costanti nel tempo (velocità costante), additività delle grandezze. Anche l'uso di certi termini (che possono essere visti come metafore) potrebbe essere indicativo dei modelli che sono attivi, per esempio il termine *velocità* (G8_5), che, oltre ad essere legato alla divisione per il tempo, potrebbe avere un significato più profondo legato ai modelli che vengono attivati.

Alcuni ricercatori interpretano fenomeni simili a quelli qui evidenziati con concetti quali: *image schema* (in particolare schema di sostanza), *grounding metaphors*, *force dynamic gestalt* (Fuchs, 2010; Hermann, 2010; Talmy, 2000; Hampe, 2005; Johnson, 1987; Lakoff, Johnson, 1999).

Altri ricercatori hanno individuato delle conoscenze che verrebbero attivate in maniera automatica in certe situazioni e che deriverebbero anche dalla nostra filogenesi, ovvero le primitive fenomenologiche (Di Sessa, 1993; Redish, 2003) (che abbiamo trattato nel capitolo 2).

Si può osservare che in alcuni casi potrebbe non essere banale definire l'analogia con un dominio di conoscenze incorporate e non formalizzate. Tuttavia, di fatto, quando parliamo di conoscenze incorporate o informali, già le stiamo formalizzando per il fatto stesso di parlarne e quindi di darne una prima formalizzazione. Quindi si potrebbe definire l'analogia che deriva da questa metafora come una mappatura fra un dominio di partenza (che supponiamo formalizzato) in un secondo dominio che è una formalizzazione di conoscenze in parte incorporate (ma non solo).
Un'altra domanda che ci poniamo è: dove risiede tale metafora nel testo? In questo caso non è facile stabilire quale sia la metafora, secondo la definizione proposta per l'indagine, infatti in certi casi potrebbe essere l'intero testo o certe parole o frasi distribuite nel testo ad innescare una analogia con modelli intuitivi.

Quello che intendiamo dire ci pare molto vicino a quando scrive Fischbein: " *In conclusione: si può ritenere che le intuizioni sono generalmente basate su schemi strutturali, su programmi fondamentali di interpretazione e su processi di informazione. A volte lo schema innescato dai dati del problema è adatto, e allora la risposta è corretta. A volte, però, i dati salienti del problema possono essere fuorvianti, tali da innescare uno schema non adatto (un programma per procedere ed interpretare non adatto) e quindi tali da portare ad una intuizione non corretta*." (Fischbein 1998, pag. 44). Noi vediamo in questi schemi strutturali il dominio al quale il problema viene associato dalla metafora, la quale è costituita da una particolare forma dei dati del problema o la struttura del problema.

Metafora culturale o formale

Esempi di tale tipo di metafora possono forse essere quelli che hanno permesso ad alcuni gruppi di individuare il collegamento fra il testo P3 ed il modello geometrico delle rette nel piano cartesiano.

Dall'analisi precedente si può ipotizzare che per funzionare bene, quindi portare ad una analogia utile, il dominio di arrivo deve essere ben conosciuto per poter essere innescato dalla metafora. Anche se i domini sono conosciuti, pare che non sia scontata la mappatura fra di loro e può essere fondamentale l'intervento dell'insegnante per fare emergere alcune interpretazioni.(per esempio nel gruppo G7_4).

Ci sembra che questa idea sia legata al concetto di conoscenza "*empracticed*", (Bartolini Bussi, Maschietto, 2006, pag.70; Radford, 2003), nel senso che si possono individuare in certe pratiche socialmente costituite le origini di alcune metafore culturali.

Anche alcune delle metafore concettuali di cui parlano Lakoff e Núñez possono forse fare parte di questo tipo di metafora, per esempio la metafora concettuale "*i numeri sono punti su una retta*" (Lakoff, Núñez, 2000, pag.342). In questo caso, ci pare che il collegamento sia fra due domini che sono entrambi appresi in maniera formale, in particolare il dominio source. Il concetto di retta è quello di retta geometrica così come il concetto di numero è un concetto matematico. Un altro esempio di metafora che, secondo noi, rientra in questa tipologia è la metafora "*l'atomo è un piccolo sistema solare*", i due domini sono entrambi domini che sono appresi culturalmente in maniera formale.

5.3 Confronto con la distinzione di Lakoff e Núñez

Nel loro studio delle metafore (ed altri meccanismi cognitivi) considerate come uno dei meccanismi fondamentali per la costruzione della matematica, Lakoff e Núñez non nascondono l'importanza della dimensione storica e culturale in tale creazione ma non distinguono chiaramente il tipo di metafora a seconda della propria origine. Non è chiarito, ad esempio, se le *grounding metaphors* abbiano una origine in parte culturale o no, così come fra le metafore concettuali non viene fatta alcuna distinzione relativamente alla loro origine. Come abbiamo già detto nel primo capitolo, dal modo con il quale presentano alcune delle idee di base della matematica, fra le quali il concetto di derivata, il concetto di numero complesso ed altro, pare che non ci sia possibilità di scelta sul tipo di metafore che il nostro cervello utilizza.

La possibile distinzione che proponiamo si basa soprattutto sul *come* la metafora è stata formata, sul tipo di domini messi in relazione e sulla consapevolezza di tale relazione. Questo perché,in particolare, tale differenza potrebbe incidere più profondamente sulle modalità con le quali si usa una metafora durante una attività di insegnamento apprendimento e quindi anche sul tipo di eventi ai quali l'insegnante deve rivolgere la propria attenzione. In sintesi ipotizziamo che tale distinzione sia più utile ai fini didattici.

5.4 Riferimenti alla teoria del doppio processo

Negli ultimi decenni in psicologia cognitiva si è affermata una teoria nota come "*dual-process theory*" (Evans, 2003, 2008; Frederick, 2005). Secondo tale teoria del pensiero umano ci sono due sistemi di elaborazione dell'informazione distinti ma interagenti. Il primo si basa su semplici euristiche e porta a risposte intuitive, mentre il secondo si basa su processi analitici intenzionali (Norenzayan, Gervais, 2012). Tale teoria è nata dalla convergenza dei risultati in diverse aree di indagine fra le quali: ragionamento deduttivo, categorizzazione, ragionamento analogico, scelte, formazione delle credenze (Norenzayan, Smith, Kim, Nisbett, 2002).

Nell'ambito della didattica della matematica alcuni studi possono probabilmente essere connessi con questa teoria. Per esempio gli studi sulla differenza fra definizione di un concetto ed immagine di un concetto (Vinner, 1991), oppure i già citati modelli taciti (intuitivi) (Fischbein, 1989, 1998).

Pensiamo che sia plausibile un collegamento fra questa teoria e la distinzione dei due tipi di metafora che proponiamo, e ci domandiamo: le due (ipotetiche) forme di metafora potrebbero essere legate alle due forme di funzionamento individuate nella mente umana?

5.5 Possibile giustificazione dei risultati

Noi ipotizziamo che i risultati ottenuti per quanto riguarda le ipotesi I1 ed I2 siano dovuti alla natura diversa delle metafore che venivano indotte dai testi. Pare che per funzionare come metafora esplicita (ed anche implicita) un testo debba collegare il dominio di partenza (target) con un secondo dominio (source) *più conosciuto*, nel quale l'alunno abbia già lavorato, inoltre deve esserci la necessità di cercare un metodo alternativo a quello immediato (per esempio l'uso delle rette nel problema P3). La facilità con la quale una metafora esplicita viene sfruttata dipende anche dalla padronanza del secondo dominio (G5_6). Se esistono metafore di tipo incorporato/intuitivo (come nel caso dei problemi P1 e P2) che sono utili per la soluzione del problema allora è difficile che altre metafore siano produttive. In alcuni casi dagli studenti viene inizialmente preferito un ragionamento più intuitivo (collegamento alla metafora incorporata) e in seguito, se c'è richiesta esplicita, possono passare ad individuare una seconda metafora ed una analogia (per esempio nel gruppo G5_5).

I testi P1 e P2, indipendentemente dal contenere quelle che avevamo indicato come metafore (implicite o esplicite), hanno praticamente sempre indotto un collegamento con alcuni modelli intuitivi, che pur non essendo espliciti o chiari, ci sembra che abbiano alcune caratteristiche comuni. In questi casi ciò che funziona da metafora, secondo la definizione proposta, potrebbe essere qualche altra parte del testo o il testo stesso.

Giustifichiamo i risultati relativi alle azioni dell'insegnante (ipotesi sperimentali I3 ed I4) ipotizzando che uno stimolo finalizzato al porre l'attenzione sulla metafora dipenda più dal tipo di concetti che vengono mobilitati dal testo che dalla forma del testo, quindi dal tipo di domini che la metafora può mettere in collegamento.

5.6 Nuove ipotesi di ricerca

Da quanto detto nei paragrafi precedenti, formuliamo nuove ipotesi di ricerca, che sono oggetto del secondo esperimento (capitolo 5).

Con le ipotesi che presentiamo siamo interessati ad inquadrare, in maniera più utile rispetto alle prime ipotesi, la metafora all'interno del quadro teorico presentato nel capitolo 3. In particolare vorremmo indagare come la produttività di una metafora dipenda da caratteristiche, in qualche modo, proprie, e come invece dipenda dall'azione dell'esperto.

Per quanto riguarda il tipo di metafore che andiamo ad indagare, formuliamo la prima seguente ipotesi di ricerca:

I2.1: *è possibile distinguere due tipi di metafore con le caratteristiche descritte nel paragrafo 1.2:*

- *Incorporata o intuitiva;*
- *Culturale/formale.*

Per quanto riguarda la dipendenza della produttività metaforica dall'essere implicita o esplicita, riformuliamo due nuove ipotesi alla luce della distinzione precedente (ipotesi I2.1):

I2.2: *se la metafora è di tipo incorporato o intuitivo allora la sua produttività non dipende dall'essere esplicita o implicita nel testo;*

I2.3: *se la metafora è di tipo culturale/formale allora la sua produttività dipende dall'essere esplicita o implicita nel testo e la produttività è maggiore nel caso di metafore esplicite.*

Per quanto riguarda la dipendenza dall'azione dell'insegnante (esperto), ipotizziamo che uno stimolo rivolto agli studenti per considerare la metafora, dopo che la metafora esplicita o implicita non si è rivelata produttiva, è utile solo nel caso di metafore culturali, più precisamente:

I2.4: *nel caso di metafore incorporate o intuitive la produttività metaforica è indipendente dagli stimoli dell'insegnante;*

I2.5*: nel caso di metafore culturali/formali, la produttività metaforica, dopo che altre variabili dipendenti dal solo testo hanno fallito, dipende dagli stimoli dell'insegnante.*

Appendice 1: valutazione del primo esperimento

Materiali e metodi di valutazione

Per l'analisi dei dati sono stati utilizzati:

- registro delle attività relative al lavoro dei gruppi (domande studenti, interazioni con sperimentatore ed insegnante, attività ed elaborazioni del gruppo);
- alcune registrazioni dello sperimentatore fatte subito dopo lo svolgimento delle attività (completamento di alcune registrazioni, osservazioni aggiuntive fatte "a caldo");
- protocolli scritti degli studenti.

Da questi dati sono state fatte delle sintesi "*a grana grossa*" relative al lavoro di ciascun gruppo, nelle quali si sono messi in evidenza i momenti ritenuti più significativi per la valutazione finale. Non si è potuto fare una analisi "*a grana fine*" proprio per il tipo di attività proposta (attività contemporanea di piccoli gruppi) e dati alcuni vincoli (presenza di un solo sperimentatore senza telecamera). A partire dai protocolli completi (Allegato0_ProtocolliPriSpe) sono state ottenute delle sintesi per ciascun gruppo (Allegato3_SintesiProtocolliPerClasse). Queste sintesi sono state dapprima raggruppate a seconda del tipo di metafora contenuta nel testo (esplicita, implicita, nessuna metafora), all'interno di ciascuna delle tre tipologie, le sintesi sono state ancora suddivise per tipologia di problema (3 tipi) e confrontate relativamente agli aspetti da analizzare per la valutazione delle domande di ricerca specifiche. Infine si è fatta una comparazione fra i risultati dei tre gruppi. Alla fine di ogni insieme di problemi di un determinato tipo (tipo metafora e tipo problema) vengono raccolte in tabelle alcune osservazioni, relative non solo alla valutazione delle domande di ricerca.

A) Testi con metafora esplicita

G1_1 (3°liceo brasile) P1_Dia_Me: prima provano con la media delle velocità poi con la somma ma non la giustificano e non vedono la necessità di giustificarlo. Dopo 20 minuti trovano la soluzione corretta senza metafore o analogie esplicite. Senza il mio intervento pensano che durante lo svuotamento la velocità dell'acqua sia costante e che la velocità non dipende da quanti rubinetti siano aperti. Dopo il mio intervento sulla variazione di velocità dicono che le velocità da loro considerate sono velocità medie ed il risultato è una approssimazione. Dicono che la parte del testo più utile è stata quella finale.

G3_4 (1°liceo brasile) P1_Dia_Me: dopo 10 minuti stanno lavorando insieme facendo un disegno, dopo 20 minuti (dall'inizio) hanno calcolato quanti litri al minuto escono con ogni rubinetto, sommano le grandezze e con una proporzione (che chiamano regola del tre) ottengono il tempo richiesto. Dopo 45 minuti chiedo quale parte del testo sia stata più utile per la soluzione del problema ed indicano alcune frasi della parte finale, in particolare la frase di Mario (metafora esplicita), parlano esplicitamente di velocità dell'acqua. Dopo un'ora chiedo come possano essere sicuri che l'acqua mantenga velocità costante durante lo svuotamento ed una alunna (dopo averci pensato un poco) dice che quando c'è più acqua la pressione sarà maggiore e quindi anche la velocità.

G6_6 (2°liceo italia) P1_Dia_Me: dopo 20 minuti Mi chiedono conferma su un procedimento che stanno seguendo (che pare corretto), vedo che hanno il testo di fisica e chiedo come lo stiano usando. Hanno usato il libro per capire come trasformare i litri in centimetri cubi perché in questo modo arrivano ad una misura di spazio (ma non sono tutti convinti, alcuni dicono che "*in realtà è un volume*"). Dopo 30 minuti non sono convinti di quello che hanno fatto, in particolare della somma delle velocità, io chiedo di scrivere tutto quello che hanno fatto e che hanno pensato nel dialogo. Calcolano i diversi rapporti (chiamandoli velocità ed indicandoli con v), li sommano e poi trovano il tempo con t=s/v. Dopo 1 ora non sono sicuri di quello che devono scrivere ed hanno cancellato diverse cose che avevano scritto, chiedo di non cancellare quello che fanno. Il dialogo che propongono è veramente scarno e si limita a ricapitolare i calcoli svolti. Emerge che non sono sicuri della somma delle velocità e non propongono alcuna giustificazione del suo uso.

G5_3 (3°liceo italia) P1_Ipr_Me: dopo 10 minuti stanno facendo un disegno. Dopo 20 minuti dall'inizio dicono di non sapere cosa fare. Hanno fatto un primo tentativo nel quale hanno impostato un sistema nel quale dicono di usare spazio, tempo e velocità, alla mia domanda su cosa sia lo spazio rispondono che si legge sul cilindro graduato. I calcoli che fanno non hanno un significato chiaro, infatti arrivano ad un risultato privo di significato per il problema (spazio=0) e quindi cancellano tutto. Dopo 45 minuti calcolano il numero di litri che ciascun rubinetto lascia uscire e sommano le grandezze ottenute ma non sono convinti, successivamente dividono la capacità del tino per la portata totale ed ottengono un tempo di 4,63 minuti. Successivamente, dopo 1 ora e 30 dall'inizio, faccio notare che la velocità con la quale l'acqua esce dai rubinetti non sarà costante e chiedo se questo influisce sul risultato. Dopo poco dicono che effettivamente la velocità cambia e quindi il tempo impiegato sarà maggiore.

G7_1 (4°liceo italia) P1_Ipr_Me: dopo circa 10 minuti un alunno mi chiede, riferendosi alla frase del testo che io ho considerato come metafora esplicita ("*Si può pensare che il livello dell'acqua letto sulla scala graduata si muova verso il basso ad una certa velocità*") se devono per forza usare il suggerimento oppure possono fare in un altro modo, io dico che possono seguire il procedimento che preferiscono. Dicono di avere finito. Hanno cominciato, senza fare disegni, calcolando con quanti litri al minuto ciascun rubinetto permette di svuotare il tino, poi sommano le quantità ottenute, infine dividono la capacità del tino per il totale ed ottengono il risultato 4,62 minuti. Io chiedo di giustificare l'uso della somma. Nella spiegazione della somma scrivono che devono sommare perché è come se ci fosse un solo rubinetto. Dopo 20 minuti non hanno giustificato la somma ma si sono limitati a scrivere quello che hanno fatto. Dopo 40 minuti mostrano la loro spiegazione, io propongo di risolvere il problema provando a seguire il suggerimento del testo (la metafora). Dopo 1 ora dall'inizio dicono che i rapporti litri/minuto rappresenterebbero le velocità e poi userebbero la formula velocità=spazio/tempo. Successivamente scrivono una frase molto sintetica su come usare la velocità, io li spingo ad elaborare l'idea più in profondità, a pensare di dovere risolvere di nuovo il problema ma sfruttando quel suggerimento. Scrivono che considerando i litri che escono come velocità ed i litri totali che escono come la velocità totale per trovare il tempo devono dividere il volume del tino per la velocità totale. Dopo 1 ora e 40 chiedo se la portata dell'acqua durante la fuoriuscita è costante, una alunna dice di si ma un secondo alunno dice che potrebbe invece dipendere dalla pressione, confermo l'idea dell'alunno e chiedo come cambia, se cambia, la loro soluzione.

Osservazioni sul testo P1 con metafora esplicita	
Uso metafora (I1)	In tutti i casi i gruppi risolvono il problema senza fare uso di analogie esplicita con altri domini ed in particolare con il dominio di corpi che si muovono su una linea.
Differenza testo (I1)	Non si nota una evidente differenza fra testi dialogati ed impersonali, solo nel caso di un gruppo (G5_3) c'è un ritardo rilevante ma non è detto sia dovuto alla differenza di testo.
Azioni sperim/insegn (I4)	Nei gruppi nei quali arrivo a proporre esplicitamente l'uso dell'analogia (G7_1), questo viene fatto in maniera parziale, semplicemente mappando alcuni dei termini di un dominio nel secondo dominio ma senza dotare completamente di senso tale mappatura (ad esempio le relazioni) e senza sfruttare veramente il secondo dominio per risolvere il problema del primo.
Possibili indizi di metafore nascoste	- Tutti i gruppi non hanno spiegato la somma delle grandezze (portate) se non con una riformulazione dello stesso fatto, la cosa appare a tutti tanto evidente che non hanno visto la necessità di dare giustificazioni più profonde. - In diversi gruppi tuttavia si parla di velocità e si usano le formule per il moto rettilineo uniforme (G3_4, G1_1, G6_6), in un gruppo si tenta di usare tali concetti per risolvere il problema ma senza successo (G5_3). - In tutti i gruppi nei quali ho chiesto se la velocità di svuotamento era costante (G1_1, G3_4, G5_3, G7_1), pare evidente che stavano dando per scontato che lo fosse, e tale considerazione modifica e mette in crisi la loro soluzione.

Tabella 1

G5_5 (3°liceo italia) P2_Dia_Me: dopo 30 minuti dall'inizio dicono di avere terminato. Il problema è risolto correttamente col metodo della somma delle portate e divisione, inizialmente si riferiscono alla *capacità* delle pompe, nel testo che riscrivono parlano di volume (per quanto riguarda l'acqua e di *velocità* delle pompe. Passano poi a cercare di risolvere il problema con un secondo ragionamento, cercando di seguire l'indicazione del testo (metafora esplicita). Dopo 50 minuti dall'inizio un alunno mi chiede se il rapporto litri/tempo è una velocità e se la distanza può essere interpretabile come altezza della vasca. Successivamente chiedono se possono consultare il libro di fisica per rivedere le leggi orarie del moto. Dopo poco chiedo che formule hanno cercato, rispondono che hanno cercato la legge del moto rettilineo uniforme ma non l'hanno trovata utile. Successivamente (1 ora e 30 dopo l'inizio) individuano una metafora che permette di legare due domini: viene fatto un paragone con un punto che sale di moto rettilineo uniforme lungo l'argine della vasca. La formula che viene usata è t=s/v e scrivono "*che s è rappresentata dalla capacità della vasca mentre v la consideriamo la capacità delle tre pompe unite di fare uscire l'acqua*". Il risultato ottenuto è confrontato con quello del primo metodo e gli alunni dicono che "*i conti corrispondono*". Nel breve dialogo che propongono come proseguimento del testo, dicono che dato che le pompe immettono acqua a velocità costante, allora l'acqua salirà lungo il bordo a velocità costante e quindi si possono usare le formule del moto rettilineo uniforme.

G8_5 (4° itis italia) P2_Dia_Me: dopo 20 minuti non sanno ancora come procedere. Un alunno propone di fare la media dei tempi ma un altro non è d'accordo. Poco dopo un alunno chiede se può andare bene una velocità di 4 m/s, io chiedo come abbiano trovato quel valore. Non sanno spiegarlo bene ma l'alunno che ha proposto tale valore dice che hanno trovato la media dei tempi, trasformata in secondi e poi diviso il risultato per la capacità della vasca. Un alunno dice che dovrebbero sapere la quantità complessiva di acqua che viene portata dalle pompe. Dico che stiamo supponendo che la vasca sia vuota e che venga riempita, quindi la quantità di acqua è proprio 300 litri. Chiedo perché abbiano usato l'unità di misura metri/secondi e stiano usando il termine *velocità.* Riflettono ma non sanno darmi una risposta. Dopo 30 minuti sono ancora fermi e non sanno come procedere. Anche dopo 45 minuti dall'inizio non sanno ancora come procedere, propongo di considerare la frase del testo (quella che considero come metafora) (*M:mi pare che sia come se ci fosse una certa distanza da percorrere…*

G: come?

M: si…se si usa una pompa più veloce l'acqua sale più velocemente e raggiunge prima il bordo della vasca, come se ci fosse una distanza da percorrere ad una certa velocità…

) relativa alla distanza ed alla velocità, propongo inoltre di fare un disegno. Dopo 1 ora dall'inizio non hanno ancora capito come fare. Faccio un grafico (un segmento orizzontale) proponendo di pensare al segmento come rappresentazione della quantità di acqua nella vasca, e quindi all'estremo di sinistra sarà associata la vasca vuota, a quello di destra la vasca piena con 300 litri. Chiedo cosa possano essere le pompe in tale rappresentazione e chiedo di inventare un problema seguendo questa idea. Dopo 1 ora e 30 dall'inizio non stanno riuscendo a sfruttare l'idea che ho proposto. Propongo una trasformazione del problema nella quale una distanza di 300 Km viene percorsa da 3 macchine in tre tempi diversi. Quanto tempo impiegherà una quarta macchina che viaggia ad una velocità pari alla somma delle velocità delle altre? Un alunno dice che si devono usare le formule inverse. Propongono di sommare i tempi, per avere il tempo complessivo, io faccio notare che allora la macchina sarebbe più lenta, ed è la velocità che va sommata. Quando il tempo a disposizione è quasi terminato, vedendo che non sono ancora riusciti, spiego come poter risolvere il problema partendo dal problema analogo (ovvero faccio vedere come il metodo usato in uno possa essere usato anche nell'altro). Un alunno dice di avere capito e velocemente calcola il risultato del problema posto, che scrive a matita sul foglio.

G3_1 (1°liceo brasile) P2_Ipr_Me: dopo 15 minuti trovano il risultato, usando una formula che non giustificano (il reciproco del tempo complessivo è la somma dei reciproci dei singoli tempi). Dopo 1 ora e 10 minuti chiedo se la velocità abbia qualche cosa a che fare con il problema e mi rispondono che è la velocità dell'acqua ma non usano alcuna analogia con altri problemi.

G4_4 (2°liceo brasile) P2_Ipr_Me: dopo 10 minuti dicono di avere finito. Il risultato è corretto e chiedo di spiegare la ragione per cui hanno sommato le grandezze litri/minuto delle pompe e chiedo che tipo di grandezza sia L/min. Chiamano tale grandezza "vazao" ovvero portata. Dopo 45 minuti chiedo quale parte del testo o quali parole li abbiano maggiormente aiutati e dicono che è stata la parola "juntas", ovvero assieme, che compare nel testo quando si dice che le pompe funzionano assieme. Un alunno mi dice che hanno notato la frase "*Possiamo immaginare la capacità della vasca come una distanza da percorrere*" (metafora esplicita) ma non è stata loro utile per ragionare sul problema. Dopo 55 minuti (dall'inizio) chiedo di riflettere su tale frase e chiedo se c'è qualche somiglianza con il problema posto. Un componente dice che si potrebbe fare corrispondere i 300 litri a 300 Km, 10 litri/minuto a 10 Km/h ed analogamente alle altre portate ma poi si chiede che senso avrebbe sommare queste velocità? Successivamente dicono che non riescono a pensare ad un problema simile perché non si riesce ad utilizzare la parola contemporaneamente "*juntas*", in maniera sensata, ovvero non riescono a capire a quale tipo di situazione corrisponde il funzionamento contemporaneo delle pompe nel nuovo problema con velocità e macchina. Faccio vedere come si possa pensare ad una sola macchina che viaggia ad una velocità che è la somma delle velocità, a quel punto un alunno dice che "è lo stesso problema".

G8_1 (4° itis italia) P2_Ipr_Me: dopo 10 minuti iniziano facendo un disegno che rappresenta la situazione del problema. Iniziano a calcolare quanto tempo ci mette ogni pompa per versare un litro ma non riescono poi a procedere perché (dice un alunno) "non possiamo sommare i tempi". Dopo 30 minuti dicono che stanno procedendo per tentativi, trovano che in 5 minuti ogni pompa versa un certo numero di litri, sommano questi litri ottenendo un numero minore di 50 (hanno detto che hanno provato fino ad arrivare al numero che si avvicinava di più a 50): nel testo fanno un disegno che rappresenta la vasca, poi calcolano i minuti che ciascuna pompa impiega per versare 1 litro tramite proporzioni del tipo 300:20=1:x. Successivamente provano quanti litri vengono versati dalle tre pompe contemporaneamente per 7 minuti, 6 minuti e 5 minuti, vedono che l'unico caso in cui la somma è minore a 300 (vicina a 300) è col tempo di 5 minuti. Dopo 45 minuti (dall'inizio) arrivano ad impostare una proporzione, capiscono che sapendo quanti litri vengono versati in 5 minuti (il valore che hanno determinato in precedenza), tramite una proporzione possono ricavare il tempo esatto: seguono diversi tentativi fino quando impostano la proporzione 5 (minuti): 275 (i litri versati in 5 minuti)=x:300 che li porta al valore di 5,45 minuti. (Non si accorgono che potevano utilizzare questa proporzione con il numero di litri versati in 1 minuto). Dopo 1 ora dall'inizio chiedo di pensare al volume come ad una distanza. Faccio il disegno di un segmento orizzontale che rappresenta la quantità di acqua nella vasca. Se il volume è rappresentato da una distanza cosa potrebbero essere le pompe? Un alunno dice che potrebbero essere delle macchine, chiedo di inventarsi un problema simile a quello dato partendo da questa idea. Qualche minuto dopo hanno pensato a tre tartarughe che percorrono una distanza in tre tempi diversi ma dicono che c'è un problema perché quando la più veloce arriva le altre sono ancora indietro e quindi non "*sono assieme*". Aggiungono che nel caso delle pompe le quantità di acqua si potevano sommare invece nel caso delle tartarughe si dovrebbe cambiare qualcosa nel problema..ad esempio trovare la somma complessiva della distanza percorsa. Dopo 1 ora e 40 minuti chiedo di pensare ad un problema simile nel quale una grandezza va sommata, e cosa andrebbe sommato? Un alunno dice che forse si potrebbero sommare le velocità, propongo di modificare il problema pensando ad una quarta tartaruga che viaggia con una velocità pari alla somma delle velocità delle altre tre. Quanto tempo impiegherebbe? Propongono poi un problema simile a quello dato nel quale tre tartarughe percorrono una distanza di 300 metri rispettivamente in 10, 20, 30 minuti dicendo che il problema sarebbe simile al precedente se la domanda fosse trovare quanto tempo impiegano le tre tartarughe a coprire una distanza complessiva (la somma delle tre distanze percorse) di 300 metri.

Osservazioni sul testo P2 con metafora esplicita	
Uso metafora (I1)	- Anche in questo caso i gruppi che sono riusciti a risolvere il problema (G3_1, G5_5, G4_4, G8_1) lo hanno fatto, almeno inizialmente, senza sfruttare analogie esplicite con il dominio dei corpi in movimento rettilineo. - Un gruppo (G5_5), dopo avere risolto il problema in un modo, cerca di risolverlo anche utilizzando la metafora esplicita, senza un mio intervento diretto. Dopo 1 ora e 30 dall'inizio individuano una analogia fra i domini messi in collegamento dalla metafora esplicita del testo.
Differenza testo (I1)	- Si evidenzia (in maniera anche sorprendente) una maggiore difficoltà nella risoluzione di questo secondo problema. - Per quanto riguarda i tempi di soluzione si può evidenziare una maggiore velocità nel caso di testi impersonali (anche se non c'è stato uso di metafore esplicite), probabilmente dovuto alla maggiore semplicità nell'analizzare il testo. - Non si evidenziano differenze fra testo dialogato ed impersonale relativamente all'uso della metafora esplicita (che non è mai stata usata come primo procedimento e spontaneamente).
Azioni sperim/insegn (I4)	- In un caso (G8_5), dato che non riuscivano a risolvere il problema, sono intervenuto esplicitamente affinché sfruttassero la metafora per costruire una analogia. Non riescono ad individuare alcuna analogia e capiscono come risolvere il problema iniziale solo dopo che propongo esplicitamente una analogia, tale analogia comunque pare utile ad un alunno per riuscire a risolvere il problema iniziale. - In due casi (G8_1, G4_4), dopo una mia richiesta esplicita di utilizzare la metafora, i gruppi riescono a costruire una analogia con il dominio del moto rettilineo uniforme ma sono evidenti delle difficoltà che derivano da una non perfetta mappatura fra i domini (in particolare delle relazioni scelte), in un caso si chiedono a cosa corrisponde il fatto che le pompe funzionino assieme nel secondo dominio (G4_4) in un altro il tipo di problema che si evidenzia è simile , le tartarughe del loro problema non corrispondono esattamente alle pompe che funzionano assieme.
Possibili indizi di metafore nascoste	- Anche in questo caso in alcuni gruppi si parla di velocità e si usano le formule per il moto rettilineo uniforme (G5_5), in un gruppo si tenta di usare tali concetti per risolvere il problema ma senza successo (G8_5).

Tabella 2

G5_2 (3°liceo italia) P3_Dia_Me: dopo 15 minuti una alunna sta disegnando un grafico, successivamente mi spiega che intende usare il grafico (retta) per capire meglio cosa convenga fare. Dopo 55 minuti mi spiega che il grafico serve per trovare le intersezioni dove avviene il cambiamento di convenienza fra le diverse opzioni. Chiedo come mai abbiano pensato subito ad usare delle rette e mi dicono che è chiaro dal testo. Dopo 1 ora e 15 minuti una alunna (quella che aveva iniziato) continua da sola con il metodo grafico mentre gli altri due stanno procedendo per tentativi, successivamente confrontano i risultati che non sono completamente coerenti. Infine spiego come utilizzare il metodo grafico. Dal protocollo si vede che si sono bloccati durante i calcoli con le rette, nella soluzione dei sistemi.

G8_3 (4° itis italia) P3_Dia_Me: dopo 15 minuti stanno procedendo per tentativi e senza disegni. Dopo 45 minuti stanno ancora procedendo per tentativi ed ancora senza grafici o disegni. Non fanno alcun disegno o grafico e provano a calcolare il costo per alcuni valori della distanza percorsa in chilometri: 100, 105, 112, 120. Poi scrivono alcune prime conclusioni parziali (sopra 120 Km conviene la B, fino a 20 Km conviene la A) poi tentano altri valori per capire cosa succede nei valori intermedi (80, 86, 87 Km) arrivando a concludere che partendo da poco più di 86 Km conviene la B rispetto la C. In ogni caso non ottengono risultati completi e coerenti. Dopo 1 ora e 10 minuti dall'inizio chiedo se avevano notato la frase relativa all'interpretazione delle equazioni come rette (la metafora esplicita), dicono di non averla notata ed io propongo di provare a sfruttarla, venti minuti dopo (quando ormai era finito il tempo a disposizione) hanno disegnato un grafico e dicono di avere capito come fare e un alunno mi descrive la strategia: disegnare le rette, vedere la loro posizione (quelle più in alto sono le meno convenienti), e trovare le intersezioni ..ma non hanno più tempo per farlo effettivamente.

G2_3 (4°liceo brasile) P3_Ipr_Me: dopo 15 minuti non hanno ancora fatto grafici o disegni e procedono per tentativi. Dopo 30 minuti sul testo hanno sottolineato la frase relativa all'interpretazione delle equazioni come rette (metafora esplicita) ma hanno difficoltà ad interpretare il simbolo d e non hanno ancora fatto disegni. Dopo 40 minuti stanno impostando delle disequazioni ed hanno qualche difficoltà ad capire la terza opzione, non fanno ancora disegni o grafici. Dopo 50 minuti li spingo ad interpretare le equazioni come rette e a disegnarle: hanno inizialmente difficoltà a stabilire cosa sia x e cosa sia y, infine interpretano y come costo ed x come distanza e chiedono un foglio a quadretti per disegnare le rette. Hanno qualche difficoltà a tracciare le rette, tracciano solo due segmenti ma non sanno come procedere per risolvere il problema. Dopo 1 ora e 15 minuti intervengo e li stimolo a pensare a cosa debbano guardare nel grafico per capire quale è l'opzione più conveniente, capiscono che dipende da quale rette sta sopra o sotto e non, come inizialmente pensavano, dalla pendenza delle rette e questo avviene quando li spingo a interpretare il significato della y come costo. Chiedo poi come fare a capire quali sono i punti nei quali avviene il cambiamento di convenienza e, dopo poco, mi dicono che bisogna impostare dei sistemi.

G5_6 (3°liceo italia) P3_Ipr_Me: dopo 10 minuti si riorganizzano in modo da leggere il testo assieme. Dopo 15 minuti chiedono un chiarimento sulla terza opzione. Dopo 20 minuti stanno provando a risolvere per tentativi senza fare disegni o grafici. Dopo 35 minuti dall'inizio dicono che stanno cercando di suddividere in fasce le distanze e che devono fare molti calcoli, un componente dice che secondo lui potrebbe servire il moto uniformemente accelerato. Hanno ottenuto risultati incompleti e non completamente giustificati. Dopo 50 minuti dall'inizio hanno iniziato a disegnare un grafico ma sembra (inizialmente) che sia solo un modo per verificare i risultati ottenuti a tentativi. Un alunno dice che ha sfruttato una frase del testo dove si dice di interpretare le equazioni come rette. Dopo 1 ora e 10 minuti dall'inizio stanno cercando di sfruttare il grafico per ottenere i risultati già ottenuti per tentativi, hanno difficoltà nell'interpretazione del grafico. Una alunna inizia a trovare l'intersezione fra rette. Chiedo di spiegare come possano sfruttare il grafico dopo che lo hanno disegnato bene. Disegnano le rette in maniera corretta anche se non si trovano tutti i calcoli relativi alle intersezioni. Dopo 1 ora e 45 minuti spiego come sfruttare il grafico per risolvere il problema, un alunno sintetizza quello che hanno fatto dicendo che sono partiti usando il metodo più semplice "da capire" per arrivare al metodo più semplice "da fare".

Osservazioni sul testo P3 con metafora esplicita	
Uso metafora (I1)	- In due casi i gruppi iniziano spontaneamente ad utilizzare la metafora esplicita per risolvere il problema (G5_6, G5_2). Anche se la costruzione dell'analogia (modello geometrico del problema) non è immediata e ci sono diversi problemi derivanti da una non completa padronanza delle conoscenze matematiche (rappresentazione di rette, sistemi di rette).
Differenza testo (I1)	- Non c'è evidenza di differenze di comportamento, relativamente all'uso della metafora, fra testi dialogati o impersonali. Anche se in un gruppo (G8_3) la metafora non era stata notata (forse per la prolissità del testo) e dopo averla fatta notare un componente del gruppo non ha avuto difficoltà ad utilizzarla.
Azioni sperim/insegn (I4)	- In un caso dove sono intervenuto affinché sfruttassero la metafora (G 2_3), ci sono stati problemi derivanti dalle loro conoscenze o competenze matematiche con le geometria analitica (grafico di rette). In un altro caso (G8_3), è sufficiente porre la loro attenzione sulla metafora perché riescano a costruire e sfruttare il modello geometrico.

Tabella 3

B) Testi con metafora implicita

G3_3 (1° liceo brasile) P1_Dia_Mi: dopo 10 minuti dall'inizio hanno calcolato i rapporti e parlano di velocità, li sommano ma non sono sicuri su come procedere, io li spingo a scrivere quello che hanno fatto fino ad ora. Dopo 30 minuti chiedo cosa stiano facendo, dicono che sono convinti del procedimento: trovano le diverse velocità, le sommano e per la parte finale impostano una proporzione. Non utilizzano unità di misura, chiedo di usare le unità di misura. Nel testo vengono scritti i dati ma non viene fatto alcun disegno. Vengono calcolati per ogni rubinetto i litri che fuoriescono per ogni minuto. Nella prima pagina di calcoli che propongono (scritta a matita) sommano queste quantità (litri al minuto) ottenendo 10,8. Per ricavare il tempo inizialmente impostano una serie di proporzioni, l'impressione, analizzando il testo, è che non sappiano bene come utilizzare la proporzione e fanno diversi tentativi fino ad arrivare ad un risultato che ottengono comunque dividendo la capacità per la velocità totale e che sembrano successivamente giustificare con una proporzione. Dopo 45 minuti chiedono di poter scrivere il ragionamento "dentro al dialogo" (è il primo gruppo che si accorge esplicitamente della richiesta e vuole continuare il dialogo). Nella trasformazione in dialogo di quanto fatto, parlano esplicitamente di "*velocità con cui l'acqua esce da ogni rubinetto*" ed utilizzano come unità di misura litri/min. Successivamente dicono che si deve trovare "*la relazione fra x la velocità e la dimensione (grandezza) del recipiente*" e propongono la formula :

$$\frac{Dimensione}{Tempo} = velocità = \frac{50l}{x_{min}} = 10{,}8l/min$$

Non è chiaro cosa intendano per velocità, inizialmente parlano di velocità dell'acqua poi la velocità diventa velocità come rapporto fra la dimensione del recipiente e tempo , non viene esplicitato in nessun punto il legame fra i due concetti. In ogni caso parlano di velocità. Per risolvere l'ultima equazione dicono di utilizzare la "*regola del tre*". Il risultato che ottengono è 4,269 che viene lasciato scritto in questo modo. Dopo 1 ora dall'inizio chiedo che tipo di grandezza sia il rapporto Volume/tempo, dicono che è la velocità con la quale l'acqua esce. Dopo 1 ora e 15 minuti li spingo a ragionare sulla velocità dell'acqua mentre esce dal tino ed arrivano a capire che dipende dalla pressione. Dicono che la velocità calcolata è quella media ed uno avanza il dubbio che possa cambiare il risultato e quindi su come si possa calcolare il tempo.

G7_3 (4°liceo italia) P1_Dia_Mi: dopo 25 minuti dicono di avere finito (non hanno fatto disegni). Chiedo di esplicitare le operazioni fatte e di spiegare l'uso della somma. Hanno calcolato per ogni rubinetto il rapporto fra il volume del tino ed il tempo impiegato, esplicitando che si tratta di litri al minuto. Sommano le grandezze e poi dividono il volume per il risultato ottenendo il tempo 4,63 minuti. Nella giustificazione della somma dicono che "*l'unica operazione possibile è la somma, in quanto sarebbe come sommare i litri che escono al minuto aprendo un rubinetto dopo l'altro*". Dopo 1 ora dall'inizio chiedo quale parte del testo li abbia particolarmente aiutati, dicono che è la parte dove ci sono i dati senza individuarne altre. Chiedo che tipo di grandezza sia litri/minuto, un alunno dice subito velocità, poi si blocca a pensarci ed una alunna dice di no che è un volume, propongo che ne discutano insieme e di scriverlo. Dopo 1 ora dall'inizio scrivono che la quantità litri/minuti è una velocità ma non ne sono sicuri, propongo di sfruttare questa idea per giustificare la somma.

G6_2 (2°liceo italia) P1_Ipr_Mi: dopo 10 minuti hanno fatto un disegno e sono arrivati ad una soluzione. Calcolano i rapporti capacità/tempo per tutti i rubinetti e poi sommano queste grandezze. Per trovare il tempo richiesto impostano e risolvono una proporzione. Chiedo di spiegare bene quello che fanno e di giustificare la somma. Giustificano la somma dicendo che i rubinetti vengono aperti contemporaneamente. Dopo 50 minuti dall'inizio dalla giustificazione che scrivono della somma delle grandezze l/t (che chiamano velocità), emerge che inizialmente hanno interpretato tali grandezze come velocità ma non erano tutti d'accordo su come interpretare la somma (una alunna dice che bisogna tenere fisso il tempo e non la distanza). Chiedo di spiegare bene quello che hanno detto e dopo 1 ora dall'inizio giustificano la somma delle grandezze (aiutandosi con un disegno) con un esempio di tre persone che vanno a velocità diverse e la distanza complessivamente percorsa che è la somma delle tre distanze (per un dato intervallo di tempo). In particolare propongono una corrispondenza fra le grandezze (portate) litri/minuti e le velocità. Dopo 1 ora e 20 minuti chiedo se la velocità di fuoriuscita dell'acqua sia costante o no, una alunna dice che non lo è perché la pressione cambia, io confermo che effettivamente non lo è e chiedo come cambia il loro procedimento, se cambia. Un alunno si chiede se la pressione ad un certo istante possa dipendere dal numero di rubinetti aperti, dico che la pressione non dipende da questo ma dall'altezza dell'acqua che sta sopra al rubinetto e ripropongo di pensare a come possa cambiare il loro ragionamento (se cambia). Propongono che le loro velocità siano velocità medie ma non fanno alcuna osservazione su come questo incida sul loro risultato.

G8_2 (4°itis) P1_Ipr_Mi: dopo 15 minuti dicono di avere finito. Hanno calcolato per ogni rubinetto quanti litri al minuto vengono svuotati, sommano (10,8 l/min) e poi dividono la capacità del tino per la il risultato ed ottengono 4,62 minuti. Chiedo di spiegare bene l'uso della somma, perché sommano le grandezze. Dopo 40 minuti dall'inizio non hanno spiegato il motivo della somma, chiedo perché facciano proprio una somma. Come giustificazione all'operazione di somma delle portate dicono che vanno sommate perché l'acqua esce contemporaneamente. Dopo 1 ora chiedo che tipo di grandezza sia litri/minuti e dicono che somiglia a metri /secondo. Chiedo se la velocità di uscita dell'acqua è costante o no e dicono che è costante. Allora descrivo la situazione del problema definendo con le mani un ideale tino cilindrico e descrivendo con le mani il livello dell'acqua che scende. Un alunno capisce che la velocità non sarà costante ma dipenderà dalla pressione e quindi da quanta acqua è presente nel tino, quindi chiedo di pensare a come cambia (se cambia) la soluzione che loro hanno proposto. In seguito alla mia osservazione sulla velocità non costante di svuotamento scrivono che il tempo calcolato è giusto se la velocità è costante, ma in realtà per calcolare il valore esatto avrebbero bisogno di altri dati come: altezza del tino, diametro, peso specifico del liquido.

Osservazioni sul testo P1 con metafora implicita	
Uso metafora (I2)	- In tutti i casi i gruppi risolvono il problema senza fare uso di analogie esplicite con altri domini ed in particolare con il dominio di corpi che si muovono su una linea.
Differenza testo (I2)	- Non ci sono evidenti differenze fra testi dialogati ed impersonali.
Azioni sperim/insegn (I3)	- Una analogia compare spontaneamente solo in un gruppo (G6_2) ma solo quando chiedo di giustificare la somma delle grandezze calcolate (portate).
Possibili indizi di metafore nascoste	- Quasi tutti i gruppi non hanno spiegato la somma delle grandezze (portate) se non con una riformulazione dello stesso fatto, la cosa appare a tutti tanto evidente che non hanno visto la necessità di dare giustificazioni più profonde. In un gruppo (G6_2) si cerca di giustificare la somma con una analogia con il dominio del moto rettilineo uniforme anche se non con la mappatura che mi aspettavo. - In diversi gruppi tuttavia si parla di velocità in maniera esplicita (G3_3, G6_2) o in maniera implicita (G7_3, G8_2). - In tutti i gruppi nei quali ho chiesto se la velocità di svuotamento era costante (G6_2, G3_3, G8_2), è evidente che stavano dando per

	scontato che lo fosse e tale considerazione modifica e mette in crisi la loro soluzione. Alcuni propongono che il procedimento sia corretto semplicemente considerando le velocità come velocità medie (G6_2, G3_3).
Confronto problema P1 con metafora esplicita	
I1, I2	non c'è evidenza di una maggiore dipendenza della produttività metaforica dalla forma del testo né nel caso di metafora implicita né nel caso di metafora esplicita.
I3	in nessun caso sono intervenuto (c'erano altri punti che volevo indagare, come la variazione di velocità, e non c'era abbastanza tempo).
I4	solo in un caso sono intervenuto direttamente per far notare e sfruttare la metafora (G7_1), comunque dopo che il gruppo aveva già risolto il problema con un altro metodo e riescono a individuare una analogia dove le portate vengono mappate su velocità anche se l'analogia che individuano non è quella da me prevista.

Tabella 4

G4_3 (2°liceo brasile) P2_Dia_Mi: Dopo 10 minuti dall'inizio dicono di avere terminato (nel loro foglio non compaiono disegni), io chiedo di scrivere la spiegazione di quanto hanno fatto. Dopo 20 minuti il testo è semplicemente una trascrizione scritta di quello che hanno fatto. Il testo inizia con il calcolo della quantità di acqua per minuto con cui ciascuna pompa riempie la vasca che calcolano con la "regola del tre", sommano le portate e, ancora con la regola del tre, ricavano il tempo necessario per riempire la vasca, ottenendo il tempo 5,45 minuti. Chiedo che spieghino meglio perché hanno sommato le grandezze. Dopo 30 minuti mostrano il dialogo (parziale) dove in realtà la somma non viene giustificata. Dopo 1 ora leggo il dialogo dove parlano esplicitamente di *velocità* di ogni pompa (in una maniera apparentemente incoerente visto che dicono "velocità di ogni pompa per minuto" ma probabilmente intendendo che stanno usando come unità di tempo il minuto). Nel dialogo viene scritta la mia domanda "*Perché voi sommate le velocità delle pompe*?" e la "spiegazione " sarebbe: "*Se la pompa rossa riempie la vasca con 15 litri in un minuto, la gialla con 10 e la verde con 30, possiamo concludere che se le facciamo funzionare contemporaneamente* per *riempire la vasca, la prima la riempirà con 15 litri, più i 10 litri della seconda e più i 30 litri della terza, avremo riempito la vasca con 55 litri*", si soffermano poi a spiegare la regola del tre. Chiedo che tipo di grandezza sia L/tempo. Poco dopo dicono che la grandezza è una "concentrazione", anche se un alunno dice che è come Km/h, propongo di cercare una grandezza più comune, più facile da capire da parte di chiunque (anche da chi non conosce la fisica o la chimica). Dopo 1 ora e 30 minuti chiedo quale frase/parola è stata più utile per la soluzione, dicono che è la 2° frase (quella del papà) perché ci sono più dati.

G5_4 (3° liceo italia) P2_Dia_Mi: dopo 10 minuti una ragazza chiede se può usare il quaderno degli appunti di matematica perché pensa che le possano servire le progressioni aritmetiche e geometriche. Dopo 15 minuti dall'inizio dicono di avere terminato, chiedo di spiegare come hanno ragionato, scrivendo i vari passaggi. Spiegano brevemente il risultato: calcolano per ogni pompa quanti litri immette al minuto, poi sommano i risultati ottenendo quanti litri al minuto vengono immessi nella vasca dalle tre pompe assieme, infine calcolano il tempo di riempimento della vasca. Dopo 20 minuti dall'inizio chiedo di giustificare l'uso della somma per le grandezze trovate dato che in realtà non l'hanno giustificata. Nella "spiegazione" della somma in realtà dicono che devono "necessariamente" sommare perché le pompe funzionano assieme. Poco dopo chiedo di trasformare in dialogo quello che hanno scritto. Dopo 1 ora dall'inizio chiedo se ci sono relazioni fra il problema proposto ed il problema di una macchina che deve percorrere un certo tragitto ed una decina di minuti dopo trovano una corrispondenza fra i due domini. Dicono che effettivamente ci sono delle relazioni, scrivono: *"le auto corrispondono alle pompe, il volume alla distanza..e la velocità corrisponde alla quantità di litri immessi al minuto dalle pompe "*. Propongo di inventarsi un problema simile a quello dato ma nel nuovo dominio (macchina e tragitto). Dopo 1 ora e 45 minuti dall'inizio propongono un problema ed io chiedo di risolverlo. Nel problema che propongono fanno corrispondere (e me ne accerto chiedendolo) alla capacità della vasca (300 l) una distanza di 30 Km da percorrere, poi associano a tre diverse macchine tre diverse potenze (120 , 150 e 170 cavalli) e tre diversi tempi di percorrenza, poi suppongono che ci sia una quarta macchina con potenza uguale alle potenze delle macchine precedenti. Nella soluzione, tuttavia, non sommano e non sfruttano le potenze ma invece calcolano le velocità di ogni singola macchina e poi le sommano, considerando implicitamente il risultato come la velocità con la quale la quarta macchina percorrerebbe il medesimo tragitto.

G2_2 (4° liceo brasile) P2_Ipr_Mi: dopo 5 minuti dalla consegna dicono di avere già trovato il risultato. Associano ad ogni pompa il rapporto L/minuto calcolando quindi, per ogni pompa, quanti litri vengono pompati in un minuto (risp. 15L/min, 10L/min e 30L/min). Successivamente sommano queste grandezze (55L/min) e dividono la capacità della vasca per la somma ottenuta(300/55). Chiedo perché facciano la somma delle portate che hanno calcolato rispondono che a loro sembra ovvio che le portate debbano essere sommate. Chiedo che tipo di grandezza sia il rapporto L/min, litri diviso minuti e rispondono che è "*tipo una velocità*" ed utilizzano la stessa definizione di velocità spazio/tempo per giustificarla, notano che il volume non è uno spazio ma è "*come uno spazio*". Da quello che scrivono si vede che non riescono a chiarirsi bene il significato della grandezza, provano diverse strade ma non riescono a spiegare bene perché la grandezza da loro calcolata sia legata alla velocità. Chiedo quale parte del testo è stata secondo loro più utile per individuare una soluzione e dicono che l'immagine della vasca che si riempie è utile e parlano di "*potenze* " delle diverse pompe che quando si usano insieme si sommano.

G6_1 (2°liceo italia) P2_Ipr_Mi: dopo pochi minuti dicono di avere terminato. Il lavoro inizia con il disegno della situazione descritta dal testo. Calcolano per ogni pompa il rapporto litri/tempo (che è stato trasformato in secondi), poi sommano le grandezze trovate ed usano il risultato per calcolare il tempo, ottenendo 326 secondi. Chiamano *portata* il rapporto l/t di ogni pompa. Chiedo di scrivere bene il procedimento e spiegare perché sommino le grandezze (portate). Dopo 10 minuti giustificano la somma con il fatto che le pompe agiscono assieme. Dopo 30 minuti chiedo perché sommino le velocità e la cosa pare a loro intuitiva. Nel riferirsi al rapporto litri/tempo alcuni alunni parlano di *peso* altri invece di *velocità*. chiedo a quale grandezza assomigli il rapporto che loro hanno calcolato fra litri e tempo e chiedo di giustificare tale somiglianza, scrivono che la portata assomiglia ad una velocità: "*Perché in entrambe si mette in relazione uno spostamento ed un tempo* *impiegato per compierlo*". Dopo 1 ora e 20 propongono una spiegazione della somiglianza fra portata e velocità io chiedo di giustificare l'uso della somma sfruttando questa somiglianza. Cercano poi di migliorare la spiegazione dicendo che "*La similitudine fra velocità e portata ci serve per svolgere questo problema perché sommando queste 3 portate differenti è come se sommassimo 3 forze diverse e quindi anche 3 velocità diverse per spostare un mobile utilizzate inizialmente in 3 diversi casi, ottenendo quindi 3 tempi differenti*".

Osservazioni sul testo P2 con metafora implicita	
Uso metafora (I2)	- Anche in questo caso i gruppi che sono riusciti a risolvere il problema (G4_3, G5_4) lo hanno fatto, almeno inizialmente, senza sfruttare analogie esplicite con il dominio dei corpi in movimento rettilineo.
Differenza testo (I2)	- Anche in questo caso, per quanto riguarda i tempi di soluzione si può evidenziare una maggiore velocità nel caso di testi impersonali (anche se non c'è stato uso di metafore esplicite), probabilmente dovuto alla maggiore semplicità nell'analizzare il testo. - Non ci sono evidenze di differenze fra testi dialogati ed impersonali relativamente all'uso della metafora.
Azioni sperim/insegn (I3)	- In un caso (G5_4) dopo avere risolto il problema senza usare analogie, in seguito ad un mio stimolo (metafora con il dominio del moto) riescono ad individuare una analogia sensata, il problema che propongono sfrutta sostanzialmente l'analogia che prevedevo (vedere tabella).Intervengo proponendo delle metafore solo in questo caso.
Possibili indizi di metafore nascoste	- Anche in questo caso in alcuni gruppi si parla di velocità (G4_3, G2_2). - Tutti i gruppi (G4_3,G5_4, G2_2, G6_1) non hanno spiegato la somma delle grandezze (portate) se non con una riformulazione dello stesso fatto, la cosa appare a tutti tanto evidente che non hanno visto la necessità di dare giustificazioni più profonde.
Presenza di altre metafore	- In un altro caso (G6_1), il gruppo cerca di spiegare (su mia richiesta) l'uso della somma con una analogia con le forze.
Confronto problema P2 con metafora esplicita	
I1, I2	- Anche con il problema P2 non ci sono evidenze di dipendenza dal tipo di testo, né con metafora implicita né con metafora esplicita, anche se in due casi la metafora esplicita viene notata anche se non sfruttata subito (G5_5) oppure non ne viene vista l'utilità (G4_4).
I3	- In un caso (G5_4) intervengo per spingerli ad individuare una analogia proponendo come secondo dominio una macchina che deve percorrere un tragitto, riescono ad individuare una mappatura sensata, in seguito propongo di inventare un problema e risolverlo, individuano una analogia come quella che mi aspettavo anche se non viene spiegata in maniera chiara.
I4	- In un caso (G5_5) dopo avere risolto il problema in un altro modo, decidono di sfruttare la metafora presente nel testo e

	successivamente, senza il mio intervento, riescono a costruire una analogia sensata. In un caso (G8_5) nonostante i miei interventi per far sfruttare la metafora, il gruppo non riesce a vedere alcun collegamento fra i due domini, la situazione si sblocca solo dopo che propongo un problema analogo sulle macchine e velocità e mostro in che modo si possa mappare il problema del secondo dominio sul primo per risolvere il primo problema, a questo punto un alunno capisce ed è in grado di risolvere il problema. In un caso (G4_4) il gruppo nota la metafora ma non la ritiene utile, io intervengo per spingerli ad individuare una analogia ed emergono alcuni problemi di mappatura. In un altro caso (G8_1) dopo che hanno risolto il problema in un altro modo, li spingo a sfruttare l'analogia proponendo una metafora più estesa (con un disegno) e chiedendo cosa potrebbero diventare le pompe, il gruppo riesce ad individuare una analogia ma sono presenti problemi di mappatura.

Tabella 5

G7_5 (4°liceo italia) P3_Dia_Mi: dopo 20 minuti chiedono se può andare bene usare una tabella nella quale stanno organizzando i dati in fasce chilometriche. Dico di continuare e di scrivere tutto quello che fanno sui fogli consegnati, visto che stanno usando anche altri fogli. Dopo 40 minuti mostrano una tabella nella quale hanno organizzato i dati in fasce chilometriche con intervalli di 50 Km e per ogni fascia calcolano il costo di ciascuna opzione e scrivono quale opzione è più conveniente. Io chiedo come possano essere sicure che i valori per i quali cambia la convenienza siano proprio quelli indicati e faccio un esempio usando la loro tabella. Il problema è che in ciascuna fascia dovrebbero stabilire in quali punti calcolare il costo visto che la convenienza può cambiare (come mostro loro con un esempio). Osservano che per arrivare alla soluzione esatta dovrebbero *calcolare tutti i valori*. Dopo 1 ora chiedono aiuto perché non sanno come proseguire, io chiedo che tipo di equazione sia y=0,25*x+20, non sanno cosa rispondere allora faccio scrivere l'equazione y=m*x+q una alunna dice subito che è "*tipo una retta*", e propongono di fare un grafico. Dopo 1 ora e 20 minuti mi mostrano il grafico nel quale non hanno rappresentato correttamente l'opzione C, aggiungendo 25 euro, dopo che spiego come va interpretata rifanno i calcoli. Questo errore è visibile anche nel grafico, nel quale inizialmente rappresentano l'opzione C come una retta, e, dopo la mia osservazione, capiscono che è una retta spezzata. Chiedo di spiegare bene come costruiscono il grafico. In seguito alle mie osservazioni, propongono un grafico dove, almeno qualitativamente, le rette sono rappresentate abbastanza bene anche se non riescono a sfruttare il grafico per trovare la soluzione del problema e sono presenti errori nelle intersezioni e non si trovano i calcoli che hanno permesso di costruirle. Verso la fine della sessione spiego il metodo geometrico basato sulle rette al gruppo.

G8_6 (4°itis italia) P3_Dia_Mi: dopo 20 minuti stanno ancora analizzando i dati. Si chiariscono (con me) che l'obiettivo è trovare l'opzione migliore in generale, indipendentemente dal numero specifico di chilometri. Dopo 40 minuti stanno procedendo per tentativi ed hanno provato con i valori di 80, 100, 150 che hanno scelto guardando i numeri delle equazioni ed i calcoli che facevano ma non sono molto convinti. Nei fogli hanno cominciato a lavorare riscrivendo le diverse opzioni in una forma diversa, più verbale. Poi provano a calcolare i costi per alcuni valori della distanza (100, 150 Km) ma non arrivano ad alcuna conclusione definitiva e completa. Dopo 1 ora sono ancora fermi ai tentativi (senza fare grafici). Poco dopo chiedo che cosa sia l'equazione y=0,25x+20, un ragazzo dice che è una proporzione mentre un altro dice che è una retta (prima dice che è qualcosa che si rappresenta sul piano cartesiano e poco dopo dice che è una retta), quindi propongo che le rappresentino graficamente. Dopo 1 ora e 20 minuti stanno rappresentando le rette in modo errato (pare che confondano l'asse x con l'asse y), anche se hanno calcolato correttamente le coordinate di alcuni punti, faccio notare l'errore e chiedo di rifare il grafico. E' presente una discussione sulla continuità della terza opzione nel punto a 50 Km con uso dei limiti destro e sinistro (che hanno già affrontato in matematica).

G1_3 (3°liceo brasile) P3_Ipr_Mi: dopo 15 minuti stanno facendo molte prove numeriche con la calcolatrice. Si basano sui numeri che compaiono nelle equazioni e non fanno disegni. Gli studenti iniziano a fare dei calcoli, usando anche la calcolatrice, provando alcuni valori di distanza e verificando quale delle diverse opzioni risulta più conveniente per i valori ottenuti. Questo li porta a capire, come scrivono anche nella pagina finale, che per certi valori è conveniente una opzione e per altri valori una opzione differente. Usando tentativi arrivano ad individuare i valori critici, nei quali cambia la convenienza delle diverse opzioni. Qualche minuto dopo continuando le loro prove numeriche e dicono di avere trovato la soluzione. Dopo 25 minuti dall'inizio chiedo come hanno fatto ad individuare i punti esatti nei quali cambia la "convenienza" delle diverse opzioni, dicono che prima hanno fatto dei tentativi (ed un alunno gesticola come se si stesse spostando avanti ed indietro su di una linea per evidenziare che i tentativi potevano fornire valori troppo alti o troppo bassi e che quindi ci si doveva spostare indietro o in avanti) e poi una ragazza mi mostra che hanno impostato una equazione. Spinti dalle mie domande su come fare ad essere sicuri di tali valori iniziano ad impostare equazioni, ed arrivano ai valori esatti (in effetti un valore ottenuto per tentativi non è corretto e successivamente viene modificato). Qualche minuto dopo chiedo cosa stiano facendo dato che li vedo fare molti calcoli, mi rispondono che stanno verificando se il metodo delle equazioni porta allo stesso risultato di quello "a tentativi" che comunque non è chiarito. Non fanno alcun disegno. Dopo 1 ora dall'inizio un alunno commenta che il punto di svolta è stato l'impostazione dell'equazione. Chiedo in che modo riescono a scegliere fra le opzioni dopo che hanno impostato l'equazione ed alcuni alunni pensano ad una disequazione. Propongono di utilizzare disequazioni che utilizzano correttamente per giustificare la soluzione definitiva che è corretta. Nel testo non ci sono molte spiegazioni. Dopo poco dicono di voler consegnare il lavoro, dopo avere constatato che non ci sono spiegazioni, li spingo a rivede il testo cercando di commentare e spiegare quello che hanno fatto. Poco dopo propongo al gruppo di interpretare in maniera geometrica il problema ed una alunna chiede: "..vedere le equazioni come rette?", io rispondo di si. Dopo circa 15 minuti hanno disegnato le rette (correttamente) e concordano che in questo modo la soluzione si vede più facilmente anche se coincide con quella già ottenuta per altra via.

G4_1 (2° liceo brasile) P3_Ipr_Mi: dopo 15 minuti chiedono cosa debbano fare, cosa chiede il problema, io spiego che dovrebbero determinare un metodo generale per determinare, dato il numero di Km, l'opzione più conveniente. Dopo 30 minuti chiedono chiarimenti sull'opzione C. In particolare non è loro chiaro come interpretare il termine additivo e la distanza. Una alunna chiede se è da interpretare come distanza dopo i 50 Km. (In realtà potrebbe essere una interpretazione alternativa ma equivalente). Spiego il significato della funzione. Io gesticolo nello spiegare la situazione come se le mie mani si spostassero su di una linea. Il loro insegnante interviene e dice che nel punto corrispondente ai 50Km le due funzioni “si congiungono”. Dopo 45 minuti stanno provando diversi valori (5,10, 20) e si sono accorti che a 20 Km cambia qualcosa. La ragazza gesticola come se la mano si spostasse su di una linea. Poco dopo vedo che continuano ancora a procedere per tentativi. Li spingo a considerare che il problema è stabilire i valori (uso la parola punti), dove cambia la convenienza. Come si può fare a trovarli? Dicono di non avere ancora trovato un metodo. Dopo 1 ora e 15 minuti spiegano la loro soluzione, che pare esatta, alla quale sono arrivati per tentativi e “*scoprendo delle regolarità* “. La maggior parte delle cose scritte sono calcoli. In sostanza tentano diversi valori e calcolano il costo di ogni opzione per poi vedere quale è la più conveniente. Procedono poi aumentando la quantità di chilometri in maniera regolare (con variazioni di 20Km) per dedurre quali sono i punti nei quali la convenienza cambia. Infine dicono di avere “scoperto” che se x è il numero di Km del viaggio:

se x< 20 allora conviene l’opzione A

se 20< x < 80 allora conviene l’opzione C

se 80< x < 120 allora conviene l’opzione A

se x> 120 allora conviene l’opzione B

Non è comunque evidente come arrivino a questo risultato. Io chiedo di spiegare bene, poi chiedo loro che cosa sia l’espressione y=….(eq. Di una retta), una ragazza di dice che lei ha pensato sin dall’inizio ad una retta o ad un moto rettilineo uniforme. Dopo 1 ora e 30 minuti dall’inizio disegnano le rette. Costruiscono un grafico qualitativamente corretto ma senza unità di misura e senza valori ma dove le caratteristiche delle rette sono sostanzialmente corrette. Chiedo come si possano sfruttare le rette disegnate per determinare i punti nei quali cambia la convenienza ed una alunna dice che si devono mettere a sistema le rette. Infine spiego come sfruttare il grafico delle rette per ottenere la soluzione del problema, capiscono subito e si meravigliano di come si possa risolvere il problema in maniera più veloce con questo metodo.

Osservazioni sul testo P3 con metafora implicita	
Uso metafora (I2)	- Nessuno dei gruppi sfrutta spontaneamente il collegamento con la geometria analitica, solo in un gruppo una ragazza dice di averlo pensato ma di fatto non è stato sfruttato (G4_1). - Tutti i gruppi propongono una soluzione ottenuta per tentativi, pensati in maniera più o meno intelligente, ma sfruttando direttamente le equazioni del testo.
Differenza testo (I2)	- Non c’è evidenza di differenze di comportamento, relativamente all’uso della metafora, fra testi dialogati o impersonali.
Azioni sperim/insegn (I3)	- Sono intervenuto in tutti i gruppi (G7_5,G8_6, G1_3,G4_1) affinchè sfruttassero la metafora. In certi casi è stato sufficiente questo stimolo perché il gruppo disegnasse un grafico (G1_3, G4_1), mentre in altri casi è stato necessario qualche sforzo aggiuntivo, ad esempio passare attraverso l’equazione generale della retta y=mx+q (G7_5), oppure l’equazione della retta è stata interpretata come retta ma in altro modo (G8_6). - I gruppi nei quali ho spiegato il metodo geometrico a partire da

	quello che erano riusciti a fare (G7_5, G1_3, G4_1) hanno mostrato di capirlo ed apprezzarlo per la sua maggiore chiarezza.
Uso di analogie	- Relativamente alla capacità di sfruttare l'analogia (modello geometrico) per risolvere il problema sono evidenti alcune difficoltà derivanti dalla non ancora completa padronanza degli strumenti della geometria analitica (G8_6,G7_5).
Confronto problema P3 con metafora esplicita	
I1, I2	- In questo caso si evidenzia una differenza di comportamento fra i testo con metafora implicita, dove non c'è mai uso spontaneo della metafora ed il testo con metafora esplicita, nel quale c'è uso spontaneo (quindi senza mio intervento) in due casi (G5_6, G5_2).
I3	- In alcuni casi (G7_5, G8_6) è necessario il mio intervento affinché prendano in considerazione l'equazione come equazione di una retta, inoltre io devo porla in una forma più generale (y=mx+q) perché la riconoscano come retta anche se è poi necessaria una mia guida per arrivare a capire il modello geometrico. In un caso (G1_3) è necessario un mio intervento per spingerli ad una interpretazione geometrica ma il mio stimolo è sufficiente affinché il gruppo (una alunna in realtà) riesca a costruire e sfruttare completamente l'analogia. In un altro caso (G4_1) il mio intervento sulla metafora (eq. della retta) è sufficiente perché il gruppo disegni correttamente le rette sul piano ma devo poi intervenire di nuovo per spiegare come sfruttare il grafico per risolvere il problema.
I4	- In alcuni casi il mio intervento si è limitato a fare notare la metafora (G8_3) il che è stato sufficiente per fare costruire completamente o quasi, il collegamento (analogia) con il modello geometrico. In altri casi il mio intervento non è bastato (G2_3) e gli alunni non sono stati in grado, da soli, di individuare l'analogia ed è stato necessario un mio intervento per permettere loro di capire come mappare i domini . In un caso (G5_6) il gruppo ha individuato autonomamente la metafora e l'ha sfruttata per costruire parzialmente il modello geometrico ma è stato necessario il mio intervento per capire fino in fondo il metodo di risoluzione.

Tabella 6

C)Testi senza metafora

G2_1 (4°liceo brasile) P1_Dia_NM: Iniziano facendo un disegno. Dopo 20 minuti dall'inizio, utilizzano delle formule che fanno direttamente riferimento a velocità e tempo. Dicono che lo spazio (ovvero il volume occupato dal liquido) "*è una distanza*". Chiedo perché utilizzino il termine velocità ed il termine distanza (usano il simbolo Δs). Hanno fatto un disegno rappresentando i rubinetti con tre fori di differenti diametri sul fondo del contenitore. Il disegno è un cilindro nel quale scrivono il simbolo che indica il raggio r e l'altezza h. Ma non disegnano alcuna graduazione o segno che indichi il livello dell'acqua. Scrivono la formula $Velocità = \frac{\Delta S}{\Delta T}$ e la usano per calcolare le diverse velocità nei tre casi. Sommano poi le velocità ottenute ed utilizzano il risultato per calcolare il tempo che impiega a svuotarsi con la nuova velocità. Scrivono il risultato nella forma $10.83 = \frac{50L}{T}$ e $T = 4.61\ min$. Dopo 30 minuti dall'inizio chiedo cosa stiano facendo e di spiegare bene, nel testo, perché sommano le velocità. Nella spiegazione che chiedo di scrivere giustificano la somma dicendo che hanno considerato "*come se ci fosse un solo un grande buco*". Osservano che il risultato è "*logico e possibile*" perché il tempo impiegato usando i tre rubinetti a aperti è certamente inferiore a ciascuno dei tre.

Dopo 40 minuti chiedo se le velocità sono costanti e rispondono che effettivamente non lo sono. Li spingo a ragionare su questo fatto. Affermano che tale velocità dipende dalla pressione e dalla quantità di acqua che c'è (in realtà sono io che li spingo ad arrivare a questo), disegnano poi una curva (con andamento decrescente e quasi iperbolico) che rappresenta la velocità di uscita in funzione del tempo, ma senza ulteriori giustificazioni, si chiedono se la pressione dipenda dalla forma del contenitore. Dopo 1 ora li spingo a ragionare sul fatto che si possa interpretare la velocità come una velocità media e come questo influisca sulla soluzione esatta, iniziano a parlare di *velocità media* , un componente dice che la soluzione è la stessa (non so se in maniera profonda o superficiale). Poco dopo consegnano il lavoro.

G4_2 (2°liceo brasile) P1_Dia_NM: dopo 5 minuti chiedono il significato di "graduada" ed io spiego che significa che ci sono linee con numeri. Dopo 20 minuti dall'inizio dicono di avere terminato. Nel testo gli alunni riscrivono i dati e fanno un disegno, scrivendo subito che la pressione sarà diversa se tutti i rubinetti vengono aperti. Calcolano poi per ogni rubinetto quanti litri al minuto vengono versati. Sommano le quantità ottenute ed impostano una proporzione per ricavare il tempo complessivo ricavando il tempo=4,63 minuti. Dicono che la presunta diminuzione di velocità dovuta alla diminuzione di pressione con tutti i rubinetti aperti non viene considerata. Chiedo di spiegare meglio quello che hanno detto sulla pressione ed i passaggi fatti e di giustificare la somma. Dopo 30 minuti mostrano quello che hanno scritto. Pare che giustifichino la somma dicendo che la pressione è trascurata. Dicono che l'operazione di somma è giustificata dal fatto che non viene considerata la diminuzione di pressione dovuta a tutti i rubinetti aperti, ma non spiegano ulteriormente questa operazione. Chiedo di spiegare meglio e pare che il loro ragionamento sia il seguente: se si aprono i tre rubinetti, la pressione che spinge l'acqua sarà minore rispetto a quando un solo rubinetto è aperto. Questo influisce sulla velocità, ma gli alunni dicono di trascurare questo effetto. Chiedo di trasformare il loro lavoro in un dialogo che prosegua quello del testo. Dopo 1 ora dall'inizio pongo al gruppo il problema della pressione durante la fuoriuscita di acqua. Siamo sicuri che la velocità sia costante? (dal loro ragionamento traspare che la stanno considerando tale). Arrivano velocemente ad intuire che la velocità diminuisce mentre l'acqua scende. (Questo tipo di effetto è diverso da quello che hanno descritto in precedenza). Propongo loro di pensare a come possa cambiare la soluzione, se cambia. Nel dialogo finale che propongono ripercorrono le tappe che secondo loro sono state più significative per la soluzione del problema: il calcolo riferito all'unità di tempo di 1 minuto, la somma di tali grandezze (parlano di velocità ma anche di quantità di acqua per minuto), il fatto che (secondo loro) aprendo i rubinetti contemporaneamente la pressione e quindi la velocità sarebbe minore e quindi il tempo aumenterebbe ma questo fatto viene trascurato, nemmeno nel dialogo viene giustificata l'operazione di somma.

G5_1 (3°liceo italia)P1_Ipr_NM: dopo 10 minuti stanno facendo un disegno. Dopo 15 minuti dall'inizio dicono di avere finito. Nel procedimento che propongono parlano di velocità con la quale il tino si svuota. Hanno calcolato per ogni rubinetto la quantità litri/minuti che chiamano velocità, poi le sommano, ottenendo 10,8, infine dividono la capacità del tino per 10,8 ottenendo il tempo 4,6 minuti. Dopo 40 minuti chiedo come definire la grandezza litri/minuto, un alunno dice che è la velocità con cui si svuota , invece dello spazio ci sono i litri. Chiedo perché sommino le grandezze. Dopo 1 ora dall'inizio la spiegazione che forniscono non è in realtà una spiegazione ed io chiedo nuovamente di spiegare perché sommino le grandezze. Dopo 1 ora e 10 minuti chiedo se la velocità sia costante durante lo svuotamento ed un alunno dice subito che all'inizio sarà maggiore e poi minore. Chiedo se questo può influire sul risultato da loro ottenuto, una alunna dice di si ma un altro non è convinto. Dopo 1 ora e 20 minuti dall'inizio dicono che il risultato non cambia perché si tratta di velocità medie e l'influenza sul risultato è trascurabile. Chiedo se il risultato è esatto o è una approssimazione e scrivono che ci potrebbero essere degli altri fattori che influenzano il risultato ma sarebbero così piccoli da poter essere trascurati.

G8_4 (4°itis italia) P1_Ipr_NM: dopo 15 minuti stanno calcolando la velocità ma poi utilizzano un metodo differente, non sommano le velocità ma considerano quanti litri svuotano singolarmente i rubinetti per arrivare a 50, quindi procedono per tentativi. Hanno iniziato calcolando il rapporto capacità/tempo per ognuno dei rubinetti, sommano il risultato trovando che in un minuto escono 10,8 litri da tutti i rubinetti assieme. Quindi dicono che in 4 minuti escono 43,2 litri e restano nel tino 6,8 litri. Chiedono se può andare. Dico di procedere spiegando bene quello che fanno. Dopo 30 minuti mi chiedono se va bene il procedimento che stanno usando, nel calcolo che fanno sono sbagliate le unità di misura, faccio notare l'errore e chiedo di chiarirsi il senso di quello che stanno facendo (dai calcoli infatti ho l'impressione che non abbiano chiaro quello che hanno fatto). Dopo 50 minuti dall'inizio hanno alcuni dubbi su come procedere con i 6,8 litri che devono essere svuotati "contemporaneamente" (hanno tolto ai 50 litri iniziali quelli che le pompe versano in 5 minuti). Un alunno fa un disegno schematico e si capisce che non sa come mettere insieme i diversi dati relativi ai singoli rubinetti. Il problema risiede nel fatto che hanno cominciato con un tipo di ragionamento che non riescono più ad applicare per i litri che mancano perché nel primo caso hanno considerato come dato di partenza il tempo e si sono ricavati per i litri versati per ogni rubinetto senza pensare al numero di litri per unità di tempo, quindi ora sono in difficoltà. Hanno tentato alcune vie che tuttavia cancellano (in maniera che fossero comunque ancora leggibili come avevo richiesto): il primo tentativo è quello di trovare il rapporto 6,8/portata per ciascuno dei rubinetti, ottenendo (anche se sbagliano inizialmente l'unità di misura) il tempo che ciascun rubinetto impiega per versare i litri rimanenti..poi si fermano visto che non sanno come usare i tre tempi ottenuti. Tentano poi un altro calcolo nel quale i tempi vengono trasformati in secondi ed impostate alcune proporzioni del tipo: 50 (litri): 600 (secondi)= x:1,36 (tempo che impiegherebbe il rubinetto a versare 6,8 litri)..ma anche qua non sanno come procedere e cancellano i calcoli. Poco dopo dicono di avere capito come fare. Calcolano le portate in secondi (quanti litri vengono versati da ogni rubinetto in un secondo, dove un calcolo tuttavia è sbagliato visto che mettono 60 invece che 600) poi sommano ottenendo 0,93048 l/s (che lasciano scritto in questo modo), dividono poi i litri restanti 6,8 per tale valore ed ottengono 7,3 secondi, sommano questo valore ai 4 minuti iniziali e concludono che il tempo impiegato sarà di 4 minuti e 7 secondi (scrivono anche i decimali ma in maniera diversa..non ho indagato sul motivo). In sostanza superano il problema precedente riducendo l'unità di misura ma utilizzando anche la divisione, non si accorgono tuttavia che potevano fare questo sin dal principio. Chiedo di scrivere bene quello che hanno fatto. Dopo 1 ora e 20 minuti dall'inizio chiedo se la velocità dell'acqua è costante o cambia durante lo svuotamento, un alunno dice che la velocità dipende dalla sezione dei rubinetti. Allora chiedo se, fissato il rubinetto, la velocità dell'acqua durante lo svuotamento cambia oppure no. Capiscono che deve dipendere dalla pressione ed un alunno dice che il risultato cambia perché gli ultimi 6,8 litri (riferendosi al loro procedimento) escono con una velocità minore. Un alunno comincia a pensare a come calcolare la pressione in fondo al tino. Dico di scrivere bene quello che pensano e che fanno.

Osservazioni sul testo P1 senza metafora	
Uso metafora	- In tutti i casi i gruppi risolvono il problema senza fare uso di analogie esplicite con altri domini ed in particolare con il dominio di corpi che si muovono su una linea.
Differenza testo	- Non ci sono evidenti differenze fra testi dialogati ed impersonali per quanto riguarda l'uso di metafore. - Non ci sono evidenti differenze nei tempi di risoluzione imputabili al tipo di testo. Solo in un caso (G8_4) il gruppo ci mette un tempo molto più lungo ma dall'analisi del protocollo penso che questo sia dovuto al tipo di strategia che hanno scelto più che al tipo di testo.
Azioni sperim/insegn	- In una caso (G4_2) si propone una giustificazione (sempre comunque dopo la mia domanda) secondo cui la somma è lecita perché si ipotizza che la pressione non cambi quando più rubinetti sono aperti e quindi la portata dei singoli rubinetti non cambia.
Possibili indizi di metafore nascoste	- in un caso (G2_1) si utilizzano esplicitamente termini e formule del .dominio di corpi che si muovono su una linea. - In diversi gruppi si parla di velocità in maniera esplicita (G2_1, G5_1) o in maniera implicita (G4_2,). - In tutti i gruppi (G8_4,G2_1, G5_1, G4_2) dopo che ho chiesto se la velocità di svuotamento era costante, è evidente che stavano dando per scontato che lo fosse e tale considerazione modifica e mette in crisi la loro soluzione. Alcuni propongono che il procedimento sia corretto semplicemente considerando le velocità come velocità medie (G5_1). - In un caso (G5_1) non hanno giustificato la somma delle grandezze dopo la mia domanda.
Uso di analogie	- In un altro caso (G2_1) si cerca di giustificare la somma con una analogia con lo stesso dominio ma immaginando un tino con un unico rubinetto più grande (similitudine).
Confronto problema P1 con metafora esplicita ed implicita	
I1, I2	- In nessun caso c'è stato un uso esplicito di una analogia.
I3, I4	- Non ho proposto l'analogia in alcun caso.

Tabella 7

G6_3 (2°liceo italia) P2_Dia_NM: Dopo 25 minuti dicono di avere finito. Chiedo perché chiamino le grandezze *velocità* e perché le stiano sommando. Dopo 50 minuti utilizzano la media delle velocità come velocità delle tre pompe assieme (utilizzano la formula v=s/t), hanno calcolano i rapporti litri/tempo per ogni pompa chiamando *velocità* il risultato. Tuttavia per risolvere il problema iniziano a calcolare la media di tali velocità. Successivamente trovano il tempo dividendo la capacità della vasca per tale velocità media ottenendo 16,4 minuti. Chiedo di giustificare questo nel dialogo. Dopo 1 ora dall'inizio non hanno giustificato l'uso della media delle velocità, faccio loro notare che il tempo impiegato dovrebbe essere minore di quello impiegato da una qualunque delle singole pompe (una alunna se ne accorge dopo che li spingo a osservare bene i risultati). Poco dopo capiscono che hanno sbagliato e decidono che le grandezze vanno sommate, io chiedo di giustificare la somma. Nel testo non giustificano l'uso della somma.

G7_2 (4°liceo italia) P2_Dia_NM: dopo 15 minuti hanno terminato. Non fanno disegni ed iniziano calcolando il rapporto fra il volume della vasca ed i tempi impiegati con ciascuna delle pompe. L'unità di misura è inizialmente scorretta (l) e la correggono solo in seguito ad una mia osservazione. Poi sommano tali rapporti ed impostano una proporzione per ricavare il tempo totale per riempire la vasca. Chiedo di giustificare la somma e spiegare che tipo di grandezza sia litri/tempo (che comunque scricono con l'unità di misura errata l, inoltre parlano di tale grandezza come di volume). Dopo 30 minuti chiedo che tipo di grandezza sia litri/minuti; la chiamano inizialmente volume e poi correggono in volume estratto in un minuto, anche se nell'unità di misura indicano solo L. La loro giustificazione della somma non è del tutto chiara, dicono infatti che: (la somma dei volumi pompati in un minuto da ciascuna pompa) *è un passaggio fondamentale perché trovando il volume totale pompato in un minuto rimane una sola incognita nella proporzione V1:T1=Vf:T2*, sembra quasi che la ragione stia in una maggiore agibilità matematica (non so fino a che punto ne fossero consapevoli ed io non sono riuscito ad approfondire). Dopo 40 minuti dall'inizio mostrano il dialogo nel quale, in realtà, non viene data la giustificazione della somma, una alunna dice che è intuitivo e logico come 2+2 fa 4, io chiedo perché facciano proprio una somma e non altre operazioni. Dopo 1 ora e 20 minuti dall'inizio propongo di inventarsi un problema simile nel quale si tratti di velocità. Faccio notare l'errore sull'unità di misura e lo correggono. Il problema che propongono è il seguente:"*Marco e Luca partono all'istante t e Luca parte 100 m avanti rispetto a Marco e procede con una velocità di 10Km/h. Dopo 20 secondi Marco lo raggiunge e procedono entrambi alla velocità di Marco. In un minuto hanno percorso 40 metri. Quale è la velocità di Marco?*".

G7_6 (4°liceo italia) P2_Ipr_NM: dopo 15 minuti dicono di avere finito. Calcolano la quantità di acqua spostata in un minuto, sommano le quantità trovate ed infine dividono la capacità per la quantità trovata ottenendo un tempo di 5,45 minuti. Chiedo si giustificare la somma. Dopo 20 minuti dall'inizio provano a giustificare la somma facendo appello alla forza delle pompe che si sommerebbe (quindi proponendo una metafora). Nella spiegazione della operazione di somma dicono che con la somma riescono a trovare la *gittata* (ma prima scrivono e poi cancellano il termine *forza*) di una pompa equivalente alle tre pompe date. La somma è giustificata dal fatto che le pompe agiscono contemporaneamente. Io chiedo che tipo di grandezza sia litri/minuti, prima dicono che è uno spostamento, poi una alunna parla di volume diviso tempo ed un altro alunno dice che è una velocità. Chiedo agli alunni di pensare assieme a come rispondere alle due domande (giustificazione della somma e tipo di grandezza). Dopo 40 minuti dall'inizio, parlano di gittata riferendosi alla capacità della pompa di spostare acqua (si riferiscono alle nozioni apprese in scienze dove il professore ha parlato di gittata relativamente al cuore, quindi pare che propongano un'altra metafora). Poi spiegano cosa intendono per gittata: quantità di acqua portata in un minuto e ribadiscono il fatto che la somma deriva dal fatto che le pompe agiscono contemporaneamente. Dico che in fisica si parla di portata. Dicono che il rapporto litri/minuti non è una velocità perché non è spazio/tempo ma volume/tempo. Chiedo di spiegare il fatto che queste portate vengono sommate. Dopo 1 ora dall'inizio spiegano che va fatta una somma perché le pompe agiscono contemporaneamente (un alunno dice anche che i lavori delle pompe si sommano). Poco dopo chiedo di pensare ad un problema che somigli a quello dato ma nel quale le grandezze litri/minuto diventino delle velocità. Successivamente propongono un primo problema (che tuttavia non li soddisfa) dove ci sono tre persone che devono percorrere uno stesso tragitto e lo fanno in tre tempi diversi. Ciò che non li convince è che le persone dovrebbero "*fondersi*" per poter tradurre il problema del testo e la velocità non sarebbe la stessa. Dico di scrivere bene quello che hanno pensato (visto che non è del tutto chiaro) e di continuare a pensare anche ad altri problemi. Come problema simile a quello dato propongono il seguente: "*Arturo, Claudio e Andrea stanno facendo una corsa sulla stessa strada rettilinea e partendo ciascuno dalla propria casa. Andrea, il più lento, mantiene per l'intera durata della corsa una velocità di 10Km/h, Claudio mantiene la velocità di 20Km/h, Arturo, il più veloce, mantiene i 40Km/h. Sapendo che la corsa è durata 3 ore ed arrivano contemporaneamente, quanto distano le loro case dall'arrivo?*".

G1_2 (3°liceo brasile) P2_Ipr_NM: dopo 10 minuti hanno trovato una soluzione sommando le portate e senza usare le metafore previste. Hanno dei problemi nella conversione dei minuti (decimali) in secondi. Hanno calcolato per ogni pompa quanti litri/min riesce a pompare, quindi sommano le tre portate e infine dividono la capacità della vasca per la portata complessiva. Si nota che nel testo scrivono che dividono la portata per la capacità ma poi effettuano l'operazione inversa (quella giusta). Ottenendo un valore di 5,45 minuti cercano di trasformare i decimali in secondi ed ci riescono impostando una proporzione. Dopo 20 minuti dall'inizio chiedo di spiegare la soluzione che propongono (che pare corretta). Non si trovano ulteriori giustificazioni nel testo che possano far pensare a metafore o analogie, almeno in maniera esplicita. L'unica cosa che viene specificata è che per risolvere il problema hanno "*scelto di pensare ad una progressione del tempo minuto per minuto*". Mi pare che con questo abbiano voluto intendere che l'unità da loro fissata per calcolare la portata e per poi sommare le singole portate sia il minuto. Dopo 1 ora consegnano il lavoro.

Osservazioni sul testo P2 senza metafora	
Uso metafora	- Anche in questo caso i gruppi (G7_2, G1_2, G7_6) che sono riusciti a risolvere il problema senza un mio intervento lo hanno fatto, almeno inizialmente, senza sfruttare analogie esplicite con il dominio dei corpi in movimento rettilineo.
Differenza testo	- Non ci sono evidenti differenze fra testi dialogati ed impersonali per quanto riguarda l'uso di metafore. - Anche in questo caso, per quanto riguarda i tempi di soluzione si può evidenziare una maggiore velocità nel caso di testi impersonali (anche se non c'è stato uso di metafore esplicite), probabilmente dovuto alla maggiore semplicità nell'analizzare il testo.
Azioni sperim/insegn	- In un caso (G6_3) non riescono a risolvere correttamente il problema perché calcolano la media delle portate e non si accorgono dell'errore fino a quando non lo faccio notare io.
Possibili indizi di	- In un caso si parla di velocità spontaneamente (G6_3) ,in un altro in

metafore silenti	seguito a una mia domanda viene associata la grandezza litri/minuti alla velocità ma anche ad altre grandezze (G7_6). - In due casi (G6_3, G7_2) non hanno spiegato la somma delle grandezze (portate) dopo che lo avevo richiesto esplicitamente, in un caso utilizzano la somma ma non la giustificano (G1_2).
Altre metafore	- In un caso (G7_6) in seguito ad una mia richiesta di spiegazione, propongono una spiegazione paragonando le pompe a delle forze (metafora) che si sommano e, successivamente dicendo che i lavori delle pompe si sommano.
Uso di analogie	- Dopo la mia richiesta di trovare un problema analogo, in un caso (G7_2) propongono un problema che tratta di moto rettilineo uniforme ma con poca analogia (o nessuna) con il problema del testo, il problema proposto è inoltre mal posto (i dati sono contraddittori).In un caso (G7_6) compare una interessante difficoltà, già vista in altri gruppi, riconducibile (almeno mi sembra) ad una difficoltà di mappare esattamente i problemi nei due domini. Nel problema che propongono (consistente) è possibile vedere caratteristiche dell'analogia che , tuttavia, non è completa.
Confronto problema P2 con metafora esplicita ed implicita	
I1, I2	- Anche nel caso del problema P2 in nessun caso c'è stato uso esplicito di una analogia per la risoluzione del problema (senza il mio intervento).
I3, I4	- Propongo la costruzione di una analogia in alcuni casi. In uno (G7_2) propongono un problema che oltre ad essere incoerente, non pare avere molta analogia con il problema di partenza, io non sono intervenuto ulteriormente anche per mancanza di tempo. In un altro caso (G7_6), dopo alcuni problemi di mappatura (rilevati anche in altri gruppi) propongono un problema che è presenta alcune analogie anche se non è perfettamente analogo, anche in questo caso non ho proposto ulteriori stimoli.

Tabella 8

G3_2 (1° liceo brasile) P3_Dia_NM: dopo 10 minuti stanno ragionando insieme e chiedono chiarimenti sulla terza opzione, vogliono sapere se devono sommare o no il 25. Dopo 25 minuti dall'inizio stanno procedendo per tentativi numerici, usano anche i numeri che compaiono nel testo 25, 50, 100 e poi tentano valori intermedi come 80 ("*perché è fra 50 e 100*"). Dopo 50 minuti dall'inizio dicono di avere finito e dall'analisi si vede che hanno proceduto per tentativi, arrivando ad un risultato che pare corretto, io chiedo come possano essere sicuri del risultato, mi dicono (una alunna) che sa che si dovrebbe usare un sistema ma non sa come fare. (*Risulta che la ragazza ha già frequentato un'altra classe dove hanno studiato i sistemi ma non sa come usarli*). Nel testo non compare alcun tipo di disegno o grafico. Iniziano calcolando il costo per diversi valori, usano i valori: 50, 25, 10, 100, 60, 80, 120 Km. Quando chiedo una giustificazione dicono che stanno procedendo a tentativi ma non spiegano bene perché abbiano deciso di usare proprio quei valori. Successivamente propongono una soluzione in questo modo:

0<d<20 opzione A

20<d<80 opzione C

80<d<120 opzione A

d>120 opzione B

In realtà il 25 viene mutato in un 20 dopo un ulteriore tentativo (che viene scritto successivamente). La strategia quindi è per tentativi, non vengono impostate equazioni per determinare i punti nei quali cambia la convenienza. Dopo 1 ora e 10 minuti dall’inizio consegnano il lavoro.

G6_4 (2°liceo italia) P3_Dia_NM: Dopo 15 minuti hanno iniziato a fare un grafico su di un piano cartesiano. Dopo 25 minuti hanno disegnato il grafico (che non sta tutto nel foglio) ed hanno chiaramente individuato un procedimento corretto (trovano i punti di intersezione). Chiedo di continuare il dialogo utilizzando le idee che hanno avuto. Il gruppo ha definito subito la strategia di risoluzione del problema che consiste nel metodo geometrico. Hanno trasformano le equazioni proposte in equazioni di rette (rinominando le lettere). Il grafico è fatto bene ed i calcoli pure, anche se il grafico risulta schiacciato a destra e non vengono rappresentati in maniera distinguibile tutti i punti di intersezione. Arrivano ad un risultato corretto, sfruttando senza problemi il significato del grafico in termini del problema da risolvere. (In realtà è principalmente un alunno a “dirigere i lavori del gruppo” che è particolarmente dotato anche in matematica). Dopo 1 ora e 10 minuti dall’inizio vogliono consegnare, chiedo perché abbiano pensato subito ad un grafico e dicono (un alunno) che è la prima cosa che hanno pensato. Risulta che hanno già affrontato problemi simili dove l’uso di grafici si era rivelato utile.

G6_5 (2° liceo italia) P3_Ipr_NM: dopo 15 minuti stanno provando diversi valori per stabilire quale opzione è più conveniente. Dopo 30 minuti sono passati allo studio della convenienza tramite disequazioni. Dopo 50 minuti dall’inizio dicono di avere problemi nella impostazione delle disequazioni per distanze maggiori di 50 Km, inoltre non riescono ad impostare in maniera coerente tutte le disequazioni che servirebbero. Dall’analisi del testo si vede che non riescono sempre a capire il significato dei sistemi di disequazioni che impostano ed interpretano scorrettamente i risultati. Dopo 1 ora e 30 dall’inizio sintetizzano i risultati in una maniera ridondante e non completamente coerente, chiedo di migliorare la loro sintesi.

G7_4 (4°liceo italia) P3_Ipr_NM: dopo 30 minuti dall’inizio stanno costruendo un grafico tracciando i punti per le diverse opzioni ad intervalli di 10 Km. Dopo 50 minuti dall’inizio mostrano un grafico composto da insiemi di punti che sembrano allineati (ma loro non parlano mai di rette) dove vedono che si possono dividere le distanze in fasce. Sfruttano le caratteristiche geometriche per trovare rapidamente una soluzione che è abbastanza corretta (solo un punto a 100 Km non è corretto). Hanno fissato due assi cartesiani, quello orizzontale dei Km e quello verticale dei costi (non usano x ed y), poi hanno calcolato i costi delle tre opzioni ad intervalli di 10 Km ed hanno segnano i punti di tre colori diversi. Dal grafico quindi ricavano la soluzione che inizialmente non è completamente corretta dato che individuano uno dei punti di cambiamento di convenienza a 100 Km osservando le caratteristiche del loro grafico. Chiedo di spiegare come ottengono i valori dove si ha un cambiamento di convenienza. In effetti non riconoscono esplicitamente nelle equazioni delle rette e non impostano sistemi per ottenere i punti di intersezione. Il loro ragionamento è tutto grafico, per questo si sbagliano con il punto a 100 Km, perché il loro grafico suggeriva una intersezione in realtà inesistente. Dopo 1 ora e 10 minuti dall'inizio da quello che hanno scritto si vede che i valori di intersezione (che comunque *non chiamano intersezioni*) sono stati trovati a tentativi, non hanno imposto alcun sistema anche perché non sono convinti che i grafici siano rette. Un alunno dice che sembrano o dovrebbero essere rette (dopo la mia domanda su cosa rappresentassero quegli insiemi di punti). Hanno comunque sfruttato le proprietà geometriche per trovare la soluzione del problema. Dopo 1 ora e 30 minuti dall'inizio chiedo come si faccia a capire se sono o meno delle rette e dicono di non saperlo. Chiedo quale è l'equazione della retta e propongono alcune espressioni (anche di secondo grado) ma non sono convinti di nessuna. A questo punto ricordo loro l'equazione y=m*x+q e li spingo a vedere come sfruttare questa equazione nel problema. Riconoscono la corrispondenza fra il costo e la y, la distanza e la x e gli altri due parametri, quindi chiedo come si possano trovare i punti di intersezione con queste equazioni e rispondono che le equazioni vanno messe a sistema.

Osservazioni sul testo P3 senza metafora	
Uso metafora	- In due casi (G3_2, G6_5) non sfruttano rappresentazioni geometriche e procedono per tentativi, in un caso (G6_4), sostanzialmente per merito di un alunno, iniziano subito a disegnare rette e riescono a risolvere correttamente il problema per via geometrica, in un caso (G7_4) sfruttano una rappresentazione geometrica ma senza rendersi completamente conto degli oggetti geometrici che stanno costruendo, quindi senza riuscire a sfruttare in pieno l'analogia col modello geometrico.
Differenza testo	- Non c'è evidenza di differenze di comportamento, relativamente all'uso della metafora, fra testi dialogati o impersonali. In ciascuno dei due insiemi è presente un gruppo che ha sfruttato una rappresentazione geometrica, ed imputo il successo completo di uno di questi alla presenza di un alunno indubbiamente eccellente.
Azioni sperim/insegn	- In un caso (G7_4), visto che erano riusciti a sfruttare una analogia col modello geometrico anche se in maniera incompleta, ho cercato di spingerli a riconoscere gli oggetti geometrici implicati nei loro ragionamenti (rette) e sono emerse alcune difficoltà derivanti dalla non ancora completa padronanza degli strumenti della geometria analitica. In ogni caso sono stati in grado di capire il metodo con la mia guida.
Confronto problema P3 con metafora esplicita ed implicita	
I1, I2	- In due casi utilizzano rappresentazioni geometriche, in uno (G6_4) per merito delle grandi capacità di un alunno che vede immediatamente (anche per esperienze precedenti) l'utilità delle rette nel piano cartesiano, in un altro (G7_4) si sfrutta una rappresentazione geometrica ma senza consapevolezza degli oggetti matematici implicati.
I3, I4	- In un gruppo (G6_4) il gruppo ha individuato e sfruttato il modello geometrico (analogia) senza miei interventi. Successivamente mi dicono che avevano già utilizzato il metodo geometrico per risolvere

	altri problemi ed era stato efficace (quindi è stata importante l'attività precedente). In un caso (G7_4) il gruppo individua in maniera autonoma il metodo geometrico ma non sfrutta il concetto di retta e quindi nemmeno di intersezione fra rette, è necessario il mio intervento per portarli a riconoscere tali oggetti matematici in quello che stavano facendo, che comunque era abbastanza corretto.

Tabella 9

Sintesi dei risultati e valutazione delle ipotesi di ricerca

Le ipotesi sperimentali per l'esperimento A erano:

I1: *Nel caso di testi con metafora esplicita l'uso della stessa per costruire una analogia non dipende dalla forma impersonale o dialogata del testo.*

I2: *Nel caso di testo con metafora implicita c'è dipendenza dalla forma del testo e mi aspetto che nel testo dialogato ci sia maggiore facilità ad utilizzare la metafora.*

I3: *Nel caso di testo con metafora implicita c'è una forte dipendenza dall'intervento dell'insegnante/sperimentatore indipendentemente dal testo.*

I4: *Nel caso di testo con metafora esplicita una c'è una dipendenza minore, rispetto al caso precedente, dall'insegnante/sperimentatore per l'interpretazione della metafora.*

Iniziamo dalle ipotesi I1 ed I2 distinguendo due casi:

A) Nel caso dei problemi P1 e P2 non si evidenzia mai un uso spontaneo di quella che ho definito metafora (sia esplicita che implicita) all'interno del testo, per arrivare ad una analogia utile a risolvere il problema, quindi non si pone il problema della dipendenza della produttività metaforica dal tipo di testo (Tabelle 1,2,4,5,7,8).

B) Nel caso del problema P3 si evidenzia che è utilizzata in alcuni casi la metafora esplicita (Tabella 3) e non viene utilizzata spontaneamente quella implicita (Tabella 6) ed anche nel caso di testi senza metafora in due casi (Tabella 9) viene utilizzato spontaneamente un collegamento con il dominio geometrico del piano cartesiano. In tutti i casi non c'è evidenza di differenze fra testo dialogato e testo impersonale.

Quindi possiamo sintetizzare che:

Ipotesi I1: in parte pare corroborata (nel caso del problema P3)

Ipotesi I2: non ci sono chiare evidenze che la verifichino

Per analizzare le Ipotesi I3 ed I4 sintetizziamo i diversi casi:

Metafora esplicita

P1: in un solo caso propongo l'uso dell'analogia ma il gruppo non riesce a sfruttarla in maniera completa (Tabella 1).

P2: Sono intervenuto in tre casi in modo che prendessero in considerazione la metafora (G8_5, G4_4, G8_1). In un caso sono intervenuto dato che non riuscivano a risolvere il problema ed ho proposto di sfruttare la metafora (Tabella 2) ma questo non è stato sufficiente per individuare alcuna analogia. Devo intervenire proponendo direttamente l'analogia affinché la possano utilizzare per risolvere il problema. In altri due casi (Tabella 2) ho proposto esplicitamente di usare la metafora e questo è bastato per individuare analogie, anche se con alcuni problemi di mappatura fra domini.

P3: Sono intervenuto per fare sfruttare la metafora in due casi (G8_3, G2_3). In un caso ci sono stati problemi derivanti dalle conoscenze e competenze in geometria analitica (Tabella 3). In un altro caso il mio intervento si limita a fare prendere in considerazione la metafora (che non era stata notata), e questo risulta sufficiente perché uno degli alunni capisca come costruire e sfruttare il modello geometrico (analogia).

Metafora implicita

P1: Non sono intervenuto nel caso di metafora implicita (Tabella 4).

P2: Intervengo solo in un caso proponendo una metafora con il dominio dei corpi in movimento rettilineo (G5_4) e questo permette l'individuazione di una analogia come quella che mi aspettavo (Tabella 5).

P3: Sono intervenuto in tutti i casi ed in due il mio stimolo è stato sufficiente per l'identificazione dell'analogia con un modello geometrico (Tabella 6), in altri casi è stato necessario uno sforzo maggiore.

Senza metafora

P1: Non sono intervenuto (Tabella 7).

P2: Intervengo in alcuni casi affinché individuino una analogia, in un caso senza sostanziale successo, in un altro invece viene individuata una analogia anche se non completa (Tabella 8).

P3: Sono intervenuto solo in un caso nel quale avevano autonomamente individuato una analogia con un modello geometrico, ma senza riconoscere completamente gli oggetti matematici che avevano di fronte. Il mio intervento è servito, con qualche sforzo, a fare riconoscere e sfruttare il modello geometrico (Tabella 9).

Nel caso del problema P1 non ci sono sufficienti informazioni per trarre qualche conclusione (come già ho scritto in questo caso ero più interessato a valutare altre variabili e non ho cercato quasi mai di proporre la metafora). Con il problema P2 e metafora esplicita si ha un caso nel quale il mio intervento non ha avuto effetti e due con effetto positivo. Con la metafora implicita in un caso (l'unico nel quale sono intervenuto in questo senso) ha avuto effetti positivi. Nel caso senza metafora si ha un caso positivo ed uno negativo, quindi non ci sono evidenze che confermino una dipendenza della mia azione dalla variabile metafora esplicita/implicita. Nel caso del problema P3, il mio intervento sul testo con metafora esplicita non porta ad un risultato pienamente positivo, mentre nei casi di testi con metafora implicita ci sono stati due risultati positivi. Anche nel mio intervento con il testo senza metafora il risultato è stato positivo. Quindi non ci sono nemmeno in questo caso evidenze della dipendenza ipotizzata della mia azione dalla variabile metafora implicita/esplicita. Pertanto possiamo concludere che:

Ipotesi 3: non ci sono chiare evidenze che la verifichino

Ipotesi 4: non ci sono chiare evidenze che la verifichino

In sintesi da questa valutazione emergono indizi di:

- una parziale corroborazione della ipotesi I1 (relativamente al problema P3);
- non verifica delle ipotesi I2, I3, I4.

Appendice 2: una soluzione al primo problema

A seconda del livello di precisione richiesto e delle variabili delle quali si vuole tenere conto, il modello può essere anche molto complesso. Se non si prendono in considerazione: la viscosità del liquido, la turbolenza, la perdita di energia al momento della fuoriuscita e supponendo la superficie dei rubinetti trascurabile rispetto a quella del cilindro e si fanno alcune altre ipotesi, si può arrivare ad una formula per il calcolo del tempo di svuotamento che permette di giustificare lo stesso metodo risolutivo usato nel secondo problema. Si trova infatti che il tempo di svuotamento è inversamente proporzionale alla sezione del rubinetto con una costante che è la stessa per tutti i rubinetti, da cui segue la stessa formula usata per il secondo problema. Il procedimento richiede l'uso sia di conoscenze fisiche che di conoscenze matematiche conosciute o alla portata di studenti dell'ultimo anno di liceo o del quarto anno di istituto tecnico (dove l'analisi viene già affrontata).

1. **Alcune ipotesi e definizioni**

Facendo riferimento alla figura 1 seguente, indichiamo con:

- S(y) la sezione del recipiente che dipenderà, in generale dalla distanza della sezione dalla coordinata verticale y.
- S1 la sezione del rubinetto posto sul fondo.
- v la velocità di discesa del livello del liquido calcolata rispetto all'asse verticale.
- v1 la velocità di fuoriuscita del liquido dal rubinetto di sezione S1.

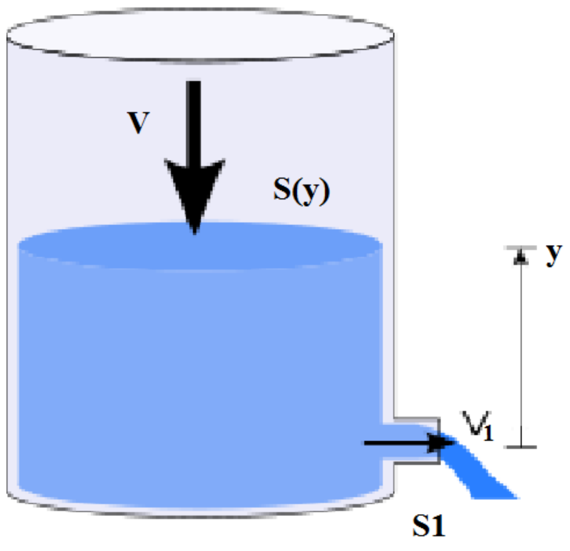


Figura 1 (tratta da wikipedia con alcune modifiche)

Ipotesi 1: *la velocità di fuoriuscita del liquido dal rubinetto posto sul fondo, dipende solo dall'altezza della colonna di liquido contenuta nel recipiente (non dalla forma del recipiente, non dalla quantità di liquido, non dalla forma e dalla superficie del foro da cui esce il liquido dal fondo).*

Ipotesi 2: *il liquido che è contenuto nel recipiente è incomprimibile e la sua densità è costante.*

Ipotesi 3: *la forma del recipiente non cambia durante lo svuotamento, il recipiente è rigido (ovviamente non poroso).*

Ipotesi 4: *la sezione dei rubinetti (fori di uscita del liquido) è piccola rispetto la sezione del contenitore (supponiamo che sia sempre vero anche se la forma del contenitore è qualunque).*

2. Relazione fra v e v1

Dalle ipotesi 2 e 3 possiamo trovare la relazione che lega velocità v di discesa del livello del liquido nel recipiente (misurato su un ideale asse verticale) alla velocità di v1 fuoriuscita del liquido dal rubinetto 1. In un certo intervallo di tempo Δt si ha che la quantità di liquido che fuoriesce deve essere uguale alla quantità di liquido che è tolta dal recipiente, quindi: $S1 \cdot v1 \cdot \Delta t = S(y) \cdot v \cdot \Delta t$ perciò deve aversi: $v = \frac{S1}{S(y)} v1$ (1)

Notiamo che dall'ipotesi 1 segue che la velocità del punto P, se S1 è fissato, la velocità di discesa del liquido dipende solo da y e da S1, quindi se fissiamo S1, v dipende solo da y, e potremo scrivere v=v(y).

In quanto segue ragioniamo con una analogia che lega i due domini: liquido nel recipiente e punto, indicato con y, che si muove lungo il segmento verticale. Il recipiente è vuoto quando il punto raggiunge il punto sul fondo.

3. Calcolo del tempo di svuotamento

Ora ragioniamo sul punto P che indica il livello del liquido su un ideale asse verticale. Se S1 è fissato, tale punto si muove verso il basso con velocità v(y), che dipende solo da y (che è la posizione su tale asse). Se l'altezza della colonna iniziale di liquido contenuto nel recipiente è h, allora il tempo di svuotamento T del recipiente sarà dato dal tempo che il punto P impiega per percorrere una distanza h, cioè il tempo che impiega, partendo dalla coordinata y=h ad arrivare alla coordinata y=0 sull'asse verticale. (figura 1).

Il problema è dunque il seguente: *conoscendo la legge che lega la velocità del punto P alla sua posizione, calcolare il tempo che impiega per percorrere la lunghezza h.*

Se indichiamo con $t = g(y)$ (2) la funzione, che supponiamo esista e sia derivabile (**Ipotesi 4**) e quindi continua, che lega il tempo alla posizione del punto P, abbiamo che :

$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta t}{\Delta y} = g'(y)$, dalla quale possiamo scrivere $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = g'(y)$ e quindi:

$$\frac{1}{v} = g'(y) \qquad (3)$$

Dalla (2), sfruttando la (3), si avrà che $t = g(y) = \int_0^y g'(y')dy' + C = \int_0^y \frac{1}{v(y')}dy' + C$, pertanto, supponendo che il liquido inizi ad uscire al tempo t=0, il tempo di svuotamento T è dato da:

$$T = \int_0^h \frac{1}{v(y)}dy \qquad (4)$$

Utilizzando l'equazione (1) otteniamo:

$$T_1 = \int_0^h \frac{1}{\frac{S1}{S(y)}v1}dy = \frac{1}{S1}\int_0^h \frac{S(y)}{v1(y)}dy$$

nella quale abbiamo esplicitato la dipendenza di v1 dalla sola y (Ipotesi 1).

Notiamo che la dipendenza dell'integrale $\int_0^h \frac{S(y)}{v1(y)}dy$ dalla forma del recipiente è espressa dalla presenza della funzione S(y), che dipende dall'altezza iniziale h alla quale si trova il liquido e dalla funzione v1(y) la quale, per l'ipotesi 1 dipende solo dalla posizione y. Pertanto, variando la superficie del foro del rubinetto tale integrale non cambia, possiamo quindi considerarlo una costante (vediamo dopo che, in realtà, come gli studenti possono capire chiedendo "*Cosa succede se facciamo questo esperimento sulla luna?* ", ci deve essere anche una dipendenza, nella forma della legge, dall'accelerazione gravitazionale).

Se poniamo $K = \int_0^h \frac{S(y)}{v1(y)}dy$, possiamo semplificare espressione del tempo di svuotamento:

$$T_1 = \frac{K}{S1} \qquad (5)$$

Dalla (5) possiamo ottenere facilmente la formula risolutiva per il problema, infatti se abbiamo due rubinetti di superficie S1 ed S2 che sono aperti contemporaneamente, possiamo sfruttare l'ipotesi 1 per affermare che la situazione equivale ad avere un unico rubinetto di superficie data dalla somme di S1 ed S2, quindi calcolare il tempo di svuotamento:

$$T_3 = \frac{K}{S1 + S2} = \frac{K}{\frac{K}{T_1} + \frac{K}{T_2}} = \frac{1}{\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}} \qquad (6)$$

Con gli studenti si può osservare che la dipendenza intuita, anche se non meglio determinata, di K dall'accelerazione gravitazionale in quest'ultimo calcolo scompare, dato che K si semplifica.

Questo significa che la formula (6) continua a valere anche sulla luna (ammettendo sempre le stesse ipotesi).

NB. Al posto dell'integrale si può proporre un ragionamento che faccia uso di sommatorie, in modo che sia accessibile anche a studenti che non abbiano ancora affrontato l'analisi.

4. L'ipotesi 1

Possiamo giustificare l'ipotesi 1 facendo ricorso a conoscenze di fisica che gli studenti del triennio dovrebbero avere, in particolare la legge di conservazione dell'energia. Per applicarla anche ad un caso come questo si devono fare alcune altre ipotesi, quindi diciamo che non si tratta di una dimostrazione ma, piuttosto, di un argomento che punta a mostrare come le conoscenze sulla conservazione dell'energia per i corpi rigidi sono ragionevolmente applicabili anche ad un fluido.

L'idea di Torricelli

Può essere interessante riferirsi inizialmente al lavoro "*Sul moto delle acque*" di Torricelli (Torricelli, 1664), nel quale lo scienziato, discepolo di Galileo, propone alcuni esperimenti per mostrare che la velocità di uscita dell'acqua da un foro praticato in fondo ad un recipiente, sotto opportune condizioni e tenendo conto degli attriti, è uguale a quella che un corpo avrebbe cadendo dalla stessa altezza alla quale si trova il livello dell'acqua nel recipiente. Il concetto di energia e la legge di conservazione non erano ancora stati sviluppati, gli argomenti di Torricelli utilizzano molto l'esperimento ideale, in maniera ingegnosa, come faceva anche Galileo, e si appoggiano molto sulla rappresentazione geometrica. Le leggi e le relazioni vengono spesso espresse in maniera geometrica. Torricelli giunge alla proposizione (*Legge di Torricelli*) secondo cui la velocità di uscita del liquido dal foro sarà uguale a quella di un corpo che cade, partendo da fermo, dall'altezza *h* (dal foro che supponiamo sul fondo del recipiente) alla quale si trova la superficie libera del liquido, in termini moderni:

$$v = \sqrt{2gh}$$

Quindi tale velocità dipende, leggendo questa formula, dalla sola altezza h della superficie libera. Quella che propone Torricelli è, ai nostri occhi, una ingegnosa argomentazione (in parte basata sull'osservazione ma non solo) che vogliamo collegare alle conoscenze più moderne in fisica che possono servire anche a capire in sotto quali ipotesi tale relazione è vera.

La conservazione dell'energia e la legge di Bernoulli

Per argomentare che l'ipotesi 1 è valida, consideriamo la figura 2, consideriamo un intervallo di tempo e calcoliamo l'energia complessiva del sistema, ed uguagliamo l'energia iniziale e quella finale (in questo ci sono le ipotesi di non attrito all'uscita, e nel movimento dentro al recipiente, che si lega alla viscosità che, pure, trascuriamo e all'assenza di turbolenza). Quello che si ottiene è la legge di Bernoulli .

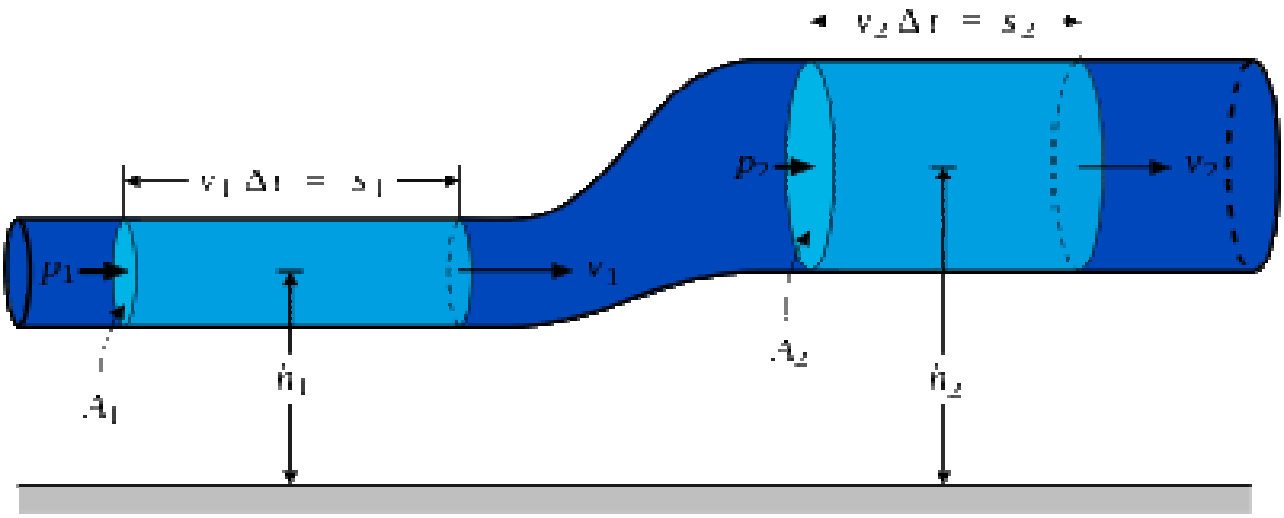


Figura 2 (tratta da wikipedia)

Se consideriamo la figura sopra, che rappresenta un fluido che scorre in un conduttore, se consideriamo il bilancio energetico del liquido compreso fra le sezioni A_1 ed A_2, abbiamo che l'energia complessiva del liquido è data dalla somma algebrica dei lavori che vengono compiuti sul liquido o dal liquido e la variazione di energia cinetica e potenziale gravitazionale.

Il lavoro compiuto dalle forze di superficie (lavoro che viene compiuto sul liquido della parte di conduttore considerata) per spostare il fluido di un tratto Δl è pari a

$$L_1 = p_1 S_1 \Delta l = p_1 V_1$$

dove p_1 è la pressione agente sulla sezione S_1, e V_1 è il volume di fluido che ha attraversato Δl nel tempo Δt.

Analogamente sul liquido viene compiuto un lavoro (in questo caso negativo) dal liquido presente a valle della sezione S_2. Tale lavoro sarà:

$$L_2 = -p_2 V_2$$

Ne segue che il lavoro totale compiuto dalle forze di superficie è:

$$L_S = L_1 + L_2 = p_1 V_1 - p_2 V_2$$

Il lavoro compiuto dalle forze di volume per spostare il fluido dall'altezza h_1 all'altezza h_2 corrisponderà alla variazione di energia potenziale gravitazionale:

$$L_V = mgh_1 - mgh_2$$

La somma di L_S ed L_V, sarà uguale alla variazione di energia cinetica complessiva del liquido considerato:

$$L_S + L_V = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 + \Delta E_i \qquad (7)$$

In questa equazione abbiamo considerato *m* è la massa dei due volumetti di liquido entrante ed uscente, che è uguale dato che il liquido per ipotesi ha densità costante ed è incomprimibile.

Il termine ΔE_i rappresenta la variazione di energia cinetica del liquido compreso fra le due superfici A_1 ed A_2 nell'intervallo di tempo Δt. Questo termine è nullo se il flusso è stazionario, dato che in questo caso in ogni punto la velocità non varia nel tempo (anche se può variare da punto a punto).

<u>Se supponiamo che il flusso sia stazionario</u> (ΔE_i =0) si ha:

$$p_1V_1 - p_2V_2 + mgh_1 - mgh_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Dalla quale si ricava:

$$p_1V_1 + mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = p_2V_2 + mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

Notiamo che i due volumi V_1 e V_2, sono uguali, dato che il liquido è incomprimibile, quindi dividendo ambo i membri dell'equazione per V_1 si ottiene:

$$p_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Dalla quale si giunge alla *legge di Bernoulli* (per il flusso stazionario):

$$p + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 = costante$$

in cui:

- *p* è la pressione
- *ρ* è la densità (costante) del fluido
- *v* è la velocità
- *g* è l'accelerazione di gravità
- *h* è l'altezza

Dalla legge di Bernoulli alla legge di Torricelli

Se consideriamo il recipiente di figura 1, riempito di un liquido, con un foro praticato all'altezza $h_0 = 0$. Considerando come A_1 la sezione del recipiente, h l'altezza relativa ad h_0 a cui si trova la superficie libera del liquido e A_2 la sezione del foro si ottiene:

$$p_1 + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

ma $p_1 = p_2$, infatti la pressione che agisce sulla superficie superiore e quella inferiore del liquido che esce dal foro è la pressione atmosferica, che praticamente assume lo stesso valore nei due punti, quindi:

$$\rho g h + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho g h_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Dato che $h_0 = 0$, si ottiene:

$$\rho g h + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Se supponiamo che la sezione del recipiente A_1 sia molto maggiore della sezione A_2 del foro, si ha, di conseguenza che anche la velocità di discesa del liquido nel recipiente è trascurabile rispetto alla velocità di fuoriuscita del liquido dal foro (vedere equazione 1 all'inizio). Quindi l'equazione si semplifica e diviene:

$\rho g h = \frac{1}{2}\rho v_2^2$, dalla quale si ottiene $v_2^2 = 2gh$, e quindi:

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

che coincide con la legge di Torricelli.

Flusso non stazionario

Osserviamo che la derivazione precedente vale se il flusso del liquido che esce dal recipiente è stazionario, ovvero abbiamo ricavato la legge di Torricelli dalla legge di Bernoulli nel caso di flusso stazionario. Questo può essere ottenuto se nel recipiente viene versata una quantità di liquido uguale a quella che esce, in modo che il livello del liquido all'interno del recipiente resti costante ed il flusso si possa considerare stazionario (in ogni punto la velocità non cambia nel tempo). Nel caso del problema proposto per l'esperimento il recipiente si svuota, quindi non viene mantenuto allo stesso livello e non possiamo contare sulla stazionarietà del flusso all'interno del recipiente, in generale si avrà $\Delta E_i \neq 0$. Tuttavia possiamo fare alcune considerazioni, anche intuitive, che permettono di giustificare, anche se in maniera approssimata, l'uso della stessa relazione di Torricelli anche in questo caso, ammesso che la superficie dei fori di uscita (rubinetti) sia sufficientemente piccola rispetto alla superficie del recipiente. Se consideriamo il flusso di un liquido che esce da un recipiente come in figura 1, anche se la sezione può variare, possiamo pensare che la variazione di energia cinetica interna del liquido si possa esprimere come:

$$\Delta E_i = \frac{1}{2}\int_V \rho(v_f^2 - v_i^2)dV$$

Se, fissato l'istante di tempo, indichiamo con *M* la massa del liquido all'interno del recipiente e con *C* il massimo della quantità $v_f^2 - v_i^2$ sull'intero volume del liquido, si avrà :

$$\int_V \rho(v_f^2 - v_i^2)dV < CM$$

Come abbiamo visto per ricavare la legge di Torricelli, se la sezione del recipiente è molto maggiore della sezione del foro, dalla in comprimibilità del liquido segue che la velocità del liquido all'interno del recipiente è trascurabile rispetto alla velocità di fuoriuscita dal foro (come abbiamo già visto), e questo comporta che anche la grandezza $v_f^2 - v_i^2$ sia trascurabile rispetto alla velocità di uscita del liquido. Quindi, se il foro di uscita è <u>sufficientemente piccolo,</u> possiamo rendere la grandezza *C* abbastanza piccola, e quindi l'integrale $\frac{1}{2}\int_V \rho(v_f^2 - v_i^2)dV$ abbastanza piccolo da poter essere trascurato nell'equazione (7) precedente.

Capitolo 5

In questo capitolo riprendiamo le nuove ipotesi di ricerca che sono state introdotte nel capitolo precedente. Dati i vincoli di tempo con i quali ci troviamo ad operare, scegliamo solo alcune di tali ipotesi da studiare. Illustriamo la metodologia ed il progetto del secondo esperimento e la sua effettuazione. Infine valutiamo l'esito dell'esperimento relativamente alle ipotesi di ricerca. Concludiamo con alcune osservazioni che ci sono parse interessanti per le domande di ricerca.

1. Secondo esperimento: obiettivi e ipotesi di ricerca

1.1 Gli obiettivi

Le ipotesi di ricerca

Anche in questo esperimento cerchiamo di indagare da quali elementi dipenda la produttività ai fini didattici di una metafora. In seguito al primo esperimento e alle osservazioni che abbiamo fatto nel capitolo precedente abbiamo deciso di focalizzare l'attenzione su aspetti differenti della metafora rispetto al primo esperimento. In particolare sull'ipotetica natura incorporata-intuitiva o culturale/formale delle metafore. Dati i limiti del tempo che avevamo a disposizione, abbiamo deciso di ridurre le ipotesi da considerare e fra le ipotesi formulate nel capitolo 4 (par. 5.6), ci concentriamo sulle ipotesi scritte nel seguente riquadro.

Le ipotesi di ricerca da indagare nel secondo esperimento

I2.1 è possibile distinguere due tipi di metafore (intuitiva o incorporata e formale/culturale)con caratteristiche distinguibili (la prima spontanea e non consapevole la seconda non spontanea e che richiede consapevolezza);

I2.3: se la metafora è di tipo culturale-formale allora la sua produttività dipende dall'essere esplicita o implicita nel testo e la produttività è maggiore nel caso di metafore esplicite.

Abbiamo escluso le due ultime ipotesi che riguardano la dipendenza dall'azione dell'insegnante (esperto). Dal primo esperimento abbiamo visto come risulti importante l'azione dell'insegnante nello sviluppo di analogie al fine di risolvere problemi e crediamo che si possa mettere in luce tale importanza anche in questo esperimento senza la necessità di progettare schemi particolari per l'azione dello sperimentatore che, dati i limiti di tempo, renderebbero molto complessa la valutazione. Inizialmente avevamo incluso anche l'ipotesi I2.2 ("*se la metafora è di tipo incorporato o intuitivo allora la sua produttività non dipende dall'essere esplicita o implicita nel testo*"*)*, ma, in seguito ad alcune riflessioni sul significato dei concetti utilizzati, effettuate durante l'analisi dei dati sperimentali, abbiamo ritenuto di non poter valutare tale ipotesi (come spieghiamo nel paragrafo 2.4).

Metafore intuitive o incorporate e metafore culturali/formali

Riprendiamo la distinzione che abbiamo introdotto nel capitolo 4 (paragrafo 5.2):

*metafora intuitiva o incorporata***:** metafora che collega (ovvero che permette la costruzione di una analogia fra) un dominio di conoscenza (*target*) con un dominio di conoscenze incorporate (*embodied*), ma non solo, oppure con un dominio di conoscenze acquisite tramite attività non formali (*source*);

*metafora culturale-formale***:** metafora che collega (ovvero che permette la costruzione di una analogia fra) un dominio di conoscenze (*target*) con un dominio di conoscenze acquisite tramite attività socio-culturali in maniera formale (*source*).

Utilizziamo i termini *target* e *source* già introdotti nel primo capitolo: il dominio *target* è quello che viene compreso o analizzato nei termini del dominio *source*.

Metafore (e similitudini) primarie e secondarie

Al fine di rendere più chiari gli obiettivi dell'esperimento e l'analisi delle metafore che stiamo proponendo (e costruendo), abbiamo trovato utile distinguere fra:

- *Metafora primaria*: la metafora (secondo la definizione proposta) che è presente in un testo, in un artefatto o che è presente (parole, gesti, figure..) in una situazione di interazione con altre persone;

- *Metafora secondaria*: la metafora che viene prodotta da un individuo a causa di una metafora primaria e che riguarda gli stessi domini.

Esempio: se un disegno funziona come metafora per un individuo che lo sta osservando, nel senso che avviene, nella sua mente, un collegamento fra due domini di conoscenza a causa di tale disegno, allora definiamo il disegno (o sue parti) come *metafora primaria*. A partire da questo collegamento l'individuo può generare una o più espressioni (a parole, a gesti..) che traducono in maniera comprensibile anche ad altri il collegamento della metafora primaria, definiamo tale espressione *metafora secondaria*.

Nell'esperimento che proponiamo nel seguito potremo sfruttare eventuali metafore secondarie per dedurre l'esistenza di metafore primarie, secondo lo schema:

Caratteristiche dell'artefatto → metafora primaria (innescano in un individuo un collegamento fra due domini di conoscenza)→ espressione dell'individuo → metafora secondaria (può innescare lo stesso collegamento in altri individui).

1.2 Il tipo di esperimento e task proposti

L'esperimento

Pensiamo che anche questo esperimento, come il primo, si possa inquadrare come un esperimento di ricerca teorica, nel quale cerchiamo di valutare alcune specifiche ipotesi di ricerca in condizioni controllate, che non sono assimilabili al normale processo di insegnamento-apprendimento.

Per questo esperimento abbiamo deciso di lavorare con una sola classe, e di filmarne un gruppo, in modo da poter fare una analisi a grana più fine rispetto al primo esperimento. Anche in questo caso l'intervento sperimentale non ha l'obiettivo di insegnare alcuni specifici contenuti matematici (che pure ci sono) ma quello di analizzare le interazioni fra studenti e le strategie scelte in relazione alla individuazione e l'uso di metafore, in modo da avere elementi utili per la valutazione delle due ipotesi di ricerca. L'analisi qualitativa che proponiamo relativamente ai protocolli scritti e ai filmati si concentra solo su questi aspetti e sulle forme di interazione che abbiamo interpretato come pertinenti per i nostri fini.

Come nel primo esperimento la metafora è inquadrata nel modello della mediazione semiotica, ma l'esperimento non viene progettato ed analizzato secondo questo modello, dato che gli obiettivi non sono didattici. Anche in questo caso si può avanzare la critica che il comportamento degli studenti può cambiare a seconda che l'attività si svolga in condizioni sperimentali controllate (come nell'esperimento appunto) oppure in un "normale" processo di insegnamento-apprendimento, nel quale gli studenti e l'insegnante interagiscono liberamente e non vengono osservati.

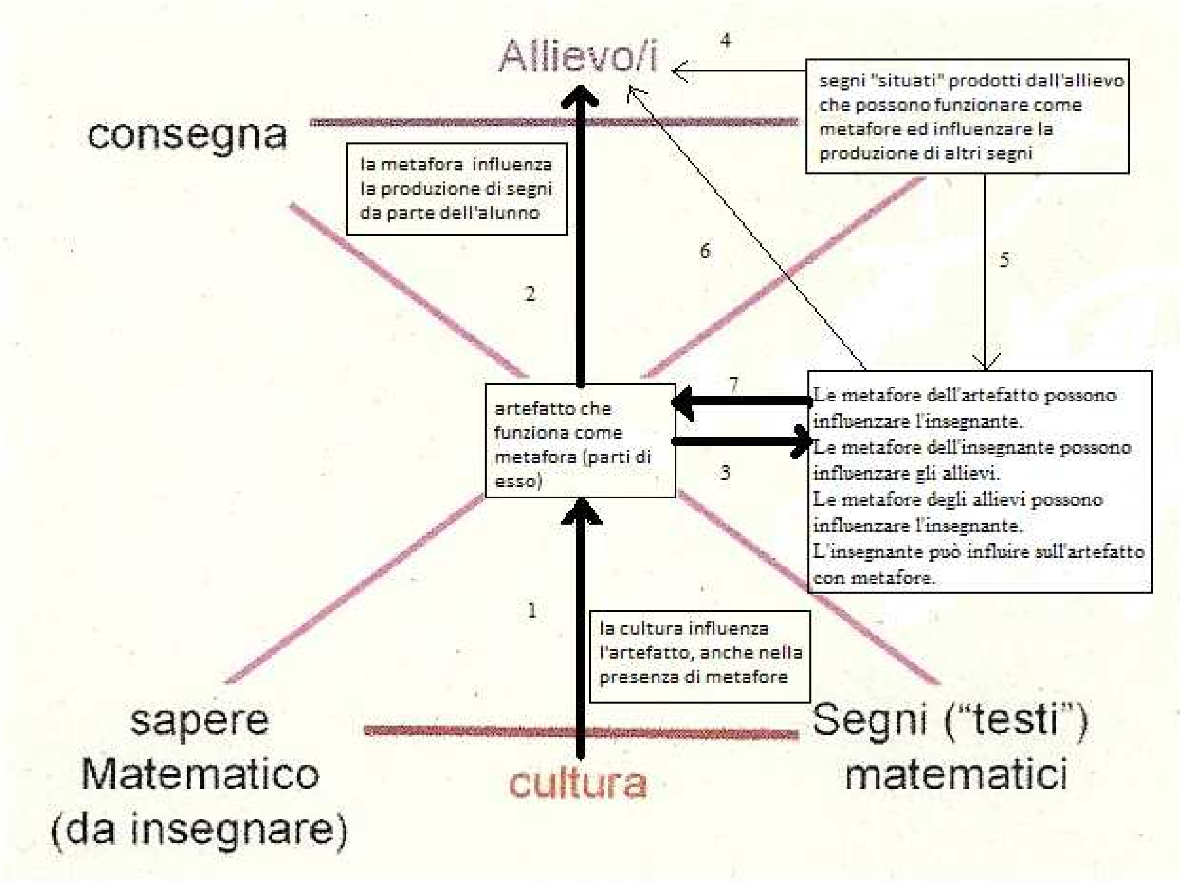


Figura 1

In riferimento alla figura 1, nel secondo esperimento sono coinvolte:

- Influenza delle metafore (metafore primarie) contenute negli artefatti (testo e macchina matematica) sulle produzioni degli studenti (freccia 2) che possono essere, esse stesse, metafore (metafore secondarie): questo è uno degli obiettivi dell'esperimento come abbiamo scritto nelle ipotesi di ricerca;

- Influenza di metafore presenti nella cultura sul testo progettato e sulla macchina matematica (freccia 1);

- Influenza dello sperimentatore nelle metafore presenti nel testo (freccia 7), non necessariamente quelle che lo sperimentatore ha pensato nell'analisi a-priori e nella progettazione del testo, ma anche eventuali altre metafore, introdotte in maniera inconsapevole (questo può venire analizzato in fase di analisi a-posteriori).

Altre dipendenze che possono essere rilevanti (che possono essere analizzate a-posteriori), sono:

- Influenza di metafore presenti nel testo o nella macchina sull'insegnante (freccia 3) che può produrre metafore che influenzano gli studenti (freccia 6).

Il task

In questo esperimento proponiamo agli studenti un diverso campo di esperienza su cui lavorare: quello delle macchine matematiche. Questa scelta è derivata da diversi fattori:

- la pregressa esperienza dello sperimentatore con questo tipo di attività;
- il tipo di ricerche che vengono sviluppate nel gruppo, guidato dalla Prof.ssa Bartolini Bussi, che lo ha accolto e supportato nella ricerca;
- all'opportunità di utilizzare laboratori disponibili per il prestito di tali macchine presenti nel territorio (Laboratorio delle Macchine Matematiche di Modena e Laboratorio del Minguzzi di Bologna);
- le attività con le macchine, con la loro fisicità e con i movimenti che implicano (anche del corpo di chi le usa) possono avere effetti differenti rispetto ai problemi espressi a parole (*word problems*);

Le macchine matematiche che usiamo (pantografi per la simmetria assiale e per lo stiramento) sono riproduzioni di macchine il cui uso è documentato, almeno dal 19° secolo (Bartolini Bussi, Maschietto, 2006). Sono macchine abbastanza semplici che possono essere usate, come abbiamo detto nel capitolo 3 (par. 2.3), come strumenti di mediazione semiotica dall'insegnante per raggiungere i propri obiettivi educativi relativi a specifici contenuti matematici.

Una possibile definizione di macchina matematica, che viene utilizzata in (Bartolini Bussi, Maschietto, 2006), viene proposta da Pergola (N.R.S.D.M., 1992): " *una macchina matematica (in un contesto geometrico) ha come scopo fondamentale (indipendentemente dall'uso che poi si farà della macchina) risolvere questo problema: obbligare un punto, o un segmento, o una figura qualsiasi (sostenuti da un opportuno supporto materiale che li renda visibili) a muoversi nello spazio o a subire delle trasformazioni seguendo con esattezza una legge astrattamente, matematicamente determinata.*"

In particolare utilizziamo due pantografi (Appendice2Cap5) che permettono di studiare due trasformazioni sul piano:

- simmetria assiale (rombo articolato);
- stiramento (biellismo di Delaunay).

Quindi utilizzeremo due tipi di artefatto, fra loro in relazione: la macchina matematica ed un testo che si riferisce ad essa.

La classe viene suddivisa in piccoli gruppi omogenei (3 o 4 alunni) con l'aiuto dell'insegnante, uno di tali gruppi viene fatto uscire dalla classe e portato in un'altra aula dove viene filmato dallo sperimentatore. Gli altri gruppi restano in classe con l'insegnante. Anche in questo caso la scelta del lavoro a piccoli gruppi omogenei è motivata dalla convinzione che questo tipo di attività favorisca l'emergere di più voci e la discussione all'interno del gruppo.

Agli studenti vengono consegnati due artefatti: un testo scritto (suddiviso in più parti che vengono consegnate ai gruppi in momenti diversi) ed una macchina. Il testo si riferisce alla macchina consegnata e guida il loro lavoro. Lo sperimentatore osserva il gruppo e lo filma senza intervenire, se non per chiarire alcuni punti che possono sembrare poco chiari agli studenti.

Logica dell'esperimento in relazione alle ipotesi di ricerca

Gli studenti vengono fatti lavorare in una prima sessione (in due giornate) con la prima macchina ed un testo, e in una seconda sessione (in due giornate) con la seconda macchina ed un altro testo. Come mostriamo in seguito, dall'analisi a priori delle macchine abbiamo individuato alcune metafore potenziali che possono funzionare come metafore incorporate o intuitive. Inoltre nei testi abbiamo inserito quelle che, secondo la nostra ipotesi, possono funzionare come metafore incorporate o intuitive e come metafore culturali. In particolare nella seconda sessione gli studenti possono sfruttare alcune caratteristiche della macchina e del testo per individuare analogie con la prima macchina.

2. Metodologia utilizzata

2.1 Organizzazione dell'esperimento

L'esperimento nella classe consiste in due sessioni di lavoro, suddivise in due giornate ciascuna.

Il lavoro in classe viene organizzato a gruppi di tre-quattro alunni e a ciascun gruppo viene consegnato lo stesso testo e la stessa macchina. Nella classe, oltre all'insegnante, è presente lo sperimentatore. I gruppi vengono formati con l'aiuto dell'insegnante, in modo che siano omogenei relativamente alle conoscenze e competenze matematiche, nella convinzione che questo possa migliorare l'efficacia del lavoro a gruppi. Con l'aiuto dell'insegnante viene scelto un gruppo (quello potenzialmente più creativo), che viene portato in un'altra aula e filmato dallo sperimentatore, mentre gli altri gruppi restano nella loro aula in presenza dell'insegnante.

Anche questo esperimento, come il primo, non prevede una fase teorica iniziale, ma solo una breve introduzione al lavoro successivo. Prima di assegnare i testi a ciascun gruppo, viene spiegata la consegna agli alunni senza fare alcun riferimento agli obiettivi dell'esperimento (che ovviamente non coincide con la consegna che hanno gli alunni). Agli alunni di ciascun gruppo raccomandiamo di collaborare fra di loro ma di non comunicare, relativamente alle consegne assegnate, con gli altri gruppi. All'insegnante, che resta in classe durante le attività, spieghiamo a grandi linee l'obiettivo dell'esperimento e gli/le proponiamo di partecipare concordando alcune tipologie di intervento (che spieghiamo in seguito). A ciascun gruppo chiediamo di produrre un testo scritto finale.

Alla fine di ogni sessione è prevista una discussione finale nella quale i singoli gruppi vengono intervistati e filmati dallo sperimentatore relativamente ad alcuni aspetti del loro protocollo scritto, infine lo sperimentatore propone una sintetica discussione di bilancio con tutta la classe in modo da affrontare in maniera formale ed esplicita i contenuti matematici incorporati dalle macchine (simmetria assiale e stiramento). Anche se l'esperimento, come il primo, non aveva un obiettivo didattico, crediamo che sia opportuno sfruttare le attività degli alunni con gli artefatti per sviluppare anche alcuni dei concetti matematici ad essi associati.

Per la valutazione dell'esperimento vengono utilizzati i protocolli scritti prodotti degli alunni, il filmato del gruppo analizzato, i filmati delle interviste finali ai gruppi e gli eventuali interventi durante la discussione finale. L'analisi dei testi prodotti è di tipo qualitativo, con l'obiettivo di valutare la presenza o assenza delle dipendenze ipotizzate e la dipendenza da altre variabili non direttamente prese in considerazione.

Prima sessione (divisa in due giornate**)**: il task comprende un testo con un dialogo che fa riferimento ad una macchina (rombo articolato) consegnata a ciascuno dei gruppi. Uno dei gruppi viene filmato dettagliatamente senza interventi nelle attività del gruppo. Nella fase iniziale viene introdotta la macchina in ogni gruppo mostrando come usarla sia con una sola mina (un tracciatore) che con due mine (due tracciatori) ma senza dare una maggiore importanza ad un modo particolare. Si interviene nel caso si presenti la necessità di chiarimento del testo e degli obiettivi del lavoro. Gli altri gruppi seguono la stessa modalità ma vengono seguiti dall'insegnante. Nella seconda parte, a partire da quanto fatto nella prima, i gruppi vengono intervistati ed infine viene proposta una discussione matematica sui concetti matematici incorporati nella macchina e sulla simmetria assiale con relative dimostrazioni.

Seconda sessione (divisa in due giornate**)**: stesse modalità di lavoro ma con un differente testo ed una differente macchina (biellismo di Delaunay) che incorpora una trasformazione differente (stiramento). Anche in questo caso la seconda parte del lavoro consiste in una intervista dei gruppi seguita da una discussione matematica sulla macchina ed il task proposto.

2.2 Ruoli dello sperimentatore e dell'insegnante: azioni previste

Le/gli insegnanti della classe che hanno dato la propria disponibilità per la sperimentazione sono presenti durante le attività. In particolare contribuiscono alla formazione iniziale di gruppi omogenei ed alla scelta del gruppo da filmare. Aiutano nella successiva gestione delle attività dei gruppi che restano in classe, dopo che il gruppo prescelto si sposta con lo sperimentatore altrove. Gli accordi con l'insegnante per la gestione dei gruppi che restano nella classe sono:

- l'insegnante può intervenire se uno studente fa domande relative all'interpretazione del testo (l'insegnante di matematica è presente solo in un caso, in tutti gli altri l'insegnante presente non è di questa materia);

- l'insegnante deve cercare di spingere gli studenti a scrivere tutto quello che viene discusso nel gruppo, in modo che ne risulti un documento comprensibile e completo;

- l’insegnante non deve suggerire (tramite parole, gesti o altro) l’interpretazione delle metafore presenti nei testi e nemmeno dare suggerimenti utili a risolvere il problema anche con altri metodi;

- l’insegnante può aiutare lo sperimentatore ad interpretare le dinamiche di classe e ad interpretare le produzioni dei gruppi (anche in relazione alle conoscenze pregresse degli alunni) ed in base alle caratteristiche specifiche dei componenti dei gruppi.

Le interviste e la discussione finale vengono fatte in presenza dell’insegnante che può intervenire per apportare chiarimenti, aiutare ad interpretare gli interventi degli studenti o integrare quanto detto dallo sperimentatore. Non è prevista una fase teorica iniziale (lezione) ma, dopo una breve presentazione del lavoro e la suddivisione in gruppi, consegniamo loro i materiali per le attività. Nella prima giornata indichiamo il tipo di lavoro che gli alunni devono fare, mettendo bene in chiaro che:

- il lavoro fa parte di una ricerca che lo sperimentatore sta conducendo e non viene usato per valutarli;

- quello che ci interessa è osservare quello che fanno e vedere se si verificano alcuni fatti specifici che sono il focus della ricerca, ma senza specificare cosa. Il loro obiettivo è comunque quello specificato dal testo;

- eventuali chiarimenti vengono forniti durante il lavoro dallo sperimentatore e dall’insegnante;

- invitiamo gli studenti a scrivere, disegnare, spiegare tutto quello che viene discusso nel gruppo, attraverso fogli consegnati all’inizio dell’attività ad ogni gruppo;

- chiariamo che in ogni gruppo gli alunni devono discutere e collaborare fra di loro in modo costruttivo ma che ogni gruppo deve lavorare in maniera indipendente dagli altri, senza collaborazioni o scambi di idee o materiali fra diversi gruppi, visto che questo può incidere sull’esperimento alterando i dati.

Per quanto riguarda lo sperimentatore, le sue azioni cambiano a seconda delle fasi di ciascuna sessione, in particolare:

- *Fase iniziale di presentazione e avvio del lavoro*: viene presentato il tipo di lavoro che gli studenti svolgono, assieme all’insegnante vengono individuati i gruppi, vengono consegnate le macchine (una per ciascun gruppo) corredate da un testo. Lo sperimentatore mostra a ciascun gruppo come si possono usare le macchine (concentrandosi su due possibili schemi d’uso) e chiarisce quello che devono fare con il testo e la macchina. In questa fase l’insegnante e lo sperimentatore sono entrambi presenti nella classe;

- *Fase di studio di un gruppo*: dopo che, con l’aiuto dell’insegnante, viene individuato un gruppo da filmare, lo sperimentatore esce dalla classe e va, assieme ai componenti del gruppo prescelto, in un luogo diverso. Qui il gruppo inizia a lavorare con una macchina (uguale a quella degli altri gruppi) e con il medesimo testo. Lo sperimentatore fissa una videocamera (più eventualmente un registratore vocale sul tavolo) e filma il gruppo al lavoro. Lo sperimentatore interviene solo per:

- o Eventuali chiarimenti del testo;
- o Riportare il gruppo a lavorare sugli obiettivi del testo nel caso che si disperda in direzioni non produttive e non interessanti per gli obiettivi dell'esperimento;
- o Consegnare le parti successive del testo quando il gruppo ha completato (o ritiene di avere completato) la parte consegnata.

- *Fase di analisi dei protocolli*: lo sperimentatore analizza i protocolli scritti di tutti i gruppi (sia quello filmato che quelli rimasti in classe con l'insegnante) ed il filmato del gruppo scelto;

- *Fase di discussione con i gruppi in classe*: in una seconda giornata la classe viene suddivisa negli stessi gruppi che restano tutti in classe. A ciascun gruppo viene consegnata la macchina e il protocollo scritto prodotto nella prima giornata. Lo sperimentatore filma ciascun gruppo e lo intervista su alcuni aspetti specifici dei protocolli scritti, nel caso del gruppo filmato tale intervista verte anche sul protocollo orale del lavoro di gruppo. In questa fase può intervenire anche l'insegnante per aiutare lo sperimentatore a interpretare le risposte ed i protocolli;

- *Fase di discussione collettiva sui contenuti matematici:* finite le interviste lo sperimentatore riprende alcune delle conoscenze emerse durante le interviste o tratte dai protocolli per condurre l'intera classe a capire la matematica che è incorporata dalla macchina. Nel primo caso si tratterà della simmetria assiale e nel secondo dello stiramento. Vengono ripresi alcuni concetti matematici (criteri di congruenza dei triangoli, similitudine fra triangoli) che servono a chiarire cosa fa ciascuna macchina e perché (vedere Appendice2Cap5).

2.3 Scelta delle macchine, progettazione dei testi e motivazione delle scelte compiute

Nel primo esperimento abbiamo utilizzato un testo, in questo vogliamo utilizzare un testo ed una macchina. L'uso di una macchina e di un testo (un *testo interno* nel senso specificato nel capitolo 3 par. 2.3) che si riferisce alla macchina, dovrebbe aumentare, secondo noi, il potenziale semiotico complessivo dato che uno rimanda all'altro e questo richiede uno sforzo ermeneutico da parte degli studenti che può portare anche una maggiore produzione di segni e di metafore (anche metafore secondarie che possono servirci per la valutazione delle ipotesi).
In quanto segue proponiamo anche una analisi a priori dei possibili comportamenti, in termini di risposte o di idee emergenti, da parte degli studenti. Data l'articolazione dei testi in più parti preferiamo fare tale analisi congiuntamente, in modo da rendere più chiaro e scorrevole il discorso.

Le macchine matematiche

La scelta delle macchine matematiche da utilizzare è ricaduta su due pantografi per trasformazioni sul piano (figura 2): il rombo articolato (simmetria assiale) e biellismo di Delaunay (stiramento). La presenza documentata di tali macchine per lo studio di trasformazioni è collocabile nell'800 (il biellismo di Delaunay è del 1870 circa) (Bartolini Bussi, Maschietto, 2006) ma, data la loro semplicità costruttiva, è possibile che fossero presenti anche in epoche precedenti.
Le principali motivazioni che ci hanno spinto a scegliere tali macchine sono le seguenti:

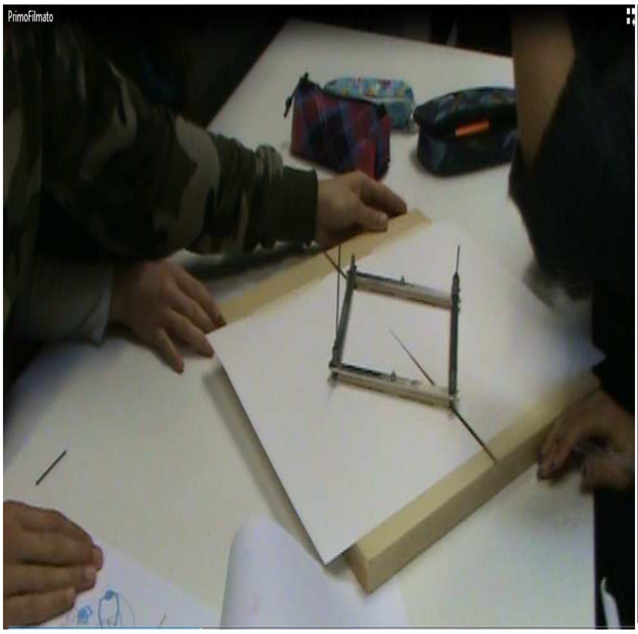
- dall’analisi a priori del potenziale semiotico delle macchine ci siamo convinti che esse sono potenziali portatrici di metafore, sia per la struttura che per gli schemi d’uso (capitolo 3 par. 2.3), di seguito cerchiamo di chiarire questi aspetti;

- tali macchine incorporano contenuti matematici che gli studenti della classe sono in grado, ameno potenzialmente, di affrontare (alcuni elementi di geometria euclidea e di geometria analitica);

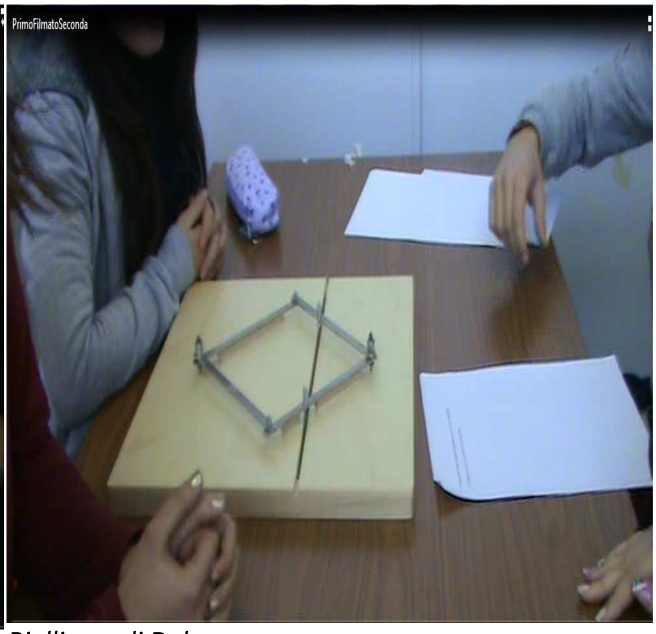
- la matematica che consentono di sviluppare è coerente con i programmi ministeriali previsti (trasformazioni nel piano).

Inoltre ci sono alcune ragioni di carattere più logistico che hanno facilitato la scelta:

- le macchine sono semplici da trasportare ed utilizzare in classe;
- ci sono a disposizione un sufficiente numero di macchine (prestate dal laboratorio Macchine Matematiche di Modena e Fondazione Minguzzi di Bologna).



Rombo articolato



Biellismo di Delaunay

Figura 2

Rimandiamo alla Appendice2Cap5 per maggiori dettagli sulla matematica incorporata in queste macchine. Nel resto del capitolo ci riferiremo a due particolari direzioni secondo le quali si può disporre la scanalatura delle macchine che utilizziamo alle quali ci riferiremo con i termini: *direzione verticale* o *direzione orizzontale*. Per evitare un eccesso di frasi prolisse nel seguito, preferiamo definire ora il significato che intendiamo con questi due termini:

- Dato un individuo che sta utilizzando una delle due macchine, immaginiamo un segmento che unisce i suoi occhi, definiamo *orizzontale* una direzione della scanalatura che sia parallela a questa;

- Se consideriamo il piano perpendicolare a questo segmento e passante per il suo punto medio, allora chiamiamo *verticale* una direzione della scanalatura che appartenga a questo piano.

Il primo testo

Nella prima sessione il testo proposto ai gruppi è diviso in due parti, che sono indicate in seguito con 1A ed 1B. Tali parti vengono proposte agli alunni in momenti diversi del lavoro. Ai gruppi viene consegnato sia il testo che la macchina che incorpora la simmetria centrale (rombo articolato).

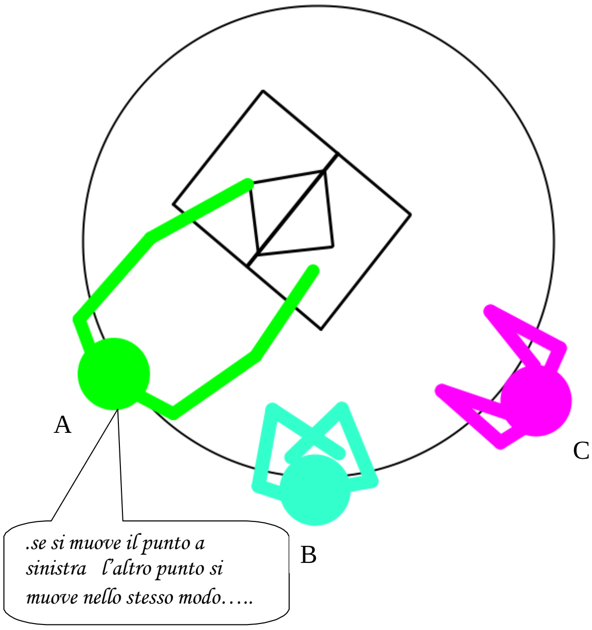
Il primo testo completo si trova in Allegato4_PrimoTestoSecondaSpe. Siamo arrivati alla definizione del testo considerando diversi aspetti:

- La scelta di vignette e dialogo fra personaggi può spingere gli studenti ad immedesimarsi nella situazione e facilitare lo sviluppo più linee di ragionamento (per ognuno dei personaggi);
- La presenza di più personaggi è associata alla presenza di più voci nel testo, che sono portatrici di punti di vista differenti (cap.3);
- L'opportunità di condensare in una serie di immagini un contenuto che espresso verbalmente sarebbe stato pesante;
- La scelta di tre personaggi in tre diverse posizioni rispetto alla macchina può rappresentare tre diversi modi di porsi di fronte ad un problema;
- La scelta di mostrare la situazione dall'alto su un tavolo tondo per cercare di non dare a-priori posizioni privilegiate;
- Come abbiamo detto anche per il primo esperimento, l'idea di usare un dialogo con diversi personaggi dovrebbe portare ad un maggiore coinvolgimento emotivo e cognitivo (Mariani, Giliberti, Corni, 2010; Egan, 1989b).

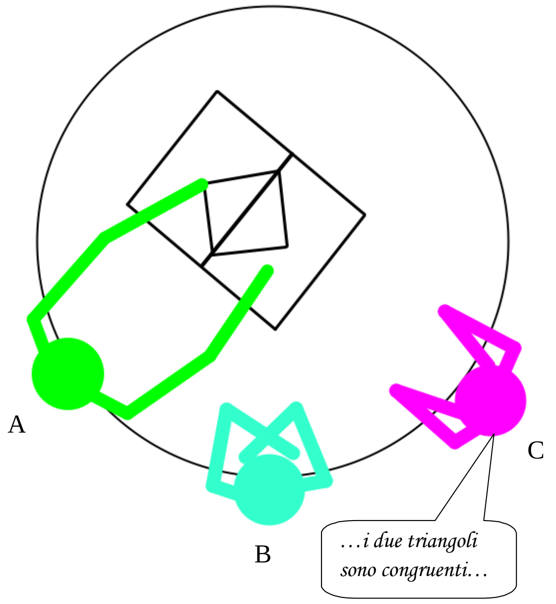
Prima parte del primo testo (1A)

Nelle tre vignette che seguono si vedono dall'alto tre studenti che stanno iniziando a studiare una macchina come quella che è stata consegnata anche a voi.

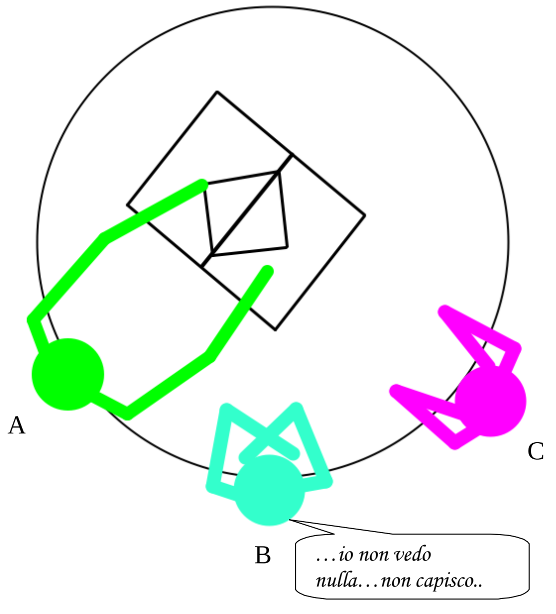
Alberto sta esplorando il funzionamento della macchina mentre Chiara e Bruno osservano..



..poi Chiara fa una osservazione…



… anche Bruno dice qualcosa..



Secondo voi perché ciascuno degli studenti dice quello che è scritto nel fumetto?

Per capire quello che fa la macchina pensate che sia più utile l'osservazione di Alberto o quella di Chiara o sono entrambe utili? Perché?

Giustificazione del testo 1A relativamente alle ipotesi di ricerca

Questa parte del testo ha l'obiettivo di spingere gli alunni a esplorare la macchina, analizzarla e discutere sulla sua migliore disposizione rispetto a chi la usa. L'idea è quella di verificare se possono essere attive alcune metafore legate al corpo (embodiment) che spingono gli alunni a preferire una disposizione e, conseguentemente, una rappresentazione della macchina nella quale l'asse di simmetria è verticale invece che orizzontale, in analogia con la simmetria assiale e la disposizione naturale del corpo umano. Con questa parte vorremmo cogliere qualche elemento utile alla valutazione dell'ipotesi I2.1, ovvero all'esistenza di metafore di tipi intuitivo o incorporato e alla loro produttività. In particolare ci aspettiamo che il collegamento (metafora) alla simmetria del corpo sia intuitivo per gli alunni e che quindi tale metafora possa apparire con facilità senza che sia esplicitata nel testo. Ci sono stati studi che hanno mostrato una dipendenza della riuscita in alcuni compiti di riconoscimento della simmetria assiale dalla orientazione dell'asse di simmetria (Grenier, 1988). Noi ci aspettiamo che gli alunni preferiscano la disposizione con asse di simmetria complanare con l'asse ideale di simmetria del corpo eretto (direzione che in quanto segue definiremo *verticale* secondo la convenzione stabilita all'inizio) e che cerchino di giustificarla facendo riferimento ad elementi del corpo umano (source), per esempio le braccia o gli occhi, tuttavia senza riuscire a trovare una spiegazione completamente razionale. Quindi ci aspettiamo che la struttura della macchina funzioni come metafora di tipo intuitivo/incorporato.

Ci aspettiamo la comparsa di frasi o di termini che possono essere considerati metafore secondo la nostra definizione, perché possono permettere l'individuazione di analogie fra il corpo e la macchina. (Consideriamo queste metafore come metafore secondarie, che derivano da quelle che indaghiamo, non sono esse stesse le metafore che indaghiamo).

Opinioni che potrebbero emergere relativamente al testo 1A

Proponiamo alcune possibili risposte, in termini di comportamenti od opinioni, che potrebbero emergere durante l'esecuzione dell'esperimento e che possono rivelatrici di metafore presenti negli artefatti utilizzati (testo e macchina). Alcune di tali risposte possono servire a valutare, favorevolmente o sfavorevolmente, le ipotesi di ricerca che indichiamo fra parentesi. Gli studenti potrebbero sostenere che:

- ciò che ciascuno dei personaggi dice dipende dalla posizione che ha assunto rispetto la macchina (utile a valutare I2.1);

- ciò che ciascuno dei personaggi dice dipende dal tipo di atteggiamento che ha rispetto la situazione (uno attivo che manipola la macchina, uno riflessivo ed uno non attivo);

- è più utile l'osservazione di Alberto, tenendo la scanalatura *verticale* (o usando un significato equivalente a quello che abbiamo chiarito). Potrebbero motivare questo dicendo che in questo modo si vede che un tracciatore si muove simmetricamente all'altro (utile a valutare a I2.1 e I2.3);

- è più utile l'osservazione di Chiara, tenendo la scanalatura *orizzontale* giustificando che in questo modo si vede più facilmente che i due triangoli formati sopra e sotto dalla scanalatura sono congruenti (nello spazio tridimensionale) e le distanze dei tracciatori dalla scanalatura sono uguali (utile a valutare a I2.1 e I2.3);

- per capire cosa fa la macchina basta guardare le figure o le tracce lasciate dai due tracciatori quando si muove la macchina e che non è importante il modo con cui si tracciano;

- per capire quello che fa la macchina si devono individuare le proprietà geometriche della macchina ed è più semplice farlo se si sfruttano delle simmetrie della macchina (se esistono) e quindi alcune posizioni sono migliori delle altre perché permettono di vedere meglio tali simmetrie (utile a valutare a I2.1);

- è più semplice porre la macchina con la scanalatura *orizzontale* perché è più semplice farla muovere (utile a valutare a I2.1 e I2.3);

- è più semplice porre la macchina con la scanalatura verticale rispetto a chi la muove (nel senso che ho cercato di chiarire sopra) perché è sufficiente muovere un vertice per fare muovere anche l'altro (utile a valutare a I2.1 e I2.3);

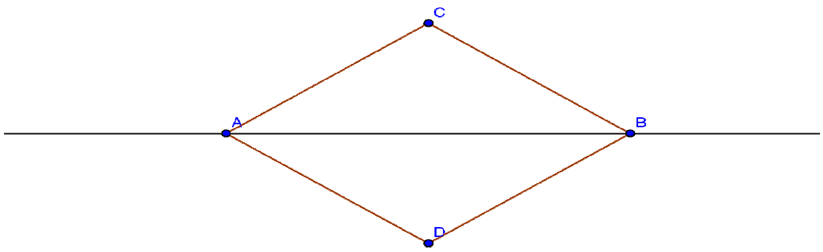
- è più 'naturale' mettere i lati della macchina paralleli o verticali rispetto all'orizzonte, (potrebbero usare questo termine od uno equivalente) immaginiamo anche che possano accompagnare questo tipo di affermazione con un movimento delle mani lineare, perpendicolare rispetto all'asse di simmetria del corpo (utile a valutare a I2.1 e I2.3);

- non è importante il modo con il quale si dispone la macchina sul tavolo ma il modo in cui la macchina è posizionata rispetto a chi la usa (utile a valutare a I2.1 e I2.3).

Seconda parte del primo testo (1B)

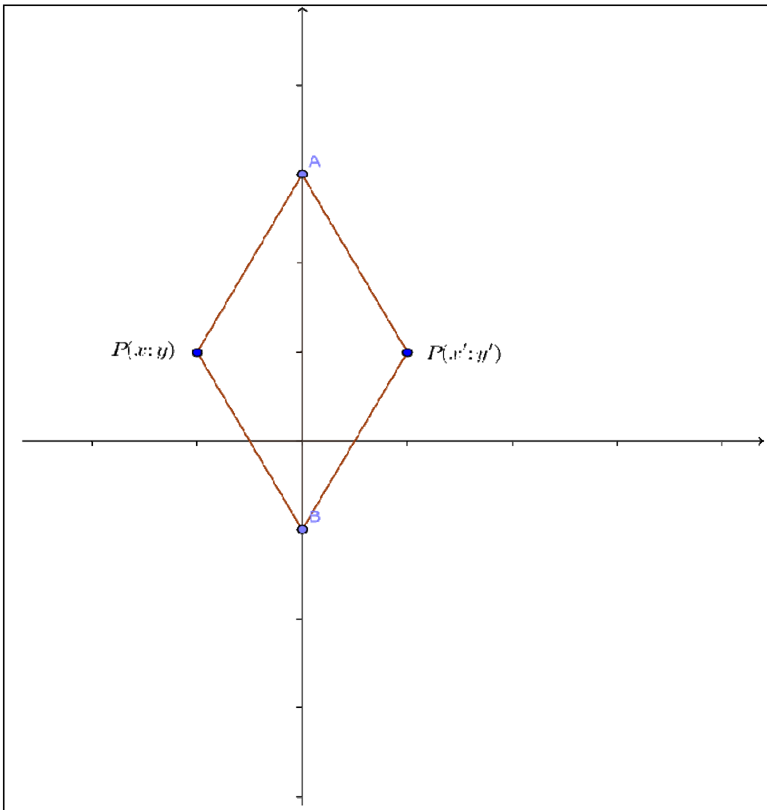
Nel dialogo che segue Alberto, Bruno e Chiara discutono sul migliore modo di analizzare la macchina e propongono alcune idee:

Chiara: "..*possiamo rappresentare la macchina in questo modo….*



si vede che i due triangoli sono congruenti dato che hanno un lato in comune e gli altri uguali..e quindi anche le loro altezze saranno uguali…quindi…."

Alberto: "*..ma non basta dimostrare che sono uguali le altezze....poi come prosegui? Secondo me è meglio utilizzare un sistema di riferimento cartesiano..poi scriviamo le coordinate di uno dei tracciatori in funzione delle coordinate dell'altro…così…*



la x è opposta e la y è la stessa, quindi direi che si può scrivere $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$ "

..

Bruno:" *non ho capito…che significano quelle equazioni?"*

Chiara: "*…ti dicono come cambiano le coordinate dei due punti P e P'…ad esempio se hai P(-2;3) allora P' avrà coordinate (2;3)….il problema è che anche tu, caro Alberto, stai dando per scontate alcune cose..come arrivi a quelle equazioni? Come le giustifichi?.*"

.

Bruno: "*..ma non si poteva anche scrivere* $\begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases}$ **?**"

Voi cosa ne pensate? Quale metodo si può usare per dimostrare ciò che la macchina fa? Riuscite a dimostrarlo?

Giustificazione del testo 1B relativamente alle ipotesi di ricerca

La seconda parte del testo dovrebbe stimolare una discussione fra gli alunni riguardante ciò che la macchina fa, il migliore modo per capirlo e la relativa dimostrazione matematica. Obiettivo di questa parte è mettere in evidenza elementi utili alla valutazione delle ipotesi I2.1 e I2.3 (come chiariamo in seguito).

Nel corso del dialogo vengono proposte due modalità di rappresentazione della macchina che vengono associate ai due personaggi Alberto e Chiara che, nella prima parte (1A) analizzano la macchina in due diverse modalità. Alberto muove la macchina e descrive il movimento di un punto come funzione dell'altro, secondo una modalità che definiamo *funzionale* (la posizione di un punto è vista come funzione della posizione dell'altro). Chiara, invece, non muove la macchina e ne osserva la struttura facendo considerazioni geometriche sui triangoli che la compongono, secondo una modalità che definiamo *relazionale* (vengono poste in evidenza le relazioni che legano i due punti come vertici di triangoli congruenti).

Noi ci aspettiamo che la modalità adottata per l'esplorazione della macchina possa influire sulla sua rappresentazione e sulla sua analisi matematica; se gli alunni preferiscono o usano prevalentemente la modalità di esplorazione di tipo relazionale allora questa potrebbe fungere da metafora di tipo culturale nella fase successiva di analisi, portando a preferire l'analisi delle proprietà geometriche del quadrilatero (la relazione che sussiste fra i due punti tracciatori, la covarianza). Se gli alunni prediligono la modalità di esplorazione di tipo funzionale questo potrebbe invece favorire una analisi matematica basata sulla funzione che lega la posizione di un tracciatore con la posizione dell'altro, la dipendenza funzionale. Consideriamo i due tipi di schemi d'uso come delle metafore nel senso da noi definito, perché da questi si possono individuare delle analogie fra il modo in cui si muove o si vede la macchina ed il modo con cui la si matematizza.

Nella prima parte del testo (1A) Bruno rappresenta uno studente che non riesce a capire cosa succede e lo dice (in questo vorremmo legittimare il fatto di dichiarare apertamente di non comprendere qualcosa). La posizione e l'atteggiamento di Bruno sono diversi da quelli di Alberto e Chiara, infatti egli vede la macchina da una terza posizione, intermedia fra le altre due. Inoltre Bruno non interviene attivamente sulla macchina ed appare con le braccia incrociate. Anche nella parte successiva del testo (1B) Bruno continua a rappresentare la posizione di chi non riesce ad entrare nel discorso matematico che è stato avviato dagli altri personaggi. Nell'ultimo intervento di Bruno viene proposto un sistema di equazioni che è equivalente ma che, secondo noi, potrebbe essere fonte di perplessità dovute ad un contrasto che ci sembra di vedere fra la simmetria della situazione e la asimmetria dei segni che vengono utilizzati, in particolare l'uso del segno – per rappresentare i numeri negativi.

Opinioni che potrebbero emergere relativamente al testo 1B

Anche per questa parte proponiamo alcune possibili risposte, in termini di comportamenti od opinioni, che potrebbero emergere durante l'esecuzione dell'esperimento ed essere rivelatrici delle metafore che indaghiamo e delle loro caratteristiche. Alcune di tali risposte possono servire a valutare, favorevolmente o sfavorevolmente, le ipotesi di ricerca. Gli studenti potrebbero sostenere che:

- il metodo di Chiara è più intuitivo, che permette di vedere più facilmente quello che la macchina fa e dimostrarlo;

- il metodo di Alberto è più matematico, più preciso, e permette di dimostrare rigorosamente quello che fa la macchina;

- il metodo è indifferente se si applica la matematica correttamente.

Tutte le precedenti posizioni possono servire a valutare le ipotesi di ricerca.

Il secondo testo

Per il secondo testo, che viene consegnato assieme alla seconda macchina, proponiamo una forma impersonale, senza personaggi o dialoghi. Questo per poter focalizzare direttamente l'attenzione degli studenti su alcuni aspetti legati alle ipotesi di ricerca. Il testo è diviso in tre parti (2A, 2B, 2C) che vengono consegnate agli studenti in sequenza, in momenti diversi in modo che le parti successive del testo (domande, schemi..) non influiscano su quanto gli studenti fanno in quelle precedenti. Il testo è pensato, in particolare, per:

- rendere più esplicita, rispetto al primo testo, la richiesta di scegliere, motivando tale scelta, una particolare rappresentazione della macchina;

- proporre una similitudine esplicita fra la seconda macchina e la prima.

Pensiamo che sia più opportuno proporre un confronto con la prima macchina dopo averli stimolati a ragionare sulla prima, quindi la domanda sul confronto con la prima macchina segue le prime due. Inoltre proponiamo una riflessione sulla rappresentazione migliore dopo la richiesta di provare a dimostrare, dato che già in questa domanda possono comparire idee sulla rappresentazione della macchina.

Prima parte del secondo testo (2A)

1-Descrivete come è fatta la macchina che vi è stata consegnata *2-Spiegate cosa fa, secondo voi, la macchina*

Giustificazione del testo 2A relativamente alle ipotesi di ricerca

In questo caso l'obiettivo è spingere gli studenti ad una discussione sul modo migliore di descrivere, rappresentare e dimostrare quello che la macchina fa. Nel fare questo ci aspettiamo che gli studenti possano proporre un confronto con la macchina già vista (similitudine) anche se non viene richiesto in maniera esplicita. Da questa parte ci aspettiamo elementi utili per la valutazione dell'ipotesi I2.1 e I2.3 (in questo caso il confronto con la prima macchina potrebbe sorgere in maniera spontanea a partire da alcuni elementi della macchina stessa).

Opinioni che potrebbero emergere relativamente al testo 2A

Alcuni dei seguenti comportamenti od opinioni possono servire a valutare le ipotesi di ricerca:

- descrivendo la macchina potrebbero disporla e rappresentarla graficamente preferendo particolari orientazioni della scanalatura;

- descrivendo la macchina potrebbero dire che è simile alla macchina già vista;

- spiegando cosa la fa macchina potrebbero dire che quello che fa è simile quello che fa la macchina già vista, cercando poi di chiarire le differenze;

- spiegando ciò che la macchina fa potrebbero utilizzare una terminologia funzionale (posizione di un tracciatore in funzione della posizione dell'altro) piuttosto che relazionale (comparazione fra le posizioni dei due tracciatori).

Seconda parte del secondo testo (2B)

3- Pensando alla macchina studiata negli incontri precedenti, provate a pensare a quali idee siano utili anche per l'analisi della macchina che vi è stata consegnata oggi. *4- Provate a dimostrare matematicamente quello che fa la macchina.*

Giustificazione del testo 2B relativamente alle ipotesi di ricerca

In questo caso l'obiettivo è spingere gli studenti ad una discussione sul modo migliore di dimostrare quello che la macchina fa, proponendo un confronto con la macchina già vista. Nel testo è presente una similitudine esplicita (ci riferiamo alla definizione di similitudine che abbiamo proposto nel capitolo 1 par. 5.1). Da questa parte ci aspettiamo elementi utili per la valutazione delle ipotesi I2.1 e I2.3.

Opinioni che potrebbero emergere relativamente al testo 2B

Analogamente a quanto può succedere nel caso della prima macchina, anche con questa prevediamo la comparsa di alcune opinioni o alcuni comportamenti che possono servire a valutare le ipotesi di ricerca. Gli studenti potrebbero sostenere che:

- è più utile osservare come è fatta e come si muove la macchina per capire quello che fa;

- è più utile osservare le figure ed i grafici tracciati dalla macchina per capire quello che fa;

- è utile il metodo di esplorazione della macchina di tipo funzionale: si muove un tracciatore senza mina per osservare il tipi di grafico formato dal tracciatore;

- è utile osservare le figure tracciate da entrambi i tracciatori quando si muovono contemporaneamente.

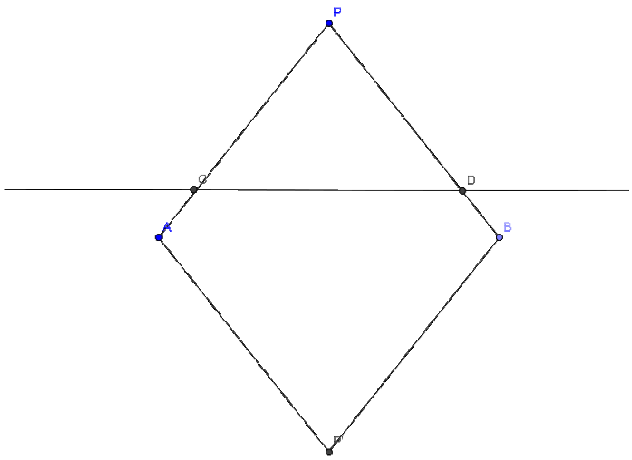
Terza parte del secondo testo (2C)

Di seguito viene rappresentata in quattro modi diversi la macchina che vi è stata consegnata. In tutti i casi i tracciatori sono rappresentati con i punti P e P'.

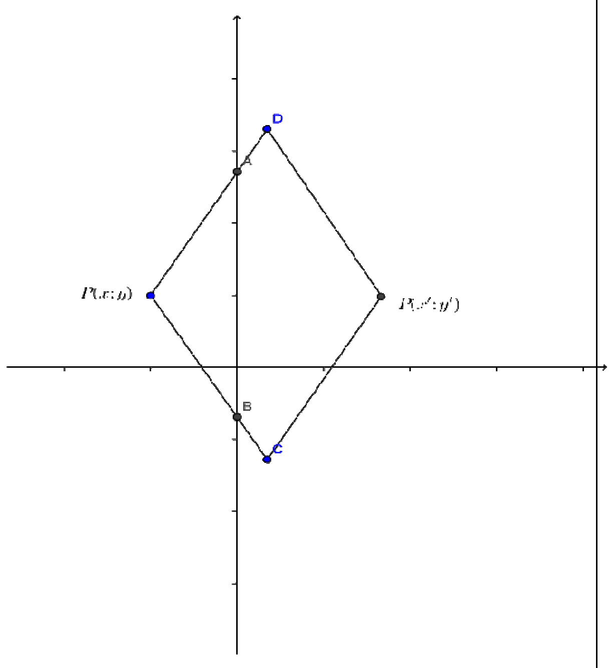
5-Quale è il modo migliore di rappresentarla fra quelli proposti nella pagina seguente? Perché?

6- Per quanto riguarda la dimostrazione di ciò che la macchina fa, spiegate quale fra le particolari rappresentazioni proposte nella tabella può essere più utile.

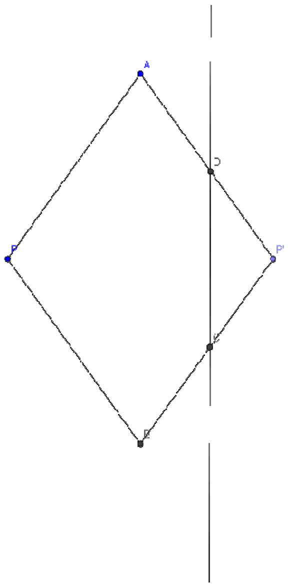
A



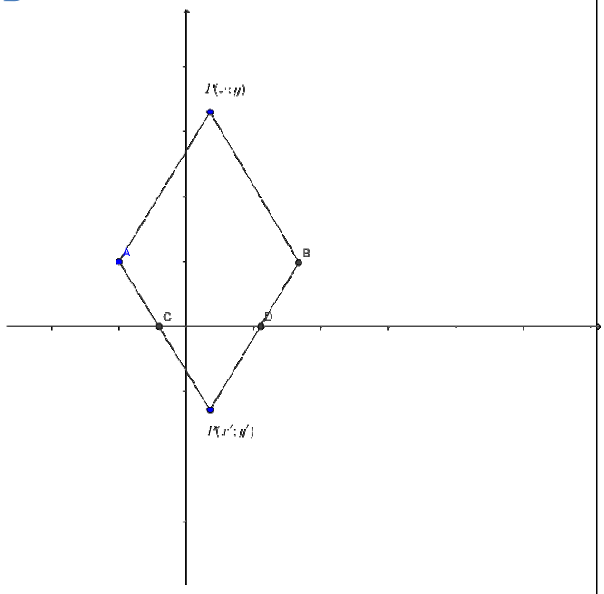
B



C



D



Giustificazione del testo 2C relativamente alle ipotesi di ricerca

Anche questa parte del testo, in maniera simile al testo 1A, ha l'obiettivo di spingere gli alunni a discutere sul migliore modo di disporre la macchina in un riferimento ideale e di rappresentarla graficamente e geometricamente. L'idea è quella di spingere gli studenti a scegliere una particolare rappresentazione della macchina, in due casi differenti, prima per la rappresentazione della macchina e poi per la dimostrazione di quello che la macchina fa, con l'obiettivo di mettere in luce eventuali metafore legate al corpo (embodiment). Con questa parte speriamo di cogliere qualche elemento utile alla valutazione dell'ipotesi I2.1.

Opinioni che potrebbero emergere relativamente al testo 2C

Per quanto riguarda la rappresentazione, gli studenti potrebbero sostenere che:

- la rappresentazione migliore è la A perché è più simmetrica;

- la rappresentazione migliore è la B perché permette di vedere meglio la dipendenza di un tracciatore dall'altro;

- la rappresentazione migliore è la C perché permette di confrontare meglio la distanza dei tracciatori dalla scanalatura;

- la rappresentazione migliore è la D perché permette di confrontare meglio la distanza dei tracciatori dalla scanalatura, avendo a disposizione un asse cartesiano sul quale leggere direttamente il valore;

- conviene rappresentare la scanalatura in modo che sia *orizzontale* perché è più semplice;

- la rappresentazione della macchina è indifferente, che tutti i grafici vanno ugualmente bene.

Per quanto riguarda la dimostrazione, gli studenti potrebbero sostenere che:

- per dimostrare ciò che la macchina fa sono migliori le rappresentazioni A o C perché con esse si vedono meglio certe caratteristiche geometriche;

- per dimostrare ciò che la macchina fa sono migliori le rappresentazioni B o D perché permettono una migliore analisi matematica tramite il piano cartesiano.

Anche in questo caso crediamo che alcune di queste opinioni possano servire a valutare le ipotesi di ricerca.

2.4 Le possibili metafore legate alle macchine e ai testi scelti e valutazione delle ipotesi di ricerca

Metafore e similitudini attese

Nel paragrafo precedente abbiamo discusso la scelta delle macchine e dei testi da utilizzare mettendo in luce anche le metafore che, di volta in volta potrebbero comparire e che, secondo noi, possono fornire elementi per la valutazione delle ipotesi di ricerca. Per rendere più chiara la costruzione dell'esperimento sintetizziamo le metafore, legate alle ipotesi, che ci aspettiamo di rilevare:

M1) metafora della simmetria assiale del corpo: sia nell'esplorazione della macchina che nel primo testo che nel secondo, gli studenti potrebbero manifestare una differenza sia nella rappresentazione che nell'analisi della macchina che può rivelare un ragionamento analogico con il corpo basato su alcune caratteristiche in comune, in particolare pensiamo alla simmetria assiale. Nei testi volutamente non esplicitiamo tale analogia in nessun punto, quindi consideriamo le caratteristiche del testo (disegni) e della macchina (struttura) che, eventualmente, evochino negli studenti questa analogia, come *metafore implicite* (nel senso già chiarito nel capitolo 4 par. 1.2). Inoltre ci aspettiamo che il dominio del corpo e della sua simmetria sia una conoscenza *incorporata o intuitiva* per gli studenti, dato che come dominio source si utilizzerebbe (secondo la nostra ipotesi) il dominio delle conoscenze sul corpo (sua struttura) che consideriamo come incorporate o intuitive.

Tale collegamento (analogia) potrebbe essere verbalizzato dagli studenti in diverso modo, per esempio, con una frase (metafore secondarie) come: ***“****la macchina è formata da due parti speculari* *come il corpo*" (che noi consideriamo, essa stessa, una metafora che può portare a sfruttare conoscenze sul corpo per capire il funzionamento della macchina).

Questo tipo di metafora potrebbe essere rivelatrice di una preferenza nella scelta dell'orientazione dell'asse di simmetria della macchina, sia nella rappresentazione che nella dimostrazione, collegata , secondo noi, al dominio della struttura del corpo.

La comparsa e l'uso di questo tipo di metafora, secondo noi, può servirci a valutare l'ipotesi I2.1 (esistenza di tali metafore).

M2) metafora dello schema d'uso della macchina: come abbiamo già detto, ci aspettiamo che la modalità adottata per l'esplorazione della macchina possa influire sulla sua rappresentazione e sulla sua analisi matematica. Se gli alunni prediligono o usano prevalentemente la modalità di esplorazione di tipo relazionale allora questa potrebbe fungere da metafora di tipo culturale nella fase successiva di analisi, portando a preferire l'analisi delle proprietà geometriche del quadrilatero (la relazione che sussiste fra i due punti tracciatori, la covarianza). Se gli alunni prediligono la modalità di esplorazione di tipo funzionale questo potrebbe invece favorire una analisi matematica basata sulla funzione che lega la posizione di un tracciatore con la posizione dell'altro, la dipendenza funzionale.

Come abbiamo detto, consideriamo i due tipi di schemi d'uso come delle metafore nel senso da noi definito, perché da questi si possono individuare delle analogie fra il modo in cui si muove o si vede la macchina ed il modo con cui la si matematizza.

Tale collegamento (analogia) potrebbe essere verbalizzato dagli studenti con frasi (metafore secondarie) come:

- "*Muovendo la macchina la posizione del tracciatore P' fissa la posizione del tracciatore P, analogamente le coordinate del punto P' dovranno essere funzione delle coordinate del punto P.*" (metafora che potrebbe portare ad una analisi di tipo funzionale);

- "*Se si posizionano i punti sulla scanalatura in modi diversi, i tracciatori si spostano allo stesso modo, analogamente le distanze di tali punti dalla scanalatura dovranno rimanere uguali.*" (metafora che potrebbe portare ad una analisi di tipo relazionale).

Riferendoci alla distinzione già proposta (cap. 4 par. 5.2) tali metafore sono di tipo culturale, infatti il dominio matematico (geometria euclidea del piano o geometria analitica) viene analizzato (costruito) in termini del dominio dei movimenti della macchina (source) che viene conosciuto tramite una attività di tipo *culturale/formale* (l'introduzione dell'esperto alla macchina ed ai suoi schemi d'uso e la successiva attività esplorativa di gruppo).

Nella prima parte del primo testo (1A) consideriamo questa metafora come *implicita* dato che le due modalità di analisi compaiono ma nel testo non spingiamo esplicitamente a collegare tali modalità con la matematizzazione della macchina che può seguire (infatti chiediamo genericamente quale sia più utile per capire quello che fa la macchina). Nella prima parte del secondo testo (2A) tali modalità di analisi potrebbero comparire in relazione alle modalità si esplorazione utilizzate, quindi in maniera *implicita*. Nella seconda parte del testo (1B) questa metafora è esplicita, perché il personaggio che utilizza la prima modalità (Alberto) propone esplicitamente una analisi di tipo funzionale (coordinate di un punto in funzione delle coordinate dell'altro), mentre il secondo personaggio (Chiara) propone una analisi di tipo relazionale.

Pensiamo che l'analisi ed il confronto dei protocolli di queste due parti possa darci indicazioni per la valutazione delle ipotesi I2.1e I2.3.

M3) similitudine con la prima macchina: nel caso del secondo testo e della seconda macchina, ci aspettiamo che gli studenti vedano una somiglianza con la prima macchina e tentino di utilizzarla per studiare anche la seconda. Questo potrebbe avvenire durante l'osservazione o l'esplorazione della macchina o la lettura del testo 2A (nel quale non ci sono diretti riferimenti alla prima macchina), in tale caso la struttura della macchina funge da similitudine *implicita*. Oppure può avvenire con la lettura della seconda parte del testo (2B che viene consegnato in una seconda fase), in tale caso consideriamo il testo come similitudine *esplicita* (dato che viene esplicitamente menzionata la prima macchina), oppure tale collegamento potrebbe manifestarsi in maniera più profonda o chiara durante la lettura della terza parte del testo (2C, consegnata in una terza fase), in tale caso si consideriamo gli schemi proposti nel disegno come similitudini implicite.

Tale collegamento (analogia) potrebbe essere verbalizzato dagli studenti con frasi come: "*questa macchina ha una forma simile all'altra*", similitudine (secondaria) che potrebbe portare a sfruttare conoscenze relative ad una macchina anche per lo studio dell'altra.

Ci pare che si possa parlare di similitudine, secondo la definizione già proposta, dato che l'analogia che può sorgere è fra due macchine, quindi nello stesso dominio. Inoltre in tale similitudine il dominio nuovo viene analizzato tramite un source che è il dominio della macchina già studiata, si tratta quindi di conoscenze acquisite culturalmente in modo formale, si tratta, secondo la nostra definizione, di una *similitudine culturale/formale*.

Tale similitudine può comparire nella parte 2A o 2C, in tal caso la consideriamo *implicita*, o essere sfruttata nella parte 2B, in tale caso la similitudine è esplicita. L'analisi dei protocolli ed il confronto fra le sue parti può servire a valutare le ipotesi I2.1e I2.3.

Valutazione delle ipotesi di ricerca

Nelle tabelle che seguono sintetizziamo, per ognuna delle ipotesi:

- Le metafore che ci aspettiamo e che possono servire ad una valutazione delle ipotesi stesse;
- Le parti dei testi dalle quali ci aspettiamo la comparsa delle metafore;
- La modalità di valutazione che intendiamo usare relativamente alle ipotesi di ricerca.

In particolare nella colonna relativa alla valutazione proponiamo alcuni criteri che possiamo usare per valutare positivamente l'ipotesi (se vengono soddisfatti).

Per quanto riguarda la metafora *M2* (*metafora dello schema d'uso della macchina*), in seguito ad una riflessione compiuta durante l'analisi dei dati sperimentali, abbiamo cambiato la nostra interpretazione da metafora intuitiva (come avevamo pensato inizialmente) a metafora culturale. Infatti riteniamo che il tipo si schema d'uso sia acquisito dagli studenti durante la fase iniziale di introduzione al lavoro, e pertanto sia più corretto interpretarla come conoscenza acquisita da attività culturali/formali e non intuitive (e tanto meno incorporate). Questo ha portato ad escludere dalla valutazione l'ipotesi I2.2, come anticipato, dato che questa era l'unica metafora che avevamo pensato per la valutazione di questa ipotesi.

Ipotesi I2.1

Per questa prima ipotesi sarà possibile usare anche i testi scritti dei gruppi non filmati.

I2.1: *è possibile distinguere due tipi di metafore (intuitiva/incorporata o formale/culturale)con caratteristiche distinguibili (la prima spontanea e non consapevole la seconda non spontanea e che richiede consapevolezza).*			
	Metafore attese	Testi	Valutazione
M1	*metafora della simmetria del corpo (intuitiva o incorporata)*	1A, 1B, 2A, 2C;	Uso di particolari termini che fanno riferimento al corpo umano. Preferenza per l'orientazione *verticale* della scanalatura della macchina in riferimento al corpo umano (complanarità con l'asse di simmetria del corpo eretto).
M2	*metafora dello schema d'uso della macchina* (*culturale/formale*)	1A, 1B, 2A;	La preferenza di un particolare schema d'uso è seguita da una particolare ma tematizzazione del funzionamento della macchina collegabile allo schema d'uso.
M3	*similitudine con la prima macchina(culturale/formale)*	2A, 2B.	La forma della seconda macchina spinge gli studenti a paragonarla alla prima.

Tabella 1

Ipotesi I2.3

I2.3: *se la metafora è di tipo culturale allora la sua produttività dipende dall'essere esplicita o implicita nel testo e la produttività è maggiore nel caso di metafore esplicite.*			
	Metafore attese	Testi	Valutazione
M2	*metafora dello schema d'uso della macchina:*	1A, 1B, 2A	L'influenza che lo schema d'uso utilizzato ha (secondo la nostra ipotesi) sulla matematizzazione successiva, avviene solo dopo la lettura della parte 1B, dove il collegamento (metafora) appare in maniera più esplicita.
M3	*similitudine con la prima macchina:*	2A, 2B	L'analogia con la prima macchina avviene solo dopo che viene letto testo nel quale viene esplicitamente formulato tale collegamento.

Tabella 2

Come abbiamo già scritto la valutazione delle ipotesi è qualitativa, basata sulla interpretazione dei testi scritti, orali e filmati con l'obiettivo di individuare la presenza e le caratteristiche di metafore del tipo specificato dall'ipotesi I2.1 e le dipendenze oggetto dell'ipotesi I2.3.

In particolare analizziamo:

- testi prodotti degli studenti;

- filmati dei gruppi (attività del gruppo scelto ed interviste finali);

- discussione con i gruppi durante il lavoro.

3. Esecuzione esperimento ed analisi dei protocolli

3.1 Tempi, modi ed organizzazione dell'esperimento

Metodologia

Classi: la classe che abbiamo studiato è la 5° liceo linguistico (15 alunni) del Polo "Montessori Da Vinci" di Porretta Terme.

Durata: L'esperimento è durato complessivamente 6 ore, suddivise in due sessioni e ciascuna sessione in due parti (la prima parte di 2 ore e la seconda di 1).

Periodo: dicembre 2012.

Date delle prima sessione: Martedì 20/11/2012 dalle 9,25 alle 11,15 e Lunedì 26/11/2012 dalle 8,30 alle 9,30.

Date della seconda sessione: Martedì 11/12/2012 dalle 9,25 alle 11,15 e Mercoledì 19/12/2012 dalle 7,30 alle 8,30.

Modalità: 2 sessioni di lavoro a gruppi (ciascuna divisa in due giornate). Sono stati definiti 4 gruppi, uno dei quali è stato portato fuori dall'aula e filmato durante il lavoro. Nelle diverse fasi è stato filmato sempre lo stesso gruppo scelto all'inizio.

Materiali: testi e due diverse macchine matematiche: rombo articolato per lo studio della simmetria assiale e dello stiramento (sul piano).

Il contesto delle scuole e delle classi

Per quanto riguarda la scuola, vale quanto scritto nel capitolo 4 (par.3.1), dato che è la stessa scuola. La classe è stata scelta sia per la disponibilità manifestata dagli/le insegnanti, sia perché era meno numerosa delle altre e, rispetto ad altre possibili, poteva dare meno problemi di gestione (da quanto è emerso parlando con le/gli insegnanti). L'organizzazione e la gestione della classe è stata facilitata dalle insegnanti (soprattutto l'insegnante di matematica) che hanno collaborato nella formazione dei gruppi e nella successiva permanenza in classe con i gruppi che non erano filmati dallo sperimentatore. Il clima di classe ed i rapporti interpersonali sono parsi buoni e costruttivi, almeno in presenza dello sperimentatore. All'interno del gruppo scelto per essere filmato, gli studenti, 3 ragazze ed un ragazzo, hanno lavorato con impegno ed in maniera collaborativa, hanno cercato di spiegare sempre le proprie posizioni, talora differenti, senza volersi imporre sugli altri ma discutendo.

3.2 I protocolli

Prima sessione: rombo articolato

Prima giornata

In classe lo sperimentatore ha spiegato brevemente gli obiettivi delle attività, spiegando le modalità di lavoro. La classe è stata divisa in 4 gruppi (3 da 4 ed 1 da 3) con l'aiuto dell'insegnante che ha segnalato i due gruppi con gli studenti dai quali ci si poteva aspettare una maggiore creatività e possibili candidati ad essere scelti per il filmato. Successivamente vengono distribuite, assieme al testo, le macchine (parallelogramma articolato con lati uguali che incorpora la simmetria assiale) spiegando brevemente come si possono muovere secondo i due seguenti schemi d'uso:

- tenendo i due tracciatori e muovendoli;
- tenendo e movendo i due punti vincolati alla scanalatura.

Vengono consegnati i fogli da disegno, le mine e il nastro adesivo dicendo che potevano usare le mine per tracciare disegni sui fogli con la macchina. Fra i due gruppi candidati abbiamo scelto l'unico che aveva quattro componenti (1 ragazzo e 3 ragazze) con la speranza che la presenza di più voci potesse arricchire il lavoro di gruppo. Quindi ci siamo spostati, con il gruppo scelto, in una aula che la scuola che viene utilizzata per le attività di sostegno individuali e che dispone di alcune postazioni per l'uso del computer. E' stata scelta quest'aula perché era l'unica disponibile, a parte l'aula magna che pareva troppo dispersiva. Contemporaneamente gli altri gruppi hanno lavorato in classe in presenza dell'insegnante. In alcuni momenti lo sperimentatore è andato a controllare il livello di avanzamento del lavoro di questi gruppi in modo da poter fornire le parti successive dei testi. Il lavoro del gruppo è stato registrato in due diversi filmati, dovuti all'intervallo fra la prima ora e la seconda (Prima parte: PrimoFilmato.mpg; Seconda parte: SecondoFilmato.mpg). Da questi filmati abbiamo tratto una prima elaborazione (Allegato6_ProtocRomboArtParte1; Allegato7_ProtocRomboArtParte2) nella quale sono trascritti i dialoghi e scelte le immagini più significative.

Seconda giornata

Dopo che si sono divisi secondo gli stessi gruppi della volta precedente, è stata consegnata a ciascun gruppo la stessa macchina (con i fogli che avevano lasciato) e il materiale scritto. Il gruppo da filmare (sempre lo stesso) è stato portato in una zona esterna alla classe, diversa dall'aula scelta nella prima giornata, dato che non era parsa adeguata per la rumorosità.

Anche in questo caso il lavoro del gruppo è stato filmato (Terza parte:TerzoFilmato.mpg) e dal filmato abbiamo tratto un documento con la trascrizione dei dialoghi e alcune immagini significative (Allegato8_ProtocRomboArtParte3).

Nella parte conclusiva della prima sessione la classe viene suddivisa negli stessi gruppi, a ciascun gruppo viene consegnata la macchina ed i materiali che hanno prodotto durante i lavori. I gruppi restano in classe e vengono intervistati dallo sperimentatore (l'insegnante è presente) a proposito di alcuni aspetti dei protocolli:

- Introduzione: PrimaDiscussione1.mpg.

Ogni gruppo viene filmato durante l'intervista:

- Discussione2: PrimaDiscussione2.mpg;
- Discussione3: PrimaDiscussione3.mpg;
- Discussione4: PrimaDiscussione4.mpg;
- Discussione5: PrimaDiscussione5.mpg.

Alla fine lo sperimentatore propone una parte teorica per fare il punto sulla matematica che è incorporata nella macchina (simmetria assiale):

- Finale: PrimaDiscussione6.mpg.

Seconda sessione: biellismo di Delaunay

Prima giornata

Lo sperimentatore ha spiegato brevemente che avrebbero lavorato come nella prima sessione ma con una macchina diversa. La classe è stata divisa negli stessi 4 gruppi della prima volta. Successivamente sono state distribuite le macchine assieme al testo. Sono stati consegnati i fogli da disegno, le mine e il nastro adesivo. Lo sperimentatore si sposta con il gruppo scelto (lo stesso della prima sessione) in una zona della scuola che è isolata dalle altre classi e sufficientemente silenziosa.

Gli altri tre gruppi hanno continuato il lavoro in aula con la presenza dell'insegnante che sostituiva l'insegnante di italiano. L'accordo con l'insegnante era quello di spingere gli studenti a scrivere quello che veniva discusso nel gruppo ma senza intervenire sui contenuti.

Il lavoro del gruppo è stato filmato in due parti (a causa dell'intervallo):

- Prima parte2: PrimoFilmatoSeconda.MPG;
- Seconda parte2: SecondoFilmatoSeconda.MPG.

Dai filmati abbiamo tratto due documenti, che sono fra gli allegati, con la trascrizione dei dialoghi e alcune immagini significative (Allegato9_ ProtocDelaunayParte1; Allegato10_ ProtocDelaunayParte2).

Seconda giornata

In questa seconda giornata sono stati intervistati i gruppi relativamente al lavoro che avevano fatto, filmandoli, con le stesse modalità seguite nella prima sessione (suddivisi in classe e con i materiali e le macchine a disposizione):

- Discussione1_2: SecondaDiscussione1.MPG;
- Discussione2_2: SecondaDiscussione2.MPG;
- Discussione3_2: SecondaDiscussione3.MPG;
- Discussione4_2: SecondaDiscussione4.MPG;
- Discussione5_2: SecondaDiscussione5.MPG.

Infine è stata proposta una parte teorica finale (Finale_2: SecondaDiscussione6.MPG) nella quale è stato spiegato che cosa facesse la macchina che avevano studiato e dimostrate le caratteristiche della macchina (che alcuni dei gruppi avevano individuato anche senza riuscirlo a dimostrare).
Analogamente a quanto fatto per la prima macchina, è stato mostrato come scrivere le equazioni dello stiramento sul piano cartesiano ed si è discusso su come alcune figure vengano modificate da questa trasformazione (triangolo, quadrato, cerchio).

3.3 Difficoltà organizzative, di gestione, e osservazioni metodologiche

Registrazioni

Dai filmati certe parti della conversazione (troppo basse o veloci o sovrapposte) non si capiscono. E non è stato possibile decodificare l'audio nemmeno con l'aiuto del registratore vocale (che è stato utilizzato sia durante il filmato del gruppo scelto che durante le interviste finali).

Primo filmato

La prima aula che abbia utilizzato era rumorosa. Tale aula è, in certi orari, utilizzata per attività di sostegno e non avevano pensato che potesse essere un problema (poteva essere scelta l'aula magna). Questo ha reso più difficoltosa l'analisi dei protocolli e probabilmente influito negativamente sulle attività del gruppo. Nelle sessioni successive abbiamo utilizzato un altro spazio (non un'aula ma una zona isolata del corridoio) che è risultato migliore (anche se non sempre silenzioso).

Gestione di gruppi rimasti in classe

I gruppi rimasti in classe non hanno prodotto testi scritti molto ricchi e alcuni non hanno dato l'impressione di essersi veramente impegnati. Alcuni aspetti dei protocolli sono stati discussi direttamente con i componenti nelle interviste finali, tuttavia in certi casi l'impressione che abbiamo avuto è che alcune risposte siano state costruite nel momento dell'intervista e non siamo sicuri che siano corrispondenti al percorso realmente compiuto durante i lavori. Gli accordi presi con le/gli insegnanti (che sono cambiati nelle diverse sessioni e parti di sessioni) erano che spingessero gli studenti a lavorare con impegno e a scrivere nella maniera più chiara e completa possibile quello che stavano facendo. Questo compito non si è rivelato semplice, nemmeno nel gruppo filmato dallo sperimentatore (questo fatto è stato rilevato anche nel primo esperimento).

4. Valutazione complessiva del secondo esperimento

Partendo dall'analisi dei filmati del gruppo scelto, dai protocolli scritti degli altri gruppi ed integrando con le interviste finali (anche queste filmate) abbiamo ottenuto un documento di sintesi (Appendice1Cap5) che abbiamo analizzato al fine della valutazione delle ipotesi di ricerca.

Anche in questo caso, come nel primo esperimento, la valutazione che descriviamo è una valutazione che comprende la valutazione delle prime ipotesi di ricerca e altri aspetti che ci sono parsi di interesse.

4.1 Valutazione delle ipotesi di ricerca

Materiali usati per la valutazione

Come già scritto nel paragrafo 2, per la valutazione dell'esperimento sono stati utilizzati:

- testi prodotti degli studenti;
- filmati dei gruppi (attività del gruppo scelto ed interviste finali);
- discussione con i gruppi durante il lavoro.

L'analisi dei testi e dei filmati prodotti è stata di tipo qualitativo, con l'obiettivo di valutare la presenza o assenza delle dipendenze ipotizzate e l'eventuale dipendenza da altre variabili non direttamente prese in considerazione nei testi proposti.

Metodi di valutazione

Per valutare le ipotesi di ricerca abbiamo prima sintetizzato i materiali (testi, filmati e discussioni) per ottenere un documento unico (Appendice1Cap5), che abbiamo analizzato andando ad indicare i punti per noi più significativi, aggiungendo anche, dove possibile, un riferimento temporale ai

filmati. Successivamente abbiamo utilizzato i criteri sintetizzati nelle tabelle descritte nel paragrafo 2.4 (Tabella 1 e Tabella 2).
Per una analisi dettagliata rimandiamo all'Appendice1Cap5 (al termine del capitolo).

Risultati della valutazione

Nel complesso concludiamo che si sono evidenziate metafore o similitudini con caratteristiche tali da dire che ci sono alcune evidenze favorevoli all'ipotesi I2.1. Naturalmente l'ipotesi I2.1 è stata formulata in maniera generale, le nostre osservazioni si riferiscono a casi particolari.

Per quanto riguarda l' ipotesi I2.3 pensiamo che non ci siano sufficienti evidenze favorevoli.

Per quanto riguarda l'ipotesi I2.2, come abbiamo scritto, c'è stato un ripensamento (a posteriori) che ha reso non possibile valutarla.

Osserviamo che nei casi in cui tali metafore e similitudini sono state usate in maniera spontanea (uso dei termini "*braccia*" o "*speculari*", riconoscimento della similitudine fra le macchine), la produttività, senza la guida dell'insegnante, non è stata molto alta. Quindi, come abbiamo già visto con il primo esperimento, la guida di un esperto (insegnante) è cruciale per riuscire a sfruttare (quando è possibile) le analogie che possono sorgere dalle metafore.

4.2 Altre osservazioni

In questo paragrafo raccogliamo alcune osservazioni che abbiamo compiuto nelle diverse fasi nelle quali si è articolato il secondo esperimento. Crediamo che possano essere spunti di riflessione per ulteriori approfondimenti ed alcune di esse verranno riprese nel prossimo capitolo. Ci limitiamo ad elencarle, senza ulteriori approfondimenti, con riferimenti, posti fra parentesi, che si riferiscono ai punti messi in evidenza in Appendice1:

- elementi che indicano una preferenza nell'orientazione della macchina (*9);

- riconoscimento della simmetria con uso esplicito del termine (*6): il concetto di simmetria emerge dall'analisi della macchina senza che sia stato esplicitamente menzionato;

- elementi che potrebbero indicare la metafora come ostacolo o fonte di misconcezioni:

    - (*10): la comprensione intuitiva della macchina non facilita la ricerca di una dimostrazione;
    - (#7, *16): il funzionamento della macchina viene giustificato come qualcosa che si vede e di cui ci si accorge.

- elementi che indicano la dipendenza di alcune scelte dalle caratteristiche della macchina: (*12): il fatto di usare entrambi i tracciatori può forzare la scelta della posizione della macchina;

- elementi che indicano una trasformazione/evoluzione di significati matematici:

    - (*14) inizialmente non viene fatta distinzione fra figure identiche, simmetriche e speculari;

- (*17,*18): la macchina per lo stiramento forma “*comunque figure simmetriche*”;
- (*24): idea di figure “*meno simmetriche*”;
- (*30, *31): la seconda macchina crea figure “*simmetriche ma di dimensioni diverse*”;
- (*34, *35): proposta (e successiva confutazione) di figure che sono diverse ma con le stesse proporzioni, che sembra un passo promettente verso la comprensione matematica della macchina.

- dipendenza dell’interpretazione di una figura dalla disposizione (verticale/orizzontale): (#1) la stessa figura viene “*vista*” come rombo o come quadrato a seconda della posizione dalla quale viene guardata;

- dipendenza della scomposizione di una figura dalla disposizione (verticale/orizzontale): (#2), (#5) i triangoli che compongono una figura vengono “*visti*” con una diversa facilità dipendendo dalla posizione;

- diversi significati per lo stesso oggetto matematico: (#3), (#4), (#6): in un caso le stesse equazioni, in forme diverse, vengono interpretate in maniera differente. In un altro caso sono consapevoli che sia la stessa figura ma fanno comunque una differenza, soprattutto se si assume effettivamente una certa posizione (e non la si immagina soltanto);

- l’evidenza di alcuni fatti è un ostacolo alla necessità di dimostrare: (#7), (*16): non è necessario dimostrare che due triangoli sono congruenti perché “*si vede*” o è qualcosa di cui “ci si accorge”;

- misconcezioni come possibili problemi di mappatura nell’uso di analogie: (#8) viene confusa la funzione simmetrica con la funzione inversa;

- problemi nel comprendere il funzionamento della macchina:
  - (#9), (#10): pensano che il motivo per cui le figure prodotte non sono più esattamente simmetriche sia la posizione della scanalatura e non sia dovuta alla posizione dei perni;
  - (#15): non capiscono chiaramente che le dimensioni vengono modificate solo in una direzione;

- facilitazione alla comprensione dovuta alle caratteristiche della macchina: (#12) la possibilità di movimento sembra facilitare la comprensione di caratteristiche geometriche;

- concezioni di dimostrazione:
  - (#13) si chiedono cosa significhi “*dimostrare matematicamente*” propongono che significhi uso del piano cartesiano;
  - (#17, #18) preferenza per le rappresentazioni con il piano cartesiano;

- creazione di ipotesi e verifica : #15, #11.1, #14.1;

- contemporanea presenza di due concezioni in conflitto (intuitiva/formale ?): #16, #6, #4, *22, §§.

4.3 Punti critici dell'esperimento

Anche in questo caso indichiamo con riferimenti posti fra parentesi i punti messi in evidenza in Appendice1.

Commenti relativi alla progettazione dell'esperimento

Il tipo di ipotesi di ricerca era meno specifico, rispetto al primo esperimento, ad esempio consideriamo come metafore attese fatti abbastanza diversi fra di loro (la simmetria del corpo, il tipo di esplorazione della macchina, la somiglianza fra le macchine).
In particolare l'ipotesi sulla metafore derivante dagli schemi d'uso ci pare, a posteriori, un po' debole. Considerare lo schema d'uso come metafora può forse rientrare nella definizione che abbiamo dato nel capitolo 1, (infatti abbiamo messo animazioni, filmati..) ma forse andrebbe discussa ed aggiunta qualche ulteriore specificazione.
Alla luce di alcune difficoltà che abbiamo trovato nella valutazione delle ipotesi, crediamo che sia da chiarire in maniera più precisa la differenza fra metafora intuitiva o incorporata e metafora culturale/formale.

Introduzione al lavoro

Non è stata filmata la parte introduttiva al lavoro con tutti i gruppi dello sperimentatore, questo nell'idea che non fosse utile per la valutazione delle ipotesi. A posteriori riteniamo che poteva essere interessante per analizzare le modalità con le quali lo sperimentatore, anche inconsapevolmente, può avere introdotto il lavoro agli studenti.

Punti critici nella gestione delle attività

Al momento iniziale della consegna delle due macchine al gruppo filmato lo sperimentatore non ha posto attenzione nel posizionare in una maniera più casuale le macchine sul tavolo. Nella fase iniziale il gruppo mantiene la macchina nella posizione nella quale l'hanno trovata, anche se dopo la posizione viene cambiata (anche molte volte).

§4.2: Nella seconda sessione (biellismo di Delaunay) lo sperimentatore non ha portato con sé i protocolli scritti della prima sessione e non li ha potuti consegnare al gruppo che li aveva richiesti per poter fare un confronto migliore con la prima macchina (come viene chiesto in una delle domande).

Punti critici nella gestione delle interviste

Dati i tempi limitati, le domande che lo sperimentatore ha fatto, in certi casi, sono state abbastanza chiuse, e possono avere contribuito alla costruzione "sul momento" di alcune risposte sotto la pressione dell'intervista (e della telecamera) che ci lasciano in dubbio relativamente alla loro significatività o sincerità.

Punti critici nella progettazione dei testi

§1: l’interpretazione dei punti P e P’ come tracciatori che davamo per scontata del disegno proposto nel testo non era scontata per gli studenti. Sembra che altri elementi (la forma della figura ?) siano stati più importanti, in certi casi, per l’interpretazione. (Volendo si potrebbe parlare di metafore o similitudini che hanno funzionato in maniera differente da quella che ci aspettavamo).

§5.1, §6: nella costruzione degli schemi proposti per le possibili rappresentazioni della macchina, il mancato rispetto delle reali proporzioni (il perno divide in due parti l’asticella) ha rappresentato un grave errore di progettazione, infatti alcuni studenti si sono focalizzati su questo per la scelta della rappresentazione, andando così a interferire con gli obiettivi dell’esperimento.

In generale per semplificare l’interpretazione di quello che gli studenti dicono durante le attività filmate (o registrate), è meglio evitare di utilizzare lettere che si pronunciano in maniera simile (come B o D) perché questo può portare a difficoltà successive nell’ascolto ed interpretazione. Meglio usare lettere o simboli che si pronuncino in maniera ben distinguibile.

Punti critici negli interventi dello sperimentatore

§5: la formulazione della domanda dello sperimentatore spinge una studentessa a dedurre che ci doveva essere un solo modo per rappresentare la macchina. Questo significa che la domanda posta doveva probabilmente essere diversa, impedendo questo tipo di deduzione che può influire sull’esperimento.

Punti critici nella gestione delle attività

Risulta problematica l’interpretazione di ciò che i gruppi fanno quando lo sperimentatore non è presente e non vengono filmati. Le giustificazioni che i gruppi propongono successivamente (durante l’intervista finale che avviene alcuni giorni dopo) non sono parse sempre credibili, l’impressione è che possano essere “razionalizzazioni” posteriori.

Dall’analisi dei materiali prodotti è abbastanza evidente che il comportamento dei gruppi sia differente nel caso che siano filmati in presenza dello sperimentatore piuttosto che lasciati in classe con un altro insegnante e senza essere ripresi. La motivazione al lavoro pare molto diversa.

Altre variabili

Per quanto riguarda alcune delle dipendenze evidenziate nella Figura 1 (frecce 6, 7 e 3) non abbiamo rilevato particolari metafore introdotte, in maniera più o meno consapevole, dallo sperimentatore. Ma abbiamo rilevato alcune caratteristiche dei testi che si sono rivelate importanti per le scelte degli studenti (già descritte in un punto precedente).

Aggiungiamo che la presenza di tracciatori in posizioni specifiche (§4) può rendere, di per sé, più conveniente la scelta di una orientazione specifica della macchina (con scanalatura nella direzione di chi usa la macchina) e quindi andare a influire sulla verifica di una delle ipotesi da testare nell’esperimento. In certi casi, dopo che vengono inserite le mine e che iniziano a tracciare figure, la posizione scelta mostra questa dipendenza.

Appendice1Cap5

Appendice 1: valutazione del secondo esperimento

Materiali e metodi di valutazione

Per l'analisi dei dati sono stati utilizzati:

- protocolli scritti di tutti i gruppi (Allegato11_ProtocolliScritti);

- filmati del gruppo scelto: facciamo riferimento alle trascrizioni dei filmati che sono riportate negli allegati:

    - Allegato6_ProtocRomboArtParte1;
    - Allegato7_ProtocRomboArtParte2;
    - Allegato8_ProtocRomboArtParte3;
    - Allegato9_ProtocDelaunayParte1;
    - Allegato10_ProtocDelaunayParte2;

- filmati delle interviste finali (delle quali sono sintetizzate solo alcune parti in quanto segue e messe in riquadri per renderle distinguibili dal resto);

- registrazioni (osservazioni) dello sperimentatore durante i filmati, che sono state trascritte dall'originale in quanto segue.

L'analisi che proponiamo è suddivisa nelle due sessioni: la prima relativa alle attività il rombo articolato e la seconda relativa alle attività con il biellismo di Delaunay. Per ciascuna sessione proponiamo una analisi prima dei testi scritti dei gruppi non filmati, integrando con le interviste finali, successivamente passiamo all'analisi del testo scritto e del filmato del gruppo scelto, che viene qua sintetizzato a partire dagli allegati e dei filmati. Anche in questo caso integriamo con le interviste finali. In alcuni punti collochiamo dei riferimenti preceduti dai simboli *, # e §, che abbiamo scelto per indicare i punti che ci sono parsi o utili per la valutazione delle ipotesi di ricerca (segnalati con *) o interessanti per la didattica della matematica (segnalati con #), o perché ci sono parsi punti critici dell'esperimento (segnalati con §). Nella parte finale passiamo a valutare le ipotesi di ricerca.

Prima sessione

Protocolli scritti dei gruppi non filmati

Gruppo 1

Intervista filmata: Discussione4 (PrimaDiscussione4.mpg)

Nei fogli che hanno usato con la macchina sono presenti molti disegni, non solo geometrici. I fogli con il testo non presentano scritte.

Protocollo scritto (Allegato11_ProtocolliScritti, Gruppo1, Prima Sessione):

"E' un rombo equilatero quindi gli spostamenti si influenzano a specchio ***1** *come se fosse un triangolo con la base appoggiata su una superficie riflettente.*

Dall'intervista finale Nell'intervista chiedo come abbiano avuto l'idea dello specchio, in quale momento del lavoro. Una ragazza mi dice che hanno iniziato prima osservando le figure prodotte dalla macchina (tracciate con le mine) per vedere che effettivamente si riflettevano dall'altro lato, poi hanno analizzato il movimento della macchina ed hanno osservato che le due parti divise dalla scanalatura si muovono allo stesso modo.

Sul grafico si possono formare cerchi e figure piane (quadrati, triangoli).

Si possono fare stelline e cuoricini, quindi disegni non geometrici.

L'affermazione di Chiara è utile per capire che qualsiasi cosa si disegni da un lato si riflette sull'altro.

Tutte le figure si possono disegnare entro un certo limite del piano in cui i perni non toccano gli estremi di esso.

Non è possibile disegnare all'interno dei semicerchi che si formano facendo toccare i perno con gli estremi del piano.

La zona in cui si può disegnare è irregolare"

(continuazione nella giornata successiva)

"*Inizialmente l'affermazione di Alberto potrebbe sembrare corretta e giustificabile, in quanto poiché P' e P si muovono a specchio, all'aumentare o diminuire del valore di uno l'altro assumerà sempre valore opposto.* (vedere il successivo protocollo allegato)
però osservando il modo in cui si muovono i perni della macchina, giungiamo alla conclusione che all'aumentare del valore di P', i punti A e B si muovono diagonalmente, in quanto in qualsiasi modo venga mossa , la figura che i vertici creano è sempre un rombo equilatero."

Dall'intervista finale Nell'intervista spiegano che per trovare le equazioni che descrivono il funzionamento della macchina, avevano inizialmente ipotizzato che spostando uno dei perni della scanalatura di una unità (tenendo fermo l'altro), il tracciatore si muovesse nella direzione ortogonale di una unità. In realtà si sono poi accorti che il movimento dei tracciatori, nel caso descritto sopra, è un

movimento in diagonale.

“ *Chiara dunque ha ragione: poiché i due triangoli sono congruenti le loro altezze saranno sempre uguali*

*Alberto invece sbaglia nella sua analisi in quanto non prende in considerazione il comportamento del punto A (*non è chiaro sembra una x ma potrebbe essere una e*)B se si spostano i perni della macchina.*”

Dall’intervista finale
Dall’intervista mi pare che queste considerazioni derivino da una differente interpretazione (rispetto a quella che a me pareva ovvia) del disegno che accompagna l’affermazione di Alberto, infatti sembra che le ragazze considerino i punti P e P’ come perni e non come tracciatori, mantenendo i significati dei punti che sono presenti nello schema di Chiara.

§1

INIZIALMENTE L'AFFERMAZIONE DI ALBERTO POTREBBE SEMBRARE CORRETTA E GIUSTIFICABILE, IN QUANTO POICHE' P' e P SI MUOVONO A SPECCHIO, ALL'AUMENTARE O DIMINUIRE DEL VALORE DI UNO, L'ALTRO ASSUMERA' SEMPRE IL VALORE OPPOSTO;

Parte 2

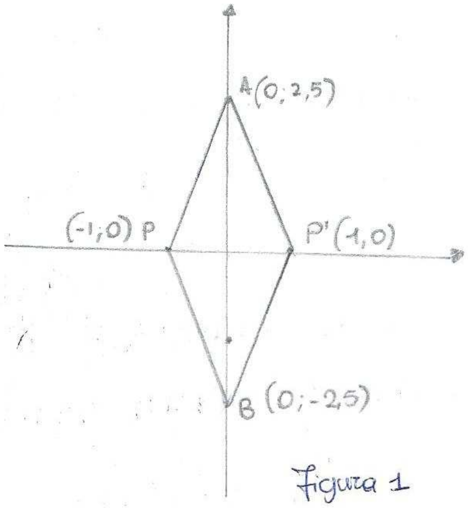


Figura 1

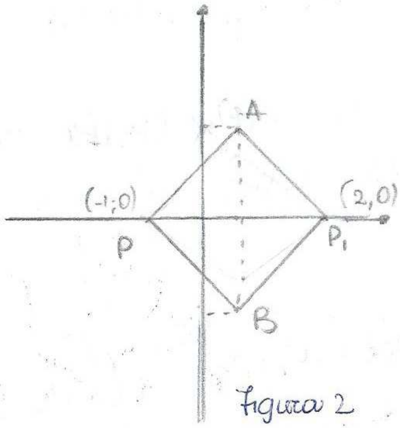


Figura 2

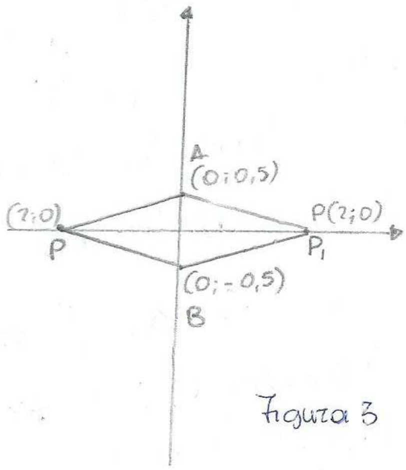


Figura 3

PERO'

· OSSERVANDO IL MODO IN CUI PERO' SI MUOVONO I PERNI DELLA MACCHINA, GIUNGIAMO ALLA CONCLUSIONE CHE ALL'AUMENTARE DEL VALORE DI P', I PUNTI A & B SI MUOVONO DIAGONALMENTE, IN QUANTO IN QUALSIASI MODO VENGA MOSSA, LA FIGURA CHE I VERTICI CREANO E' SEMPRE UN ROMBO EQUILATERO;

· CHIARA DUNQUE HA RAGIONE: POICHE' I DUE TRIANGOLI SONO CONGRUENTI LE LORO ALTEZZE SARANNO SEMPRE UGUALI

· ALBERTO INVECE SBAGLIA NELLA SUA ANALISI IN QUANTO NON PRENDE IN CONSIDERAZIONE IL COMPORTAMENTO DEL PUNTO A & B SE SI SPOSTANO I PERNI DELLA MACCHINA;

(*2)

Gruppo 3

Intervista filmata: Discussione2 (PrimaDiscussione2.mpg)

Sui fogli usati nella macchina ci sono alcuni disegni ma solo da una parte , nell'altra c'è scritto un nome. Sui fogli del testo ci sono alcuni disegni sul grafico e di fianco alle equazioni proposte da Bruno c'è scritto "*NO!*".

Protocollo Scritto (Allegato11_ProtocolliScritti, Gruppo3, Prima Sessione):

" *1) Chiara e Alberto fanno le loro osservazioni perché (*hanno cancellato la frase *'tengono fermo un vertice senza mina e muovono l'altro')se muovono un vertice si muove anche l'altro e facendo ciò vedono che i due triangoli che si formano sono SEMPRE congruenti*

2) Sono utili entrambi perché l'opinione di Chiara è la conseguenza di ciò che dice Alberto

NOSTRE OSSERVAZIONI

1) *(poi cancellato) i triangoli che si formano saranno sempre simmetrici*

2) *Sia a dx (destra) sia a sx (sinistra) otteniamo 2 disegni (*cancellato *uguali e) simmetrici*

(*3)

3) *Questo accade perché la struttura di ferro (*cancellato *è un quadrato) ha tutti i lati uguali*

4) *Un vertice senza mina rimane sempre fermo fino a quando non siamo noi che tiriamo l'intera struttura, mentre se muovo un vertice con la mina, tutti i vertici si muovono"*

Dall'intervista finale Nell'intervista chiedo chiarimenti sulla frase del punto 2 e la mia impressione è che non mi riescano a spiegare bene cosa volessero dire. Probabilmente volevano dire che i due fatti sono legati e Chiara dice che le figure sono congruenti in seguito all'osservazione di diverse posizioni della struttura metallica che la macchina assume quando Alberto la muove.

" *3) Siamo d'accordo con Chiara perché osservando la macchina , se noi muoviamo un vertice (*cancellato *con la mina) otteniamo due triangoli con la stessa altezza; trasferendo questo ragionamento sul p.cart. vediamo che le altezze rimangono sempre uguali perché se noi (*non chiaro*) i due vertici P le x aumentano mentre le y diminuiscono.*

Ora l'eq. Di Alberto risulta corretta perché considerando i due punti P osserviamo che hanno ordinata uguale e positiva mentre l'ascissa nel punto nel punto P' è positiva e nel P è negativa.
x' sarà sempre uguale a –x perché qualsiasi x che diamo al triangolo di destra sarà sempre positiva mentre la x che diamo al triangolo di sinistra sarà sempre negativa.

Le y saranno sempre positive perché i punti P sono rappresentati, in questo caso, nei quadranti 1 e 2 dove le y sono positive."

Dall’intervista finale
Dall’intervista risulta che il ragionamento del gruppo per dire che le equazioni proposte da Alberto erano giuste e quelle di Bruno errate è stato, in sostanza: una delle due è giusta e l’altra e sbagliata, abbiamo verificato che quelle di Alberto funzionano, quindi quelle di Bruno non vanno bene.

(continuazione nella giornata successiva)

Domanda 3: a cosa serve la macchina?

“E’ stata creata per dimostrare alcuni teoremi in modo grafico.”

Gruppo 4

Intervista filmata: Discussione3 (PrimaDiscussione3.mpg)

Sui fogli usati nella macchina ci sono alcuni disegni e poi sono stati girati per poter sfruttare anche l’altro lato. Sui fogli del testo non sono presenti produzioni scritte.

Protocollo scritto (Allegato11_ProtocolliScritti, Gruppo4, Prima Sessione):

“ *Considerazioni in base alle osservazioni di Alberto e Chiara*

1)Alberto, dopo avere osservato la macchina, è in grado di stabilire che in seguito al movimento del tracciatore sinistro, lo stesso movimento viene effettuato contemporaneamente dal tracciatore destro. La differenza che è possibile notare fra i due movimenti è riscontrabile nel fatto che il tracciatore destro effettua il movimento opposto del tracciatore sinistro. La successiva affermazione da parte di Chiara, la quale sostiene la natura congruente dei due triangoli che si vengono a formare in seguito al movimento di entrambi i tracciatori la possiamo considerare corretta/veritiera: le braccia (***4**) *del tracciatore sinistro risultano essere simmetriche analogamente a quelle del tracciatore destro in modo tale da formare due triangoli isosceli con base identificabile nel segmento che determina la divisione della tavola in due parti uguali* **(*).**

Ogni studente esprime la propria considerazione basandosi sull’applicazione del metodo scientifico-sperimentale: Alberto, partendo dall’osservazione della macchina matematica è in grado di confermare e verificare la sua ipotesi attraverso il movimento dei due tracciatori. Chiara afferma che i due triangoli sono congruenti sia per quanto riguarda gli angoli che per quanto riguarda i lati perché ha prestato molta attenzione alle frasi sostenute da Alberto, grazie alle quali è in grado di cogliere la formazione di due figure geometriche aventi uguali caratteristiche. Bruno afferma di non vedere nulla e di non capire preferisce soffermarsi sulla parte geometrica relativa alla realizzazione del disegno, preferendola all’osservazione meccanica della macchina matematica.

**Osservando il movimento della macchina, Bruno non capisce perché i suoi due amici effettuano considerazioni a livello meccanico e preferisce, anziché intravedere una rappresentazione meccanica, concentrarsi sulle figure geometriche che realizza.*

2)E' più corretta l'affermazione di Alberto in quanto Chiara non tiene in considerazione che avvicinando le braccia della macchina matematica queste finirebbero per sovrapporsi e sovrapponendosi i triangoli non sarebbero più congruenti "

Dall'intervista finale
Nell'intervista chiedo una spiegazione all'uso del termine "*braccia*", e dicono (un alunno) che questo termine è dovuto al fatto che: "*si muove quando decidiamo di muovere l'intera struttura..si muovono contemporaneamente e sono opposte ma parallele..poi..non c'è una ragione specifica..*". La mia impressione è che il termine sia stato usato in maniera non consapevole e le ragioni che porta siano in realtà delle razionalizzazioni che l'alunno ha trovato al momento della mia domanda.

(*5) Ancora lo stesso alunno chiarisce l'affermazione (*) dicendo che probabilmente Bruno non era in grado di capire le affermazioni più matematiche dei suoi compagni e preferisce una analisi della macchina basata sull'osservazione delle figure che vengono da essa realizzate.
Nell'intervista chiedo cosa significhi questa affermazione, io credevo che intendessero che nei casi limite dei lati che si sovrappongono le figure bidimensionali scompaiono e restano dei segmenti, quindi cambierebbe il concetto di congruenza fra triangoli. In realtà non era questo che intendevano: spiegano che a seconda di come si mettono le braccia, la base comune ai due triangoli cambia di lunghezza, in un caso si possono formare due triangoli equilateri mentre in generale si formano due triangoli isosceli. Non mi è facile trovare una connessione fra la loro frase scritta e queste giustificazioni, anche in questo la mia impressione è che gli alunni abbiano cercato delle giustificazioni a seguito della mia domanda ma non chiaramente collegate con le ragioni che li hanno spinti a scrivere quello che hanno scritto. (In effetti nell'intervista devono rileggere il testo per cercare di ricordare la situazione e hanno bisogno di abbastanza tempo).

(continuazione nella giornata successiva)

"Giustifichiamo la teoria di Alberto in quanto in seguito alla divisione in quattro quadranti del piano , x risulta negativo in quanto si trova nel secondo quadrante, y' ed y sono entrambi positivi. In conclusione possiamo affermare che il metodo che giustifica il movimento della macchina è quello di Alberto. (segue il modo con il quale hanno indicato il segno delle x e delle y nel grafico)

§2

Dall'intervista finale
Nell'intervista dicono che hanno visto che le equazioni di Alberto erano giuste e quindi non hanno preso in considerazione quelle di Bruno. E' comunque sempre l'alunno che si fa portavoce di tutto il gruppo proponendo questa risposta.

Protocolli del gruppo filmato

Gruppo 2

Sui fogli usati nella macchina ci sono alcuni disegni e poi sono stati girati per poter sfruttare anche l'altro lato. Sui fogli del testo ci sono diverse scritte relative ad una discussione sul significato delle equazioni proposte da Alberto e da Bruno.

Protocolli orali completi (filmati):

- Allegato6_ProtocRomboArtParte1;
- Allegato7_ProtocRomboArtParte2;
- Allegato8_ProtocRomboArtParte3.

Intervista filmata: Discussione5 (PrimaDiscussione5.mpg)

Protocollo scritto (Allegato11_ProtocolliScritti, Gruppo2, Prima Sessione)

"*2) Per capire il funzionamento della macchina è più utile l'osservazione che fa Alberto perché esplica in maniera più intuitiva il meccanismo della macchina, e per comprendere la sua affermazione non serve nessun tipo di conoscenza dei principi base della geometria, mentre per intendere l'osservazione di Chiara è necessario sapere la definizione di triangolo congruente, seppur essa sia una nozione elementare.*

Dall'intervista finale Nell'intervista chiedo cosa intendano con "*maniera più intuitiva*" e mi spiegano che facendo esattamente come dice Alberto (e la ragazza che parla tiene il tracciatore alla sua sinistra e lo muove) si vede immediatamente che il movimento dall'altra parte è uguale, e basta muovere la macchina per vederlo, senza bisogno di altre conoscenze specifiche. Diversamente per capire l'affermazione di Chiara sono necessarie più conoscenze (per capire cosa significa congruente).

Nostra osservazione

Dato che i due triangoli sono congruenti, il disegno che si ottiene movendo la macchina in qualsiasi modo è simmetrico rispetto alla scanalatura della macchina.

1)L'osservazione di ogni personaggio dipende dalla posizione in cui sono disposti attorno alla macchina.

Rispetto alla posizione in cui sono seduti Alberto e Chiara la macchina assume la forma di un rombo, mentre Bruno dalla sua posizione vede (nella macchina) un quadrato.

#1

Dall'intervista finale Nell'intervista chiedo di spiegare meglio questa posizione. Dicono che per spiegarsi perché i

personaggi dicano alcune cose hanno ipotizzato che questo dipenda dalla loro posizione rispetto la macchina. Durante il lavoro si sono disposti come descritto in figura (ed anche in questo momento si ridispongono allo stesso modo) per verificare che Alberto e Chiara "*vedono un rombo*" e Bruno "*vede un quadrato*". Io ho fatto notare che la figura in realtà è la stessa ma continuano a differenziare i due casi e sono tutti d'accordo su questo.

Chiedo se si siano immaginati anche situazioni, non rappresentate nella figura, nelle quali la configurazione della macchina sia tale da non permettere a Bruno di vedere un quadrato. Mi dicono di no, si sono basati sulla figura (in ogni caso seguendo il loro ragionamento anche in questi casi Bruno non vedrebbe un rombo)
Alla fine dell'intervista torno su questo punto chiedendo come mai abbiano individuato nelle posizioni differenti dei personaggi la caratteristica importante per quello che dicono e non in altre caratteristiche presenti nella vignetta. Ad esempio, secondo il loro ragionamento, Alberto e Chiara vedono lo stesso tipo di figura, il rombo, ma dicono cose diverse. Una ragazza dice che è anche quello che fanno a fare la differenza, infatti Alberto muove la macchina, quindi riesce a capire meglio come funziona, mentre Chiara la sta osservando e riesce meglio a individuare le figure geometriche che si formano. Comunque entrambe le affermazioni, di Chiara ed Alberto, sono giuste.
Io insisto e chiedo se allora si possa dire che la differenza consista nel fatto che uno muove la macchina e l'altro no, oppure ci sia anche altro.

L'alunno componente del gruppo dice che forse dipende anche dal fatto che la figura complessiva che vedono Alberto e Chiara non è la stessa, perché Chiara "*vede chiaramente la base dei triangoli*" che sono "*di fronte*", mentre Alberto non li vede così bene perché li vede "*ribaltati*".

#2

3)A nostro parere per dimostrare unicamente ciò che la macchina fa è sufficiente il metodo di Chiara (1° metodo), ci mostra come i due triangoli siano congruenti e di conseguenza , aventi la stessa base, la stessa altezza e la stessa area.

Utilizzando questo metodo riusciamo a dimostrarlo intuitivamente.

OSSERVAZIONI: Crediamo che Alberto utilizzi il piano di riferimento Cartesiano per poter ricavare dai punti del grafico la misura dei segmenti che compongono la figura e di conseguenza l'area della stessa.

Da un punto di vista grafico l'equazione di Alberto risulta essere corretta, poiché per ottenere la figura del grafico occorre il valore opposto della x"

Dall'intervista finale
Nell'intervista chiedo perché abbiano pensato all'area della figura, e mi dicono che dato che Alberto usa un piano cartesiano, forse voleva dimostrare qualcosa, voleva ottenere qualche altra informazione ed hanno pensato all'area. Un altro componente si riferisce poi alla frase di Chiara sulla congruenza dei triangoli per spiegare che la prima cosa che è venuta loro in mente è stata proprio l'area. (E' probabile che i vocaboli ed i concetti usati nella frase di Chiara ..triangoli congruenti, lati uguali, altezze..abbia in qualche modo facilitato l'associazione con il concetto di area, dato che sono abituati a calcolare l'area di un triangolo conoscendo lati o altezze?).

(continuazione fatta nella giornata successiva)

"In realtà abbiamo appurato che nemmeno questa è del tutto corretta poiché per ottenere il grafico occorrono anche i valori negativi della y. La y non è la stessa, ma opposta.

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Dall'intervista finale
Dall'intervista dicono che le equazioni di Alberto sono giuste "*da un punto di vista grafico*", perché se uno guarda la figura vede che vanno bene. Le equazioni di Bruno vanno bene invece "*da un punto di vista analitico*".

#3

Chiedo spiegazioni su questa differenza sulla quale comunque non sono tutti d'accordo (un componente dice di non averla ancora capita). Da quanto dice la ragazza sembra, inizialmente, che il problema sia nel fatto che i segni che vengono posti nelle coordinate x dei punti P e P' (tracciatori) seguono gli stessi segni che compaiono nelle equazioni (ovvero il punto x' è positivo ed il punto x è negativo), mentre questo "accordo" non c'è seguendo le equazioni di Bruno. La ragazza si rende comunque conto che l'equazione è soddisfatta in entrambi i casi, fa comunque una distinzione.
Chiedo cosa intendano con le equazioni che hanno scritto, nelle quali hanno invertito il segno di entrambe le coordinate. Una delle ragazze del gruppo spiega che avevano immaginato di porre un ipotetico asse delle x lungo la scanalatura. Dico che mi aspettavo che loro scegliessero di porre l'asse y nella scanalatura individuando i punti P e P' come tracciatori. Da quello che dicono successivamente risulta che non era chiaro a tutti che i punti P e P' nel grafico che accompagna la frase di Alberto fossero i tracciatori, solo una delle ragazze dice di avere dato questa interpretazione (in effetti io lo davo per scontato ma non era stato scritto da nessuna parte). Da quello che dicono (che non è per me del tutto chiaro) pare che abbiano scritto delle equazioni "*come se*" si fosse posto al centro del rombo (incontro delle due diagonali) un sistema di riferimento e le equazioni che vengono scritte sarebbero le relazioni che legano solo i vertici di tale figura. (**§3**) Quindi, in qualche modo, sembra che il significato delle equazioni, che per me doveva essere un legame fra i due punti tracciatori, sia diventato legame fra i vertici della figura (rombo).

che cosa fa la macchina?

Una delle funzioni della macchina è quello di costruire qualsiasi tipo di forma geometrica da entrambe le parti. Le figure che si ottengono sono simmetriche **(*6)** *rispetto alla scanalatura della macchina. Utilizzando questa macchina possiamo anche ottenere grafici con corrispondenti funzioni di vario tipo allo scopo di analizzarli (es: parabola, funz. Esponenziale, funzione logaritmica).*

Da un punto di vista pratico questa macchina può essere utilizzata per dimostrare/verificare le ipotesi/teorie fatte mediante altri strumenti.

Dall'intervista finale
Nell'intervista finale dicono che la macchina può sostituire gli strumenti classici per il disegno tecnico (riga, compasso, matita) e spiega con qualche esempio. Poi dicono che si possono disegnare due figure contemporaneamente, ovvero se si disegna da una parte si ha un disegno uguale (simmetrico) dall'altra.

Chiedo come possano tracciare un cerchio e lo fanno "*a occhio*" usando uno dei tracciatori, io osservo che comunque non è un cerchio esatto e chiedo come possano farlo. Dalla discussione che segue mi pare che non colgano la necessità di uno strumento preciso per tracciare il cerchio. Chiedo cosa mi dia in più questa macchina nel caso io tracci un cerchio "a occhio" invece che usando un compasso e mi dicono che con questa avrei anche un altro cerchio. Faccio notare che per tracciare un cerchio esatto mi serve comunque uno strumento specifico come il compasso.

Faccio una domanda a tutta la classe per sapere se era risultata chiara a tutti la vignetta con i tre personaggi colorati e rispondono di si (a parte un ragazzo che dice di averla capita dopo).

Sintesi del Filmato

Prima parte
In quanto segue, dopo i riferimenti numerici che abbiamo già descritto, è presente l'intervallo di tempo o il tempo al quale l'episodio si riferisce e reperibile, usando tale informazione, nell'allegato *Allegato6_ProtocRomboArtParte1* o nel filmato Prima parte (PrimoFilmato.mpg).

Dall'analisi del filmato si vede che inizialmente provano a capire perché Alberto, Chiara e Bruno dicano quello che dicono provando a disporsi proprio come rappresentato nella vignetta.

La posizione del corpo degli studenti nella vignetta (Alberto ce manipola la macchina, Bruno con le braccia conserte sul tavolo e Chiara con le braccia che sorreggono la testa) viene interpretata da uno degli studenti dopo un po' che lavorano e dice che "*non c'era ancora arrivato*", le altre invece pare che lo abbiano visto subito (T=7,03).

Inizialmente tutti concordano che l'affermazione più utile per capire ciò che fa la macchina è quella di Alberto, dicono che è più intuitivo **(*7)** (da T=10,01 a T=12,26). Discutono comunque sul fatto che siano utili entrambi. Ed uno studente dice, movendo contemporaneamente uno dei tracciatori che "*se uno non sa cosa vuole dire congruente, comunque questo lo capisce*". **(*7.1)** (T=12,43).

I primi componenti del gruppo che parlano esplicitamente di simmetria nella macchina sono le due ragazze che sono disposte come Alberto, una di esse muove entrambi i tracciatori contemporaneamente con entrambe le mani **(*8)**. (da T=18,22 a T=20,37).

Durante l'esplorazione della macchina non sembra che la scelta dei punti da muovere sia legata direttamente alla posizione. Dopo che mettono le mine il movimento della macchina si basa prevalentemente sul movimento dei tracciatori. **(§4)**

Durante l'esplorazione della macchina una studentessa, dopo avere fatto diversi tentativi aiutata da una compagna, accompagnando la frase con alcuni gesti delle mani dice "*vedi che viene la stessa*

cosa?", intendendo dire che le figure che si formano da un lato sono uguali a quelle che si formano dall'altro. Successivamente un'altra compagna collega questo fatto alla congruenza dei due triangoli.
Una alunna prova a fare delle misure con le dita, ma nessuno prova a misurare effettivamente e nel testo non viene richiesto.

Discutendo sulla frase di Bruno, ipotizzano inizialmente che Bruno dica che non capisce perché non sa cosa significa "*congruente*". Poi osservano che da qualunque parte si guardi la figura questa sarà uguale, quindi la frase di Bruno non dovrebbe dipendere dalla sua posizione. Poi provano di nuovo a simulare la posizione dei personaggi sulla vignetta e dicono che "*Bruno vede un quadrato*", mentre gli altri vedono un rombo, una ragazza dice subito che un quadrato non è altro che un rombo girato ma tuttavia continuano a fare questa distinzione nel seguito della discussione **(#4)** (da T=22,48 a T=28,14). Sono consapevoli che sia la stessa figura ma stanno cercando di capire come mai Bruno dica di non vedere e non capire.

Discutono sull'ipotesi, proposta da una delle componenti, che quello che i personaggi dicono dipenda dalla loro posizione rispetto alla macchina, anche se uno si chiede se dipenda dalla posizione rispetto al tavolo e rispetto la macchina, ed un altro componente chiarisce subito che la posizione che interessa è quella rispetto alla macchina **(*9)** (T=26,22). Uno sostiene che Chiara ed Alberto vedono la stessa cosa. Poi iniziano a discutere sul fatto che c'è differenza fra quello che vede Alberto e quello che vede Chiara, Chiara è "*dalla parte dove si vede bene il rombo*", ed Alberto dice "*se muovo quello dalla parte sinistra..*". Bruno "*vedendo un quadrato potrebbe non capire che ci sono i due triangoli congruenti*" **(#5)** (da T=25,11 a T=25,52).

Dunque pare che intendano che Alberto, Chiara e Bruno dicono cose diverse perché vedono la macchina da posizioni diverse, non arrivano comunque ad ipotizzare in maniera esplicita che tali differenze possano dipendere anche dalla posizione rispetto alla scanalatura (asse di simmetria) della macchina, anche se tale simmetria è già stata riconosciuta a questo punto del lavoro. Non propongono nemmeno alcuna ipotesi che si riferisca al diverso modo di agire dei personaggi della vignetta (Alberto che manipola, Chiara che osserva e riflette e Bruno che guarda con le braccia conserte).

Seconda parte
In quanto segue, dopo i riferimenti numerici che abbiamo già descritto, è presente l'intervallo di tempo o il tempo al quale l'episodio si riferisce e reperibile, usando tale informazione, nell'allegato *Allegato7_ProtocRomboArtParte2* o nel filmato Seconda parte (SecondoFilmato.mpg).

Nel seguire il ragionamento di Chiara sulla congruenza, aggiungono che anche l'area ed il perimetro saranno uguali. Dopo avere letto l'idea di Alberto, dicono che l'asse x rappresenta la scanalatura della macchina. Poi analizzano insieme le equazioni proposte da Alberto e dicono tutti di capirle. Quando arrivano alle equazioni proposte da Bruno nasce una lunga discussone sulla loro correttezza. Nella discussione si evidenziano alcuni errori nell'interpretazione dei punti con ascissa opposta, che vengono rappresentati come se avessero invece ordinata opposta. Infatti nel grafico disegnano un'altra figura a matita che occupa il 1° ed il 4° quadrante. Inoltre pare che in certi casi pensino che –x significa numero negativo, tuttavia negli esempi numerici che fanno per cercare di capire tale errore non è presente e –(-2) viene considerato uguale a 2. Ad un certo punto una ragazza dice che equazioni di Alberto e Bruno sono entrambe corrette perché verifica che la frase detta da Alberto (la x è opposta e la y è la stessa) è valida per entrambe . Una ragazza dice: "*ma x' è uguale a –x davvero, perché vedete..* ", poi fa un gesto con la matita indicando un punto e poi l'altro per fare notare il fatto che i due punti sono opposti. Ad un certo punto il ragazzo dice chiaramente, che tutto ciò che è al di sotto è –x, attribuendo apparentemente un significato opposto agli assi coordinati, ma nessuno dei componenti si accorge di questa contraddizione. Successivamente lo stesso alunno concorda che i punti siano simmetrici rispetto all'asse y. Una alunna dice che le equazioni di Alberto e Bruno sono entrambe corrette, successivamente l'alunno inverte la propria posizione e dice che quelle di Alberto sono scorrette e quelle di Bruno corrette perché rappresentano correttamente il fatto che, riferendosi ai punti del grafico –2=-2 (ovvero, se ho ben capito, in questo caso è sufficiente sostituire i valori delle x dei punti per vedere che sono uguali, mente con le prime equazioni sarebbe necessario scrivere 2=-(-2)). A questo punto una ragazza propone che una sia corretta analiticamente e l'altra graficamente ma non spiegano cosa significhi per loro.

Dall'intervista finale
Nell'intervista finale chiedo un chiarimento su questo punto. Da quello che dicono appare una certa difficoltà a considerare la seconda identità 2=-(-2) come equivalente alla prima –2=-2, qualcuna dice che è "*forzata..dal punto di vista grafico*", un'altra dice che comunque "*dobbiamo porre il (meno) due fra parentesi*". Un altro aggiunge che non gli è chiara questa distinzione proposta fra analitico e grafico ma pensa che la differenza che hanno colto dipenda dal fatto che in un caso è sufficiente mettere i valori delle ascisse del punto nell'equazione per vedere che sono uguali, nell'altro invece no (è necessario un cambiamento di segno). **#6**
Nell'intervista chiedo quali pensano che siano le equazioni corrette o se siano corrette entrambe le proposte. Dicono che secondo loro sono giuste entrambe ma la prima è più giusta in relazione alla figura proposta nel testo consegnato.

Non è chiaro agli studenti che cosa faccia la macchina, in effetti il testo non lo suggerisce in alcun punto, quindi arrivano a pensare che si debbano fare dei calcoli che coinvolgono anche il teorema di Pitagora e l'area anche se non spiegano bene per arrivare a cosa. La caratteristica che incorpora la macchina viene individuata (in qualunque modo si muove la macchina quello che viene tracciato da una parte viene tracciato simmetricamente anche dall'altra), ma non arrivano a pensare che debba essere dimostrata e che questo sia l'obiettivo dei personaggi del dialogo **(*10)** (da T=18,11 a T=33,29).

Anche nel rispondere alle domande finali della seconda parte non si pongono effettivamente il problema di definire in maniera esplicita ciò che la macchina fa. Questo influisce anche sulla domanda relativa alla dimostrazione ovviamente.

Nella seconda parte dicono che per dimostrare cosa fa è più utile il ragionamento sulla congruenza che fa Chiara perché è più intuitivo. Successivamente iniziano a giustificare quello che propone Alberto dicendo che il suo obiettivo è quello di trovare altre misure del triangolo con il teorema di Pitagora e trovare l'area. Poi, comunque, si chiedono "*chi ha detto che deve calcolare l'area?*".."*nessuno..noi*", quindi iniziano a chiedersi quale fossero le intenzioni di Chiara e di Alberto dato che i loro ragionamenti sono parziali. Poi discutono su quale asse debba rappresentare la scanalatura, un alunno sostiene che sia l'asse delle x, una alunna quello delle y **(*12)** (da T=22,08 a T=23,49). Successivamente ritornano alla domanda del testo e si accorgono che per capire il funzionamento della macchina il calcolo dell'area non serve, tuttavia successivamente nella stesura del loro testo continuano a ripetere che serve il calcolo dell'area. Una alunna dice, movendo la macchina, che per capire che i due triangoli sono congruenti basta muoverla.

Alla domanda "*Riuscite a dimostrarlo?*" dicono inizialmente che "*si vede* " che sono congruenti. **(#7)** (T=29,57), e che hanno la stessa altezza. Concludono che riescono a dimostrarlo intuitivamente. Una ragazza poi definisce le asticelle della macchina "*bracci*" della macchina **(*13)**

(T=31,14). Ritornano poi sulle equazioni di Alberto e Bruno dicendo che quella corretta dal punto di vista analitico è quella di Bruno mentre quella di Alberto lo è dal punto di vista grafico. Un alunno a questo punto chiarisce che l'equazione significa che i due punti sono simmetrici e non è tanto importante la questione dei segni delle coordinate (della discussione precedente). Poi inizia una lunga discussione su come interpretare le equazioni di Alberto e Bruno durante la quale provano a disegnare i punti ed usano anche la macchina per chiarirsi le idee.

Terza parte

In quanto segue, dopo i riferimenti numerici che abbiamo già descritto, è presente l'intervallo di tempo o il tempo al quale l'episodio si riferisce e reperibile, usando tale informazione, nell'allegato *Allegato8_ProtocRomboArtParte3* o nel filmato Terza parte (TerzoFilmato.mpg).
(continuazione nella giornata successiva)

Iniziano riprendendo la discussione su come valutare le equazioni proposte da Alberto e Bruno e si vede che ancora non c'è accordo. Riassumono dicendo che erano arrivati a dire che una era corretta analiticamente e l'altra graficamente, un componente dice di non essere d'accordo su tale distinzione, poi erano arrivati a dire che la prima (Alberto) era corretta e l'altra sbagliata. Quindi decidono che anche la y di un punto deve essere opposta alla y dell'altro e stabiliscono che nessuna delle due è corretta. In realtà dagli esempi che fanno in questa parte del dialogo pare che stiano ragionando sulle coordinate dei perni vincolati (nella scanalatura) e non stiano pensando ai tracciatori. Fino a questo punto non hanno ancora utilizzato la macchina.

Chiedo di esplicitare cosa faccia la macchina e di provare a dimostrarlo in maniera dettagliata.

A questo punto riprendono la macchina, cancellano i vecchi disegni per farne dei nuovi (a me è sfuggito di fare utilizzare altri fogli in modo da avere anche quelli vecchi).

Prima propongono che serva a costruire una figura geometrica uguale..poi dicono: "*non posso costruire qualsiasi tipo di figura geometrica*".."..*no infatti*"..secondo loro un cerchio non si può..un quadrato si..poi facendo delle prove tornano a pensare che si possano costruire anche altre figure geometriche (ho avuto l'impressione che qualcuno si riferisse alle figure che il sistema articolato può assumere e non quelle che si possono tracciare, durante il dialogo tuttavia il discorso si focalizza sulle figura che si riescono a tracciare). Dicono poi che la principale funzione della macchina è quella di costruire qualsiasi tipo di figura geometrica. Durante la discussione qualcuno dice che le figure che si formano sono identiche, qualcuno dice simmetriche e qualcuno dice speculari **(*14)** (da T=16,32 a T=17,34). Poi una ragazza aggiunge che costruisce figure simmetriche, ed assieme arrivano a dire che saranno simmetriche rispetto alla scanalatura della macchina. Durante la discussione che segue, una ragazza osserva che una delle funzioni possibili potrebbe essere quella di disegnare le due figure contemporaneamente. Questa frase potrebbe rivelare che fino a questo punto la ragazza aveva una idea funzionale di una figura che viene disegnata seguendo l'altra, in qualche modo la figura che viene tracciata col movimento della mano è la principale e l'altra segue a causa della struttura della macchina.

Dall'intervista finale Nell'intervista finale chiedo un chiarimento su questa osservazione (disegnare contemporaneamente le figure). Spiegano che intendevano proprio il fatto di poter usare la macchina per fare un disegno da una parte e contemporaneamente costruire il simmetrico dall'altra.

Chiedono di consultare il testo di geometria (io avevo detto in precedenza che era disponibile se ne avessero avuto bisogno). Fino a questo punto il principale schema d'uso utilizzato è quello di

Alberto, ovvero l'uso di uno dei tracciatori con una mano (anche se non è l'unico schema utilizzato) **(*15)** (da T=14,36 a T=21,51).
Consultando il testo si chiedono "*ma i triangoli* (della macchina) *hanno i lati congruenti..ma anche gli angoli?*", discutendo concludono che devono avere anche gli angoli congruenti. Il ragazzo dice che la macchina può servire anche a fare altre cose, ad esempio a disegnare grafici e comincia a disegnare dei grafici di funzioni e fa alcune osservazioni su quello che accade nei due lati, inizialmente pensa che se un grafico è esponenziale l'altro (il simmetrico) sarà logaritmico **(#8)** (T=23,02). Durante la discussione una ragazza riformula questo fatto dicendo che se una è crescente l'altra sarà decrescente. Il ragazzo inizia ad usare la macchina in maniera non coerente con il modello del rombo, con un movimento che è permesso a causa della imperfezione tecnica, ovvero degli spazi presenti fra i perni e la scanalatura che permettono un piccolo movimento su un arco di cerchio quando i due perni sono prossimi. Chiedendosi perché hanno creato questa macchina una componente propone "*forse per fare a meno di squadra e righello*". Gli altri componenti non sono d'accordo. Nella discussione seguente ritornano a vedere l'utilità della macchina nella sua forma, usando le asticelle come righe.
Ipotizzano che tale macchina sia usata da un matematico per fare esperimenti. Qualcuno ipotizza che anche matematici come Pitagora siano arrivati ai loro teoremi usando delle macchine.
Poi dicono che può essere utile per verificare delle ipotesi /teorie, invece di fare tanti disegni si può usare a livello pratico questa macchina. Scrivono che può servire a verificare ipotesi fatte mediante altri strumenti. Una componente osserva che al di là di questo dovrà servire anche a qualcosa di pratico. Ad un certo punto intervengo facendoli ritornare sul fatto che la macchina permette di disegnare in maniera simmetrica (come del resto avevano già capito) ma li spingo a provare a dimostrarlo. Una ragazza commenta che muovendo i tracciatori "*vedo che ho la stessa cosa..me ne accorgo*" **(*16)** (T=41,12). Iniziano poi a pensare a come fare ma non c'è più abbastanza tempo.

Seconda sessione

Protocolli scritti dei gruppi non filmati

Gruppo 1

Intervista filmata: Discussione1_2 (SecondaDiscussione1.MPG)

Protocollo scritto (Allegato11_ProtocolliScritti, Gruppo1, Seconda Sessione)

Nei fogli che hanno usato con la macchina sono presenti diverse linee ma non si vedono chiaramente figure geometriche.

Alla prima domanda : "*Descrivete come è fatta la macchina che vi è stata consegnata*", rispondono:

"*La macchina è differente da quella precedente* **(*16.1)** *l'asse di scorrimento è spostato, non più centrale e i perni su cui scorre la macchina non sono più posti sui vertici del quadrilatero ma sono bensì posti su, più o meno, un terzo del lato. A causa delle nuove posizioni dell'asse dello scorrimento e dei perni, la figura composta non è più una congruenza di triangoli ma è formato da un triangolo ed un pentagono*."

Dall'intervista finale
Dalla mia successiva intervista risulta che hanno valutato "*a occhio*" le proporzioni delle due parti nelle quali il perno divide il lato.

Alla seconda: "*Spiegate cosa fa, secondo voi, la macchina*", rispondono*:*

"I perni tracciano comunque figure simmetriche da entrambi i lati. L'area dentro alla quale è possibile tracciare figure è più ampia, di conseguenza c'è maggiore libertà grafica." **(*17)**

Dall'intervista finale
Dall'intervista successiva risulta che con simmetria intendono il fatto che scrivendo o disegnando qualcosa da una parte comunque viene riprodotto qualcosa anche dall'altra (ovvero c'è ancora una dipendenza di un tracciatore dall'altro). Notano che se si traccia una linea da una parte, viene tracciata una linea anche dall'altra ma non della stessa dimensione. **(*18)**

Per quanto riguarda la terza domanda*: "Pensando alla macchina studiata negli incontri precedenti, provate a pensare a quali idee siano utili anche per l'analisi della macchina che vi è stata consegnata oggi."*, rispondono*:*

(*19)

"Le idee di Chiara di considerare l'altezza delle due figure non può essere presa in considerazione in quanto le altezze non sono più uguali, ma quella del pentagono è il doppio di quella del triangolo." **(*20)**

Dall'intervista finale
Risulta che hanno fatto delle misure per verificare che le dimensioni effettivamente (non specificano quali) raddoppiano.

Non rispondono alla quarta domanda:*" Provate a dimostrare matematicamente quello che fa la macchina"*

Alla quinta domanda*: "Quale è il modo migliore di rappresentarla fra quelli proposti nella pagina seguente? Perché?"*, rispondono*:*

"La rappresentazione migliore può essere la figura A o la figura B" ma non spiegano la loro risposta.

Dall'intervista finale
Dall'intervista seguente risulta che hanno scelto la A perché durante lo studio della macchina l'avevano posta in diverse posizioni ma alla fine avevano scelto la posizione nella quale la scanalatura era orientata come un asse x di un piano cartesiano ipotetico, quindi la loro prima scelta è stata la A. Poi riflettendoci (considerando P e P') hanno individuato anche la B come risposta possibile. **(*21)**

Non rispondono alla sesta domanda*: "Per quanto riguarda la dimostrazione di ciò che la macchina fa, spiegate quale fra le particolari rappresentazioni proposte nella tabella può essere più utile."*

Gruppo 3

Intervista filmata: Discussione4_2 (SecondaDiscussione4.MPG)

Protocollo scritto (Allegato11_ProtocolliScritti, Gruppo3, Seconda Sessione)

Nei fogli che hanno usato con la macchina sono presenti linee ed alcune figure geometriche tracciate in maniera irregolare (presumibilmente senza l'aiuto di un righello).

Prima domanda:

"*La macchina ha tutti i lati uguali. La scissura del legno non divide più la figura in due parti uguali* **(*21.1)** *e quindi non passa più nei vertici destro e sinistro, ma interseca in due punti i due lati, quindi la retta divide la figura in due parti non uguali. La figura in sé è un rombo, la scissura del legno crea due figure: un triangolo ed un pentagono*"

Seconda domanda:

"*La macchina serve per realizzare graficamente e verificare teoremi matematici*"

Terza domanda:

"*A differenza della macchina precedente* **(*21.2)** *l'asse di scorrimento è posizionato lateralmente, per questo motivo non è possibile prendere in considerazione le altezze delle figure perché queste non sono più uguali*"

Non rispondono alla quarta domanda

Quinta domanda : "*Il modo migliore per rappresentarla è il grafico C*", ma non spiegano il motivo

Dall'intervista finale Nell'intervista dicono, in seguito alla mia domanda, che durante il loro lavoro la macchina era posizionata con la scanalatura complanare rispetto all'asse dei loro corpi (alla maniera rappresentata dalla figura B o C). Chiedo perché abbiano scelto la C e mi dicono che credono sia dovuto al fatto che la macchina era posizionata in quel modo. **(*22)** Una alunna spiega che secondo lei potrebbero essere giuste tutte le rappresentazioni. Un'altra sostiene invece che sono migliori la A e la C perché negli altri casi è presente un piano cartesiano che rende necessaria la definizione di " *punti specifici come coordinate mentre in A e C siamo più liberi*". Una terza componente del gruppo dice che vanno tutti bene e dipende solo da come si gira la macchina. **(§§)**

Non rispondono alla sesta domanda

Gruppo 4

Intervista filmata:

- Discussione3_2 (SecondaDiscussione3.MPG);
- Discussione5_2 (SecondaDiscussione5.MPG).

Protocollo scritto (Allegato11_ProtocolliScritti, Gruppo4, Seconda Sessione)

Prima domanda:

"Esattamente come nell'altra macchina **(*22.1)** *il piano cartesiano è diviso in due parti con quella sinistra che è il doppio di quella destra. I due tracciatori sono posti anche in questo caso alle estremità della macchina, rispettivamente uno a destra ed uno a sinistra. I 4 lati (braccia) sono congruenti, posti in maniera parallela e opposta l'uno all'altro. Le due braccia destre rappresentano entrambe, in un terzo della loro lunghezza, due ulteriori tracciatori, posti sulla linea che delimita le due parti del piano".* **(*23)**

Seconda domanda:

"*Questa macchina ci consente di disegnare su due fogli differenti, però è più statica rispetto alla macchina precedente perché a livello dell'asse è fissata. Di conseguenza, nel disegnare le figure geometriche sui fogli, esse sono meno simmetriche.*" **(*24)**

Dall'intervista finale Dalla mia intervista successiva risulta che non è molto chiaro cosa intendessero con "*più statica*", e, a mio avviso, non riescono a chiarire bene cosa intendessero con meno simmetriche.

Terza domanda:

"*Il funzionamento di questa macchina, rispetto alla macchina precedentemente studiata* **(*24.1)**, *è esattamente lo stesso, nel senso che anche questa viene utilizzata per creare figure geometriche utilizzando uno strumento preciso, con l'unica differenza che le due figure rappresentate saranno differenti, questo perché l'asse che divide la parte destra e la parte sinistra del piano è spostato verso destra e quindi la parte sinistra del piano sarà maggiore rispetto a quella destra, questa differenza si noterà anche nelle figure che si verranno a creare, le quali saranno più estese nella parte dove il piano è più ampio.*"

Dall'intervista finale Nell'intervista li stimolo a chiarire da cosa dipenda il fatto che le figure non sono più simmetriche (da una parte sono più grandi), dato che da quello che hanno scritto sembrano attribuire questo fatto alla diversa suddivisione della base di legno della macchina. In effetti non sembrano avere

chiaro il motivo di questo diverso comportamento e giungono a capire (almeno sembra) che la differenza dipenda dalla diversa posizione dei perni solo in seguito alle mie domande abbastanza mirate. **(#9)**

Non rispondono alle domande successive.

Protocolli del gruppo filmato

Gruppo 2

Intervista filmata: Discussione2_2 (SecondaDiscussione2.MPG)

Nei fogli si vedono tracciate due figure (un triangolo ed rettangolo)in maniera irregolare e relative le figure trasformate. E' pure presente una linea spezzata tracciata con un righello.

Protocolli orali (filmati):

- Allegato9_ProtocDelaunayParte1;
- Allegato10_ProtocDelaunayParte2.

Protocollo scritto integrato alla sintesi del filmato (Allegato11_ProtocolliScritti, Gruppo2, Seconda Sessione)

Prima parte
In quanto segue, dopo i riferimenti numerici che abbiamo già descritto, è presente l'intervallo di tempo o il tempo al quale l'episodio si riferisce e reperibile, usando tale informazione, nell'allegato *Allegato9_ProtocDelaunayParte1* o nel filmato Prima parte2 (PrimoFilmatoSeconda.MPG).

Iniziano ad analizzare la macchina usando anche un righello per misurare in che punto è la scanalatura, successivamente una alunna muove la macchina tenendo uno dei due tracciatori. Una ragazza muove le macchina tenendola per i due perni (non tracciatori) con entrambe le mani, poi il ragazzo le usa tenendola per entrambi i tracciatori, dato che vuole disegnare con entrambi. La macchina è posizionata in modo da avere la scanalatura parallela al lato più lungo del tavolo (rettangolare) nel quale sono seduti, e sono seduti lungo i bordi più lunghi. **(*25)** (da T=0,35 a T=2,35).

La prima cosa che notano, per rispondere alla prima domanda, è che la scanalatura non è più nella metà della base **(*25.1)** (da T=2,35 a T=3,55). Notano, anche misurando, che è posta a circa un terzo della lunghezza.

Mentre scrivono le prime considerazioni l'alunno muove la macchina tenendo i due tracciatori e l'alunna che ha di fronte la muove (in altri momenti) tenendo invece i due perni che sono sugli altri due vertici del rombo di metallo.

Iniziano poi ad analizzare le figure che vengono formate dai lati del rombo e la scanalatura, indicando con le mani i diversi lati. Chiamano pentagono una delle due figure perché ha cinque lati e l'altra un triangolo. Chiariscono poi che stanno parlando delle figure che sono formate dalle braccia **(*25.2)** (T=6,36) e dalla scanalatura della macchina e non delle figure tracciate dalla macchina.

Iniziano poi a discutere su alcune somiglianze con la macchina precedente **(*27),** (da T=7,47 a T=11,07), una alunna posiziona una matita ed un righello sulla diagonale del rombo parallela alla scanalatura. Fino a questo punto non hanno ancora fatto osservazioni sulla posizione dei perni che si muovono nella scanalatura. Una alunna parla ancora delle asticelle come di "*bracci*" **(*27.1)** (T=11,07). Misurano poi i lati per verificare che sono uguali. Concludono che dalla "*semplice osservazione della macchina*" e "*senza muoverla*" si formano certe figure, anche se in realtà l'hanno mossa abbastanza. Discutono sulla funzione delle asticelle di legno poste sotto le aste metalliche e avanzano diverse ipotesi. Una alunna propone di guardare come si muove la macchina, un'altra dice che il meccanismo è lo stesso dell'altra macchina ed accompagna le parole con il movimento della macchina. Poi una alunna si chiede quali fossero i perni che stavano nella scanalatura e si accorgono che erano quello posti sui vertici. **(*28)** (T=14,42). Mentre si accordano su come scrivere questo fatto nella risposta, una alunna si accorge che i due perni sono anche posizionati alla stessa distanza dai vertici. Una ragazza verifica con il righello questo fatto. Tornano a discutere sull'utilità delle asticelle di legno, un componente conclude che non hanno una valore matematico.

Quindi alla prima domanda scrivono:

"*La nuova macchina che ci è stata assegnata non presenta più una scanalatura centrale* **(*28.1)**. *L'elemento che notiamo immediatamente è che la scanalatura ha una posizione diversa: non è più al centro. Di conseguenza se poniamo la scanalatura come un lato ipotetico , le figure geometriche che possiamo notare dalla semplice osservazione della macchina non raffigurano più due triangoli ma bensì un triangolo ed un pentagono. I perni che sono posizionati e che scorrono all'interno della scanalatura non sono più posti in due dei quattro angoli dei bracci della struttura metallica , ma in due lati della stessa.*"

Considerano quindi la seconda domanda.

Iniziano a muovere la macchina tracciando delle linee. Una studentessa si chiede "*Se facciamo un disegno qua* (una parte del piano) *lo stesso disegno viene anche qua?* (l'altra parte)". Notano che cambiano le dimensioni ed una alunna dice "*Cambiano le dimensioni per forza perché questo è più grande* (una parte di piano) *e questo è più piccolo* (l'altro)". **(#10)** (da T=20,20 a T=21,12).
Non hanno ancora individuato la ragione per cui le dimensioni sono diverse. Poi una alunna dice "*..i bracci* **(*29)** (da T=21,12 a T=21,22) *sono uguali ma questi* (i perni) *sono qui* (indica la posizione nella quale si trovano sui lati) *invece che qui* (indicando i vertici)". Quindi individuano un'altra differenza che potrebbe originare la differenza di dimensioni.

Nella discussione su cosa fa la macchina arrivano a dire che mentre la prima creava due figure simmetriche di uguali dimensioni, questa crea due figure simmetriche ma di dimensioni diverse, una più grande ed una più piccola. **(*30)** (da T=21,22 a T=24,47). Una alunna ad un certo punto si chiede che cosa succeda invece se muove solo uno dei vertici e prova a muoverlo. (Pare allora che non sia chiaro per tutti il fatto che quello che la macchina fa dipende dalla struttura e non dal modo con cui la si muove) **(#11)** (da T=24,47 a T=25,35).

Alla seconda domanda rispondono come segue:

"*Come la precedente macchina rappresentava due figure simmetriche e di uguali dimensioni, notiamo invece in questa macchina che vengono create due figure simmetriche ma di diverse dimensioni: una più piccola dell'altra. Il principio di funzionamento è uguale a quello precedente.* **(*31)**
Esempi: abbiamo provato a realizzare un triangolo in entrambe le parti della macchina . Abbiamo notato che nella parte di piano più ampia il triangolo risulta isoscele, mentre nella parte opposta del piano il triangolo risulta equilatero . Un altro esempio possiamo ottenerlo rappresentando un rettangolo. "

Dall'intervista finale Nella mia intervista successiva dicono che con la parola simmetrica intendevano speculare, sono d'accordo con la mia riformulazione della loro frase "*c'era simmetria anche se le figure non erano uguali*". Per quanto riguarda il rettangolo dicono che avevano notato che risultava ribaltato (quindi sono rimasti convinti di questa idea anche se era stata contestata da alcuni membri del gruppo). **(#11.1)**

Consegno il secondo foglio (domande 3 e 4). Una alunna si chiede "*cosa si intende per matematicamente?*". L'alunno del gruppo (è d'accordo anche una alunna) propone che questo significhi utilizzare il piano cartesiano. Una alunna propone che si debba arrivare ad una equazione. Chiedono i materiali che hanno prodotto negli incontri precedenti ma non li ho portati (e non avevo previsto di consegnarli) **(§4.2)** (T=29,26).
Discutendo sulle differenze con l'analisi dell'altra macchina, una alunna dice che anche nell'altra le due figura non erano sempre congruenti e fa alcuni esempi che non sembrano molto chiari **(*31.1)** (da T=28,00 a T=31,04).
Discutono sul fatto che un'idea che hanno già usato per la macchina precedente e che usano anche per questa è osservare la forma della struttura formata dai bracci della macchina, senza guardare le figure che formano tracciando disegni. **(*32)** (da T=33,49 a T=38,56).

Alla terza domanda scrivono:

"*Un'osservazione può esserci utile per l'analisi di questa macchina, alla luce di quanto osservato tramite lo strumento precedente* **(*32.1)**, *è la seguente: dal semplice movimento dei bracci le figure che vediamo non sono congruenti tra loro.*"

Dall'intervista finale Dall'intervista successiva risulta che con "*dal semplice movimento dei bracci*" intendevano dire osservando le diverse figure (configurazioni) che la macchina forma quando la si muove in diverse posizioni. **(#12)**

Da una mia richiesta di chiarimento risulta che si stanno riferendo alle figure formate dalla struttura della macchina e non alle figure tracciate dalla macchina.

Seconda parte
In quanto segue, dopo i riferimenti numerici che abbiamo già descritto, è presente l'intervallo di tempo o il tempo al quale l'episodio si riferisce e reperibile, usando tale informazione, nell'allegato *Allegato10_ProtocDelaunayParte2* o nel filmato Seconda parte2 (SecondoFilmatoSeconda.MPG).

Continuando a discutere sulle differenze con la macchina precedente, insistono sul fatto che le due parti formate dalla scanalatura e la struttura metallica sono diverse, hanno angoli e lati diversi. Osservano comunque che due angoli sono uguali nelle due figure (quelli formati dai lati che convergono sui tracciatori) ed anche i due angoli sugli altri due vertici. **(*33)** (da T=0 a T=3,09).
Si chiedono di nuovo cosa significhi "*dimostrare matematicamente*", e suggeriscono che significhi usare il piano cartesiano. Io intervengo per stimolarli a dare una descrizione più precisa di quello che fa la macchina, altrimenti non sarà sensato provare a dimostrarlo. **(#13)** (da T=4,21 a T=4,53). Decidono di analizzare le figure che ottengono usando la macchina per tracciarle. Uno studente propone che le figure siano una più grande dell'altra ma con le stesse proporzioni. Iniziano a tracciare figure tenendo alternativamente i due tracciatori con entrambe le mani e, in altri momenti, tenendone e movendone solo uno. **(*34)** (da T=0 a T=3,09). Tracciano alcuni triangoli di diverse dimensioni e poi misurano i lati delle figure con un righello, notano che in un caso il triangolo tracciato da una parte è equilatero mentre quello che si è formato dall'altra non lo è. Una alunna propone che il fatto dipenda dalla dislocazione dei perni che scorrono che sono ad una certa distanza dai vertici (indica con la mano). **(#14)** (da T=9,02 a T=10,12). Una alunna propone poi di provare anche con questa macchina a tracciare un grafico da una parte per vedere come diventa dall'altra e fanno una serie di tentativi. Poi tornano all'idea di tracciare figure geometriche. Iniziano con un rettangolo: notano che da una parte si forma un rettangolo e dall'altra un rettangolo che è quasi un quadrato, l'alunno dice che quindi le proporzioni sono diverse a differenza di quello che aveva pensato inizialmente. **(*35)** (da T=12,40 a T=12,45). Una alunna nota anche che hanno sbagliato a scrivere che si formano figure simmetriche, ma il ragazzo dice (facendo gesti con la mano e successivamente dicendo che è "*come se ci fosse uno specchio*") che rispetto alla scanalatura sono simmetriche (Quindi sembra che il significato di simmetrico non sia condiviso e chiaro fra gli studenti). Una ragazza aggiunge che " *è uno specchio diverso perché se da una parte è più grande e dall'altra più piccolo..*".**(*36)** (da T=12,59 a T=13,12). Poi decidono di rifare le costruzioni delle figure geometriche ed iniziano dal rettangolo. Una ragazza propone che da una parte ci sia un ribaltamento della figura (tipo una rotazione di un angolo retto) e scartano l'ipotesi facendo le misure dei lati. Ma la ragazza insiste che potrebbe essere ribaltato ma più piccolo (quindi il fatto che le misure non siano uguali non serve a confutare la sua ipotesi). Non continuano su questa linea di pensiero ma disegnano altre figure. **(#14.1)** (da T=15,08 a T=17,27). Osservano che uno dei due triangoli "*pare equilatero*" e dicono che questo appare nella parte più piccola del piano (ma non si accorgono che potevano avere disegnato il triangolo equilatero dall'altra parte). Tornando a discutere dei rettangoli una ragazza (la stessa di prima) insiste sul fatto che il rettangolo viene ribaltato. L'alunno dice che le misure non corrispondono. Dicono che è normale perché le proporzioni sono cambiate, una ragazza dice che sono più grandi ma non sono proprio doppie (qualcuno aveva proposto che fossero doppie). In ogni caso non arrivano a capire chiaramente che le dimensioni vengono cambiate solo in una direzione e restano invariate nell'altra. **(#15)** (da T=20,14 a T=20,46).

Non rispondono alla quarta domanda.

Visto il tempo mancante propongo di passare alle ultime domande.

Iniziano a posizionare la macchina a seconda delle figure proposte per vedere quale è la migliore. Una ragazza commenta "..*quale è il modo migliore..quindi ce ne è solo uno..*".**(§5)** (T=22,01). Poi iniziano a discutere e dicono che in certi casi i perni della scanalatura non dividono nelle proporzioni giuste (rispetto alla macchina reale) i segmenti che rappresentano i lati. (Questo aspetto non era stato da me preso in considerazione, penso che sia stato un errore nella progettazione dell'esperimento) **(§5.1)** (da T=22,22 a T=24,25). Questo li porta a considerare come casi possibili

solo A e B. Ad un certo punto, dopo avere letto che i tracciatori vengono rappresentati con i punti P e P', il ragazzo dice che deve essere per forza la B. (In questo caso sembra che qualche fattore non esplicito influisca sulla scelta..dato che la differenza è solo nell'orientazione della scanalatura e nella presenza di un sistema cartesiano nel caso B) **(*37)** (da T=24,25 a T=26,35). A questo punto intervengo per chiarire che non dovrebbero considerare le proporzioni date dai perni sulle figure, non era mia intenzione differenziare le rappresentazioni in questo modo (anche se in realtà non ci avevo pensato). **(§6)** (da T=26,35 a T=27,14). Confrontano le rappresentazioni ruotando la macchina, l'alunno prima sostiene che la rappresentazione migliore è la D poi cambia idea e propone la B. **(*38)** (da T=27,14 a T=29,34).
Dato che una ragazza insiste sul fatto che "*ci deve essere un solo modo*", dico che ce ne possono essere anche diversi che possono essere equivalenti. Discutono il fatto che le due possibili rappresentazioni migliori per loro, la B e la D, sono equivalenti dato che la differenza sarebbe solo quella di interpretare la scanalatura come asse delle x o delle y. A questo punto l'alunno nota che cambiando l'interpretazione degli assi può essere giusta anche la A **(*39)** (da T=31,49 a T=32,32). Ad un certo punto della discussione accennano al fatto che possano andare tutte bene. **(#16)** (T=34,47). Una ragazza propone di fissare il significato della scanalatura (asse x oppure asse y) e poi analizzare le varie rappresentazioni. Ritorna anche l'idea che quelle più giuste siano quelle con il piano cartesiano. Il ragazzo dice che la B è più precisa. Poi una delle alunne prova ad analizzare dettagliatamente i casi andando ad associare le lettere ai diversi punti della macchina, prende la macchina e la ruota ma sceglie sempre di posizionarla con la scanalatura complanare all'ipotetico asse passante per il proprio corpo (nei casi in cui compare tale asse verticale anche nella rappresentazione), conclude che le rappresentazioni migliori sono B e D perché hanno già un piano cartesiano e a seconda di come si gira la macchina sono valide entrambe. **(#17)** (da T=34,47 a T=42,42).

Dopo avere scritto la risposta alla quinta domanda:

"*Secondo noi i metodi migliori per rappresentare la macchina sono la B e la D perché hanno un piano cartesiano ben definito nel quale sono raffigurati i bracci della figura. Sono validi entrambi a seconda di che asse si assegna alla scanalatura: se la intendiamo come asse y , la B è più corretta, se la intendiamo come asse x, la D è più corretta.*" **(#18)**

Dall'intervista finale
Nella mia intervista l'alunno giustifica la scelta di B dicendo che era quella che meglio rappresentava la macchina, sia per la posizione dei perni che per la posizione che aveva la macchina mentre la studiavano (in realtà mi pare che questa sia più una impressione sua dato che durante il lavoro hanno cambiato spesso la posizione della macchina).

Tornano ad occuparsi della domanda tre e quattro (la dimostrazione) ma non riescono ad avanzare molto per mancanza di tempo.

Non rispondono alla sesta domanda.

Sintesi dei risultati e valutazione delle ipotesi di ricerca

Partiamo dall'analisi precedente per trarre alcune conclusioni relativamente alle ipotesi che erano il focus della sperimentazione. Le ipotesi sono:

I2.1: *è possibile distinguere due tipi di metafore (intuitiva o incorporata e formale/culturale)con caratteristiche distinguibili (la prima spontanea e non consapevole la seconda non spontanea e che richiede consapevolezza);*

I2.3: *se la metafora è di tipo culturale allora la sua produttività dipende dall'essere esplicita o implicita nel testo e la produttività è maggiore nel caso di metafore esplicite.*

Sintetizziamo la nostra analisi facendo riferimento alle metafore analizzate nel capitolo 5 (paragrafo 2.4) e consideriamo le parti dei protocolli, sia scritti che filmate, nei quali abbiamo trovato elementi utili alla valutazione delle ipotesi di ricerca. I riferimenti a tali parti sono messi fra parentesi e si riferiscono ai punti precedentemente analizzati. Per la valutazione facciamo riferimento alle seguenti tabelle nelle quali abbiamo definito i criteri che legano le metafore attese alle ipotesi di ricerca.

I2.1: *è possibile distinguere due tipi di metafore (intuitiva/incorporata o formale/culturale)con caratteristiche distinguibili (la prima spontanea e non consapevole la seconda non spontanea e che richiede consapevolezza).*			
	Metafore attese	Testi	Valutazione
M1	*metafora della simmetria del corpo (intuitiva o incorporata)*	1A, 1B, 2A, 2C;	Uso di particolari termini che fanno riferimento al corpo umano. Preferenza per l'orientazione della scanalatura *verticale* della macchina in riferimento al corpo umano (complanarità con l'asse di simmetria del corpo eretto).
M2	*metafora dello schema d'uso della macchina* (*culturale/formale*)	1A, 1B, 2A;	La preferenza di un particolare schema d'uso è seguita da una particolare ma tematizzazione del funzionamento della macchina collegabile allo schema d'uso.
M3	*similitudine con la prima macchina(culturale/formale)*	2A, 2B.	La forma della seconda macchina spinge gli studenti a paragonarla alla prima.

Tabella 1

I2.3: *se la metafora è di tipo culturale allora la sua produttività dipende dall'essere esplicita o implicita nel testo e la produttività è maggiore nel caso di metafore esplicite.*			
	Metafore attese	Testi	Valutazione
M2	*metafora dello schema d'uso della macchina:*	1A, 1B, 2A	L'influenza che lo schema d'uso utilizzato ha (secondo la nostra ipotesi) sulla matematizzazione successiva, avviene solo dopo la lettura della parte 1B, dove il collegamento (metafora) appare in maniera più esplicita.
M3	*similitudine con la prima macchina:*	2A, 2B	L'analogia con la prima macchina avviene solo dopo che viene letto testo nel quale viene esplicitamente formulato tale

			collegamento.

Tabella 2

M1) metafora della simmetria assiale del corpo

Per gli elementi da considerare per la valutazione facciamo riferimento anche alla Tabella 1 del capitolo 5 (par. 2.4).
In diverse occasioni gli studenti utilizzano parole (metafore che definiamo secondarie) per descrivere la macchina o sue parti che fanno pensare alla presenza di metafore sia di tipo intuitivo che culturale.

-Per esempio l'uso del termine "*braccia*" o "*bracci*" per indicare le asticelle sia della prima macchina (*4,*5,*13) che della seconda (*23,*29, *25.2, *27.1).

In questi casi tale termine non era presente nei testi proposti e non era stato utilizzato durante l'introduzione all'uso della macchina, quindi è emerso spontaneamente durante il lavoro di gruppo con il testo e la macchina matematica. Una possibile interpretazione di tale uso (che compare in momenti diversi e in gruppi diversi) è proprio come metafora secondaria che deriva da una metafora primaria di tipo intuitivo/incorporato (ipotesi I2.1). Come abbiamo già osservato, proponiamo che questa sia una metafora di tipo intuitivo o incorporato, nel senso che permette di collegare alcune caratteristiche della macchina con caratteristiche del corpo umano, in particolare l'uguaglianza delle lunghezze e la simmetria rispetto ad un asse. Ci sembra che in questo caso la funzione della metafora sia quella di evidenziare alcune caratteristiche della macchina. Quindi in qualche modo la metafora sembra servire all'analisi dell'artefatto.

-Un altro esempio, che non avevamo previsto nell'analisi a priori, è la produzione di frasi come: "*si influenzano a specchio*"(*1), "*..figure speculari*" (*14 riferita alle figure formate dalla prima macchina), *"come se ci fosse uno specchio" e "uno specchio diverso"* (*36 riferita alla seconda macchina).

Anche in questo caso la produzione delle frasi è stata spontanea, non erano presenti tali termini nei testi e non se ne è fatto uso durante l'introduzione all'uso delle macchine. Anche in questo caso proponiamo che tali espressioni siano metafore (o similitudini) secondarie che derivano da metafore primarie nel senso della definizione proposta, dato che permettono di individuare una analogia fra il comportamento della macchina e quello di uno specchio (ipotesi I2.1). In particolare, data l'origine dei domini, ci pare che si possa parlare di metafora di tipo intuitivo (le conoscenze dei domini source, corpo umano e specchio, sono conoscenze acquisite in maniera intuitiva, non formale). La funzione di questa metafora (o similitudine) pare quella di individuare un dominio concreto nel quale alcune caratteristiche siano le stesse del primo, in modo da di identificare alcuni fatti e facilitarne la comprensione.

Per quanto riguarda l'ipotesi di una preferenza da parte degli studenti nella scelta della direzione della scanalatura, o della sua rappresentazione della macchina, riconducibile ad una metafora di tipo intuitivo/incorporato, abbiamo individuato alcuni fatti:

- Alcuni gruppi usano la macchina con la scanalatura in una direzione complanare con l'asse ideale del busto umano eretto (*3, *23), in alcuni questa scelta si ritrova anche nella rappresentazione scelta (*22);

- Nel gruppo che è stato filmato, nel caso della seconda macchina, un alunno fa alcune scelte che potrebbero derivare da una preferenza per questa orientazione (*37, *38), anche se è possibile che altri fattori possano avere influito (per esempio il punto dove è collocato il perno nella scanalatura), successivamente lo stesso alunno accetta anche una rappresentazione nella quale la scanalatura è perpendicolare alla precedente (perpendicolare al piano passante per l'asse immaginario di simmetria del corpo eretto) (*39). Nello stesso gruppo utilizzando anche la macchina con la direzione perpendicolare (*25);

- In altri gruppi la scelta è invece diversa, ovvero la direzione scelta per la scanalatura è perpendicolare al piano passante per l'asse immaginario di simmetria del corpo eretto (*21).

Non è evidente una chiara preferenza di una direzione rispetto all'altra, anche se è chiaro che, nel caso della disposizione della macchina, la scelta di ciascun gruppo ricade sull'una o sull'altra e non ci sono scelte intermedie. Non si sono evidenziate metafore che facessero pensare ad un collegamento fra la scanalatura della macchina (che nel primo caso coincideva con l'asse di simmetria della stessa) ed il corpo umano, come ci aspettavamo dall'analisi a priori.

M2) metafora degli schemi d'uso

Per quanto riguarda una ipotizzata dipendenza fra gli schemi d'uso preferiti dagli studenti per l'esplorazione ed analisi della macchina e il seguente metodo di analisi matematica della stessa non abbiamo potuto fare osservazioni utili perché nessuno dei gruppi è arrivato ad una analisi matematica (che in certi casi poteva semplicemente consistere nella dimostrazione dei fatti osservati). Comunque abbiamo osservato nel gruppo filmato una preferenza per lo schema d'uso che abbiamo chiamato funzionale (*7, *7.1, *15). Il gruppo, comunque, utilizza diversi schemi d'uso. Inoltre la simmetria incorporata nella prima macchina viene individuata, parlandone esplicitamente, dalle due studentesse che sono disposte, rispetto alla macchina, come Alberto (*8). Quindi non possiamo affermare che ci sia un collegamento fra lo schema d'uso e il tipo di analisi matematica che, come ipotizzato nell'analisi a priori, poteva essere interpretata come metafora.

Quindi non abbiamo elementi per valutare l'ipotesi I2.3 ovvero l'attesa metafora culturale fra schemi d'uso e metodo scelto di analisi matematica della macchina.

M3) simmetria con la prima macchina

Per quanto riguarda la presenza di similitudini alla prima macchina implicite nella seconda (o nel testo) e l'uso delle similitudini esplicite nel testo e del loro effetto, possiamo fare alcune osservazioni:

1- Presenza di riferimenti spontanei alla prima macchina (parte 2A) (similitudine):

   - viene messa a confronto con la prima macchina evidenziandone alcune differenze di forma e costruzione (*16.1, *21.1, *25.1, *28.1, *29) o di funzionamento (*17, *24, *28, *30);

   - viene comparata alla prima macchina evidenziando le caratteristiche comuni ma descrivendo anche le differenze (*23, *31).

2- Analisi della similitudine fra le due macchine a seguito di un riferimento esplicito del testo (parte 2B):

- vengono evidenziate idee utili relativamente alla prima macchina e che non sono utilizzabili in questo (*20, *32);

- vengono evidenziate idee utili relativamente alla prima macchina e che sono utilizzabili in questo (*32, *32.1);

- vengono evidenziate differenze nella forma e costruzione della macchina che impediscono di utilizzare alcune idee valide per la prima macchina (*21.2);

- vengono evidenziate sia le caratteristiche in comune alle due macchine che alcune delle differenze (*24.1, *33).

Vediamo che il confronto con la prima macchina avviene sin dall'inizio (parte 2A), quindi senza che sia proposto esplicitamente. Pare quindi che l'effettiva somiglianza delle due macchine sia già sufficiente a spingere a trovare similitudini e differenze, sia per la forma che per il funzionamento. In questo senso possiamo proporre che la seconda macchina permetta, per la sua forma ed il suo funzionamento, una similitudine di tipo culturale alla prima macchina (ipotesi I2.1). Anche in questo caso distinguiamo fra la similitudine primaria (la macchina con la sua struttura) e la similitudine secondaria (le frasi o espressioni prodotte dagli studenti a causa della similitudine primaria). Consideriamo la similitudine di tipo *culturale* perché il dominio source è rappresentato dalle conoscenze sulla macchina, che derivano dallo studio di tali macchine, tramite una attività di insegnamento-apprendimento e non tramite conoscenze intuitive o embodied. Le osservazioni evidenziano che tale similitudine diventa produttiva indipendentemente dal suo essere esplicita nel testo, quindi questo fatto non può essere utilizzato per valutare l'ipotesi I2.3.
Tale confronto viene poi sviluppato in seguito alle domande esplicite (parte 2B) anche se, come si vede dai protocolli, emergono difficoltà nell'analisi quantitativa (matematica) delle differenze di funzionamento fra le macchine.

Risultati della valutazione

Ipotesi I2.1

Nel complesso concludiamo che si sono evidenziate metafore o similitudini con caratteristiche tali da dire che ci sono alcune evidenze favorevoli all'ipotesi I2.1.
Naturalmente l'ipotesi I2.1 è stata formulata in maniera generale, le nostre osservazioni si riferiscono a casi particolari.

Ipotesi I2.3

Per quanto riguarda l'ipotesi I2.3 pensiamo che non ci siano sufficienti evidenze favorevoli, servirebbero più casi da confrontare.

Appendice 2: i pantografi usati nell'esperimento

In questa appendice diamo qualche dettaglio sulla matematica che è incorporata nelle due macchine usate nel secondo esperimento. Utilizziamo le conoscenze di geometria che ci possiamo aspettare da studenti delle scuole superiori (triennio). Per maggiori dettagli, anche storici, rimandiamo al testo di Bartolini Bussi e Maschietto (Bartolini Bussi, Maschietto, 2006) e al sito del Laboratorio delle Macchine Matematiche: www.macchinematematiche.org.

Pantografo per la simmetria assiale

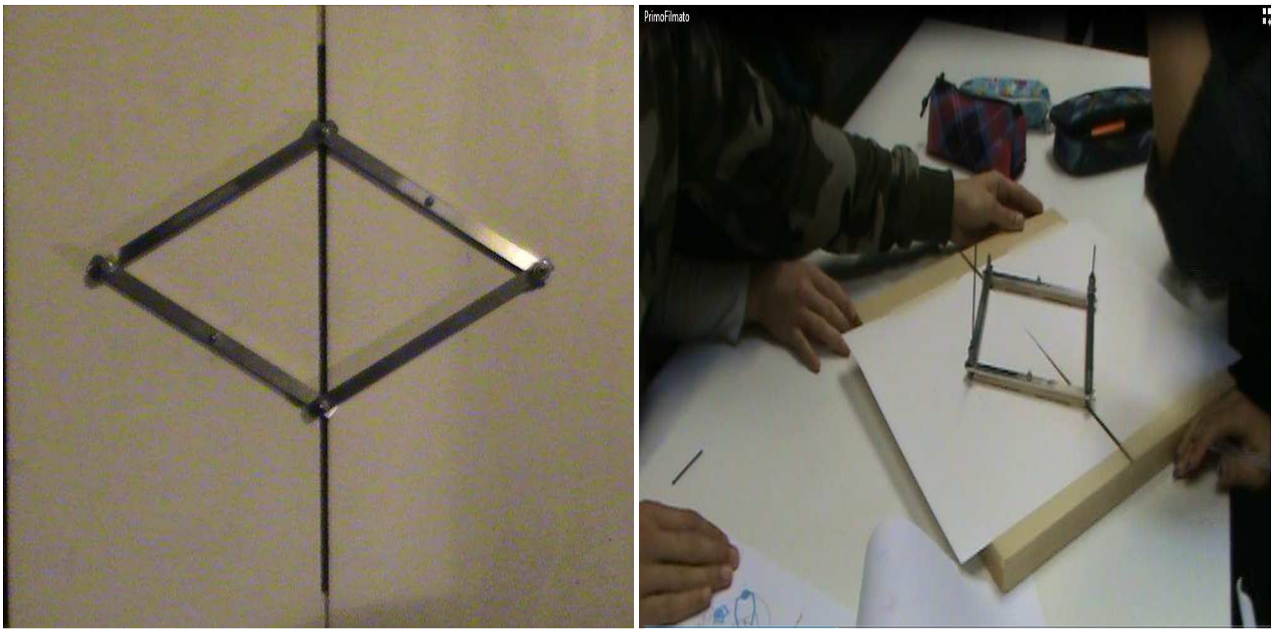


Figura 1: Rombo articolato

La simmetria assiale

Facendo riferimento alla figura 2 seguente possiamo individuare diverse vie per giungere alla dimostrazione che i due punti (tracciatori, indicati in figura con le lettere C e D) sono sempre in posizione simmetrica rispetto all'asse passante per AB. Ne proponiamo due:

1) Per ipotesi le 4 asticelle che formano la figura sono di uguale lunghezza, quindi il quadrilatero ABCD è un rombo. Se assumiamo come fatto noto (dalla geometria euclidea del biennio) che le diagonali di un rombo, ovvero i segmenti AB e CD, si tagliano reciprocamente a metà, allora avremo che i quattro triangoli interni sono tutti congruenti, per cui i due segmenti CH e DH sono congruenti e inoltre sono le altezze, dato che i due ancoli alla base sono uguali (per la congruenza dei triangoli) e quindi ciascuno di mezzo angolo piatto (90°). Questo basta per concludere che i due punti sono sempre simmetrici rispetto all'asse passante per AB. Questo è il metodo proposto in (Bartolini Bussi, Maschietto, 2006, p. 31).

2) Si potrebbe partire dai criteri di congruenza dei triangoli senza dare per scontato il fatto che le diagonali del rombo si tagliano a metà (questo lo si ricava dal ragionamento).
   Per dimostrare che D e C sono simmetrici rispetto all'asse per AB, dobbiamo mostrare che le due altezze CH e DH' hanno lo stesso piede, ovvero che i due punti H ed H' coincidono. Inoltre dobbiamo dimostrare che i due segmenti (le altezze) CH e DH' sono congruenti.
   -Partendo dall'ipotesi di congruenza dei quattro segmenti (lati del rombo), tracciamo il segmento AB e le due altezze dei triangoli ABC (altezza AH) e ADB (altezza DH'). Vediamo che il triangolo ABC è isoscele (due lati uguali), quindi i due angoli alla base, CAH e CBH, sono congruenti. Inoltre il triangolo ABC viene diviso in due triangoli rettangoli in H, che sono AHC e BHC.

   -Tali triangoli sono congruenti, infatti hanno due lati congruenti (CH in comune e AC e BC congruenti per ipotesi) e l'angolo fra essi compreso congruente. Quest'ultimo fatto segue dalla congruenza degli angoli CAH e CBH, dal fatto che CHA e CHB sono retti e dal teorema sulla somma degli angoli interni di un triangolo.
   Concludiamo che i due triangoli sono congruenti, pertanto i due segmenti AH e BH sono congruenti.

   - Se ripetiamo lo stesso ragionamento con il triangolo inferiore ADB, concludiamo che i due segmenti AH' e BH' sono congruenti, ma questo significa che i due punti H ed H' devono coincidere, dato che sono posti alla metà dello stesso segmento.
   - I due triangoli isosceli ACB e ADB sono congruenti dati che hanno tre lati congruenti, quindi avranno anche le altezze relative allo stesso lato congruenti, da questo segue che CH e DH' devono essere congruenti (li abbiamo costruiti come altezze dei due triangoli).

   Per quanto precede i due punti C e D sono simmetrici rispetto all'asse per AB. (Inoltre dalle considerazioni fatte segue anche che il segmento CD è una delle due diagonali e che le due diagonali si tagliano reciprocamente a metà.)

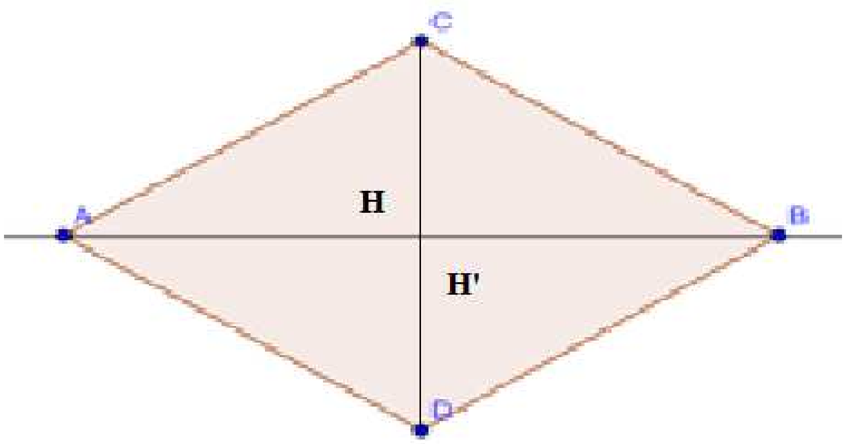


Figura 2

Biellismo di Delaunay

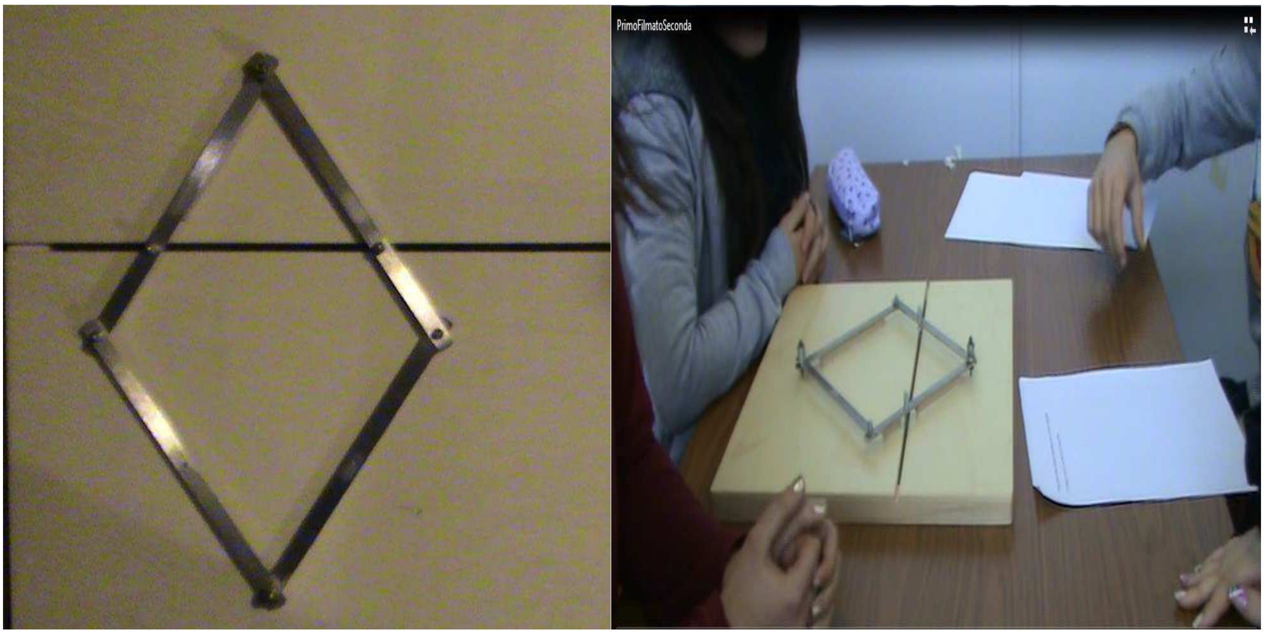


Figura 3: Biellismo di Delaunay

Lo stiramento

Una possibile dimostrazione che la trasformazione che lega i due punti P e P’ è uno stiramento si trova in (Bartolini Bussi, Maschietto, 2006, p. 31).

Ne proponiamo una un poco differente, nella quale facciamo riferimento alla figura 4 seguente.

Dobbiamo dimostrare che :

- il segmento PP’ è ortogonale alla retta passante per DC;
- il rapporto fra le distanze PH e P’H è costante.

Per ipotesi abbiamo che i segmenti AP, AP’, BP, BP’ sono congruenti, inoltre la macchina è costruita in modo che anche i due segmenti AD e BC siano congruenti fra loro (e, per differenza, anche DP’ e CP’). Nella figura prolunghiamo i lati PA e PB in modo da intersecare sulla retta i punti A’ e B’.

-Dimostriamo che i due triangoli DP’C e B’PA’ sono simili.

Infatti il triangolo DP’C è, per ipotesi, isoscele, ed avrà i due angoli alla base, P’DC e P’CD, congruenti. Saranno quindi fra loro congruenti, e congruenti a P’DC e P’CD, anche i due angoli opposti ai vertici C e D, ovvero gli angoli A’DA e B’CB. Inoltre, per ipotesi (il quadrilatero è un rombo), la retta passante dai punti P e B è parallela alla retta passante per i punti P’ e A, quindi gli angoli P’DC e CB’B sono congruenti (alterni interni). La stessa cosa può dirsi per gli angoli DA’A e P’CD.

Ne consegue che il triangolo B’PA’ è isoscele e simile al triangolo DP’C.

-Inoltre i due triangoli B’BC e A’AD sono isosceli e congruenti perché hanno due lati congruenti (AD e BC) , gli angoli BCB’ e ADA’ sono congruenti e gli angoli CBB’ e DAA’ sono anch’essi congruenti (usando il fatto che la somma degli angoli interni è un angolo piatto).

- Mostriamo che il rapporto $\frac{P'H}{PH}$ è costante. Per questo indichiamo con l la lunghezza delle quattro asticelle uguali. Dalla similitudine dei triangoli DP’C e B’PA’e dalla congruenza dei triangoli BCB’ e ADA’abbiamo:

$$\frac{PH}{P'H}=\frac{PA'}{P'D}=\frac{l+AA'}{P'D}=\frac{l+AD}{P'D}=\frac{l+l-P'D}{P'D}=\frac{2l-P'D}{P'D}$$

Evidentemente la quantità a destra dell’equazione è una costante che dipende dalla scelta di l e di P’D. Dunque il rapporto resta costante.

-Resta da dimostrare che il segmento PP’ è sempre ortogonale al segmento DC (o alla retta passante per tali punti). Per fare questo vediamo che il triangolo PAP’ è isoscele (per costruzione), quindi di due angoli alla base APH e DP’H sono congruenti. Abbiamo già dimostrato che i due angoli AA’D e P’DH sono congruenti. Quindi, per differenza possiamo ricavarci gli angoli:

DHP’=180-DP’H-P’DH

analogamente

DHP= 180-AA’D-APH

Quindi DHP’=DHP e, pertanto, sono entrambi angoli retti. Perciò il segmento PP’ è ortogonale al segmento DC.

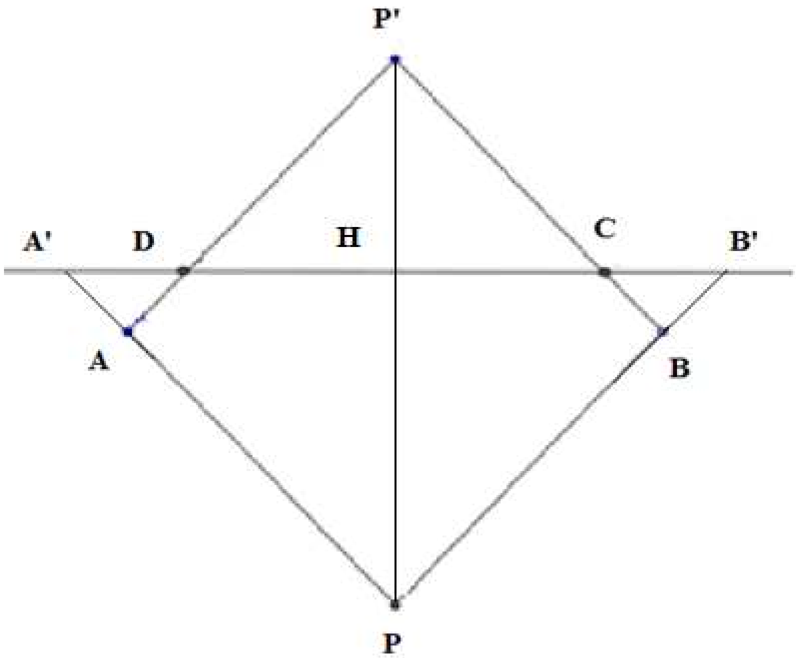


Figura 4

Capitolo 6

In questo ultimo capitolo cerchiamo di sintetizzare il percorso compiuto sia in termini di risultati, sia in termini di problemi o punti critici incontrati o ancora da risolvere, e proponiamo alcune possibili future direzioni di indagine. Proponiamo, inoltre, alcune riflessioni su episodi degli esperimenti che, anche se non direttamente coinvolti nella valutazione delle ipotesi di ricerca, ci sono parsi interessanti per discussione delle domande di ricerca che hanno guidato questo lavoro e per la valutazione dell'integrazione della metafora nella Teoria della Mediazione Semiotica proposta nel capitolo 3.

1. Sintesi del percorso seguito e dei risultati

In questo lavoro ci siamo orientati con due domande di ricerca (capitolo 1 par. 5.4):

1. Da quali elementi dipende la produttività ai fini didattici di una metafora?

2. Quali possono essere le conseguenze in termini di misconcezioni ed ostacoli che le analogie associate alle metafore possono generare?

alle quali abbiamo aggiunto una terza domanda (capitolo 3 par. 4.2):

3. Come può l'insegnante utilizzare in maniera produttiva e consapevole le metafore presenti (effettivamente o potenzialmente) durante l'attività di insegnamento-apprendimento?

Nel corso della ricerca, sia di approfondimento teorico che sperimentale, ci siamo mossi su due piani: abbiamo cercato di affinare e proporre, da un lato, alcuni strumenti teorici, che ci sono serviti per meglio comprendere ciò di cui ci volevamo occupare, dall'altro lato abbiamo proposto alcune ipotesi di ricerca, costruite in coerenza con le domande generali di ricerca e gli strumenti teorici che ci siamo creati e che abbiamo studiato con due esperimenti.
Per formulare ipotesi di ricerca più precise abbiamo dapprima cercato una definizione di metafora e di analogia che tenessero conto tanto delle concezioni presenti in letteratura quanto delle nostre opinioni in proposito, cosa che abbiamo fatto nel primo capitolo. Nel paragrafo conclusivo del primo capitolo abbiamo proposto una definizione sia di analogia che di metafora in modo da distinguerle e, al contempo, evidenziarne la connessione. Pensiamo che questa definizione sia un primo contributo di questa ricerca, anche se da sottoporre certamente ad altri studi ed alla discussione con chi ne abbia interesse. Abbiamo poi mostrato, nel secondo capitolo, come i concetti di ostacolo e misconcezione si possano legare alla metafora ed alla analogia, dato che, da un lato, particolari metafore possono generare misconcezioni o rappresentare veri e propri ostacoli, e, dall'altro lato, si possono utilizzare metafore ed analogie per superare misconcezioni. Nel secondo capitolo abbiamo cercato di analizzare il concetto di ostacolo e proporne una definizione, che è coerente con il significato che si trova in letteratura in Didattica della Matematica e delle Scienze, ma ne mette maggiormente in risalto la dipendenza dal contesto socio-culturale, questo con l'obiettivo di poterla sfruttare nel quadro teorico che abbiamo adottato. Abbiamo anche distinto la misconcezione dall'ostacolo cercando di arrivare a concetti validi sia per la Didattica della Matematica che delle Scienze. Nel terzo capitolo abbiamo presentato il quadro teorico nel quale si è

mossa, e si muove, la nostra ricerca: la Teoria delle Mediazione Semiotica. Abbiamo discusso l'integrazione di questa teoria con i concetti introdotti nei primi due capitoli (metafora, analogia, ostacolo e misconcezione), discutendone la coerenza su alcuni principi teorici potenzialmente critici. La metafora è stata inquadrata, nel processo di insegnamento-apprendimento, come un particolare segno che può servire al collegamento fra due domini di conoscenza e che può essere sfruttato dall'insegnante per introdurre e sviluppare significati matematici. Per fare questo ci siamo appoggiati al modello proposto da Bartolini Bussi e Mariotti che abbiamo cercato di sviluppare indicando alcune modalità secondo le quali le metafore possono comparire (capitolo 3, par. 3). Le specifiche ipotesi di ricerca che abbiamo cercato di studiare con i due esperimenti (capitoli 4 e 5) sono derivate dalla prima di queste tre domande generali, infatti hanno riguardato caratteristiche di metafore abbastanza specifiche e la loro produttività. In particolare nel primo esperimento abbiamo indagato la dipendenza della produttività metaforica da: tipo di testo (dialogato o impersonale), tipo di metafora (implicita o esplicita), azione dell'insegnante (porre o non porre l'attenzione su di una metafora). I risultati ottenuti ci hanno portati a formulare altre ipotesi di ricerca e a proporre una possibile distinzione fra due forme di metafora che abbiamo chiamato, *intuitiva o incorporata*, la prima e *culturale/formale* la seconda. Le nuove ipotesi, volte come le prime a rispondere alla prima domanda di ricerca, sono state studiate con il secondo esperimento. Nel corso della progettazione dell'esperimento, per chiarirne la logica, abbiamo proposto una distinzione fra due tipologie di metafore che abbiamo chiamato *primarie* e *secondarie*. Per quanto riguarda le ipotesi di ricerca abbiamo mostrato come, fra le prime che avevamo formulato, solo per la prima abbiamo trovato alcune evidenze (e soltanto per uno dei tre problemi proposti), analogamente, per le seconde abbiamo trovato alcune evidenze solo per la prima ipotesi. Vogliamo comunque ribadire il carattere estremamente specifico dei casi studiati in relazione non solo alle domande di ricerca, ma alle stesse ipotesi che sono state formulate in maniera abbastanza generale. Questo, per noi, significa che non possiamo trarre conclusioni sicure dal nostro lavoro che interpretiamo soprattutto come lavoro formativo per l'autore e di avviamento ad alcune delle problematiche presenti nelle ricerche di più grande respiro (creazione e studio di strumenti teorici, formulazione di ipotesi, progettazione di esperimenti con relativa valutazione delle ipotesi..). Con questo non intendiamo sminuire i risultati o le idee che abbiamo sviluppato durante il percorso di ricerca, ma li interpretiamo come risultati dai quali potremmo partire per ulteriori indagini. Nei prossimi paragrafi cerchiamo di affrontare alcune questioni che si legano più direttamente con la seconda e la terza domanda di ricerca che, come abbiamo visto, non sono state direttamente considerate per la formulazione delle ipotesi di ricerca. Lo facciamo anche considerando alcune delle osservazioni compiute nei due esperimenti.

Prodotti indiretti della ricerca

Sia durante la progettazione dei due esperimenti che durante le fasi di esecuzione e di valutazione abbiamo avuto la possibilità di mettere alla prova alcune idee ed alcune metodologie che si sono rivelate utili e che hanno consentito un buon funzionamento degli esperimenti. Noi consideriamo queste idee e metodi come un prodotto indiretto della ricerca, dato che non facevano parte degli obiettivi principali e crediamo che siano utilizzabili anche in altri esperimenti (nostri futuri o di altri). Fra questi risultati/idee consideriamo:

- la suddivisione in più livelli delle fasi di analisi dei protocolli (sia scritti che filmati);
- l'uso di una codifica dei gruppi e dei problemi nel primo esperimento;
- l'uso di codifiche gruppo-task poste sui banchi per velocizzare la registrazione;
- l'uso del tempo per identificare le produzioni degli studenti sia nel primo che nel secondo esperimento.

Anche le osservazioni che abbiamo fatto relative ad alcuni difetti degli esperimenti, si possono considerare dei risultati indiretti che possono essere utili, in particolare quelle relative all'attenzione da porre alla progettazione dei task (capitolo 4, par. 4.3 e capitolo 5 par.4.3) come quelle sulla forma macchina e la scelta nomi dei punti o di altri oggetti matematici dei testi).

2. Critiche alle definizioni, alle ipotesi di ricerca e possibili riformulazioni

Le difficoltà che abbiamo incontrate in alcune parti della valutazione indicano, crediamo, che la concettualizzazione che abbiamo costruito (caratteristiche delle metafore, loro classificazione e distinzione, ipotesi di ricerca) necessita di miglioramenti. Pensiamo che ci sia ancora del lavoro da fare sia per quanto riguarda le definizioni di analogia e metafora e sia per quanto riguarda il raffinamento (o riformulazione) di altre ipotesi di ricerca.

Per quanto riguarda la definizione di analogia, pensiamo che dalla definizione sia rimasto escluso un criterio di significatività dell'analogia stessa, ovvero ciò che rende una analogia qualcosa di sensato per chi la individua ed utilizza. Questo aspetto non può essere colto da una definizione che si focalizzi solo sugli aspetti di mappatura fra elementi e fra relazioni, ma dovrebbe spingersi oltre, e cercare di cogliere gli aspetti semantici dell'analogia, che sono quelli che vengono utilizzati dagli individui per la comprensione ed il ragionamento analogico. A noi pare chiaro che un simile obiettivo sia molto oltre la portata di una ricerca limitata nel tempo come questa.

Per quanto riguarda la definizione di metafora (e similitudine), pensiamo che si possano migliorare alcuni aspetti. In particolare, come abbiamo notato nel capitolo 5 (paragrafi 2.3 e 4.3) andrebbe chiarito in che modo si può considerare una metafora anche un processo, una azione o una sequenza di azioni quali uno schema d'uso di una macchina o una sequenza di gesti accompagnati da parole (Allegato3_SintesiProtocolliPerClasse, gruppo G1_3). La definizione che abbiamo dato comprende molti casi, (pensiamo che sia giusto così, dato che, per noi, una metafora è tutto ciò che consente il collegamento iniziale fra due domini di conoscenza) e per ciascuno ci pare che possa essere utilizzato il concetto di segno, che utilizziamo nel capitolo 3. Ci pare che considerare anche processi, azioni o sequenze di azioni come metafore renda problematico considerarli come segni. In che senso un processo può essere un segno? Forse in questo caso la metafora non può essere considerata anche un segno?

Per quanto riguarda le prime ipotesi (capitolo 4) pensiamo che si potrebbero ridefinire in modo da rendere più chiara la loro verifica e potrebbero essere studiate in maniera statistica su un numero maggiore di casi individuali.

Per quanto riguarda le ipotesi riformulate (capitolo 5), come abbiamo già scritto, crediamo che si dovrebbe proporre in maniera più precisa una differenza fra metafore intuitive o incorporate e metafore culturali/formali. Inoltre, se distinguiamo due forme diverse di metafora, come ipotizzato nei capitolo 4 e 5, sarà necessaria una ulteriore indagine per capire meglio cosa può essere e che forme può assumere una *espressione* nel caso della metafora che abbiamo definito *incorporata o intuitiva*.

Per quanto riguarda le ipotesi di ricerca riformulate (capitolo 4, par. 5.6) pensiamo che la formulazione dell'ipotesi I2.1 sia buona e che possa essere approfondita con ulteriori indagini (che possono servire anche ad individuare criteri più chiari per distinguere le due forme ipotizzate di metafora). Per quanto riguarda le altre crediamo che possano essere indagate dopo avere dato criteri più stringenti per la distinzione fra le due forme di metafora. Inoltre nell'ultima ipotesi (I2.5) crediamo che, per una eventuale ulteriore indagine, si debba chiarire in maniera operativa e stringente come individuare la dipendenza dalle "*altre variabili dipendenti dal solo testo*". Inoltre, nelle definizioni (capitolo 4 par. 5.2) che abbiamo proposto di *metafora intuitiva o incorporata* e *metafora culturale/formale*, dovremmo chiarire che ruolo gioca la *consapevolezza* dell'individuo nell'uso di tali conoscenze. Questo potrebbe portare a riformulare la prima ipotesi (I2.1).

Quindi, da un lato, abbiamo definito alcuni concetti, che abbiamo utilizzato per formulare ipotesi di ricerca, successivamente gli esperimenti e le riflessioni su tali ipotesi ci hanno portato a rivedere le ipotesi e, in parte, anche i concetti che abbiamo utilizzato. Dall'altro lato la definizione (e ridefinizione) di concetti ha influito sulla riformulazione delle ipotesi di ricerca.

Noi vediamo in questo progressivo raffinamento reciproco di ipotesi di ricerca da un lato e concetti dall'altro, una istanza di un fenomeno generale che pare caratteristico del modo con cui gli esseri umani concettualizzano (usano e definiscono concetti) e mettono in relazione tali concetti (fanno ipotesi e le mettono alla prova). Si tratta di un ciclo (di ricerca?) nel quale i concetti e le relazioni fra concetti (ipotesi di ricerca) vengono costruiti insieme, secondo un'idea che ci sembra coerente con la metodologia della Ricerca per l'Innovazione (Arzarello, 2000; Arzarello, Bartolini Bussi, 1998).

3. Difesa della proposta avanzata come un utile strumento per interpretare alcuni fenomeni didattici e migliorare il processo di insegnamento-apprendimento della matematica

Pensiamo che l'insieme delle idee che abbiamo proposto in questa ricerca (la definizione operativa che abbiamo avanzato di metafora ed analogia, l'integrazione della metafora nel quadro teorico della mediazione semiotica, le distinzioni fra diversi tipi di metafora), possano essere utili nelle attività di insegnamento-apprendimento, anche se la verifica di alcune delle domande di ricerca che abbiamo proposto durante il lavoro ha avuto un successo solo parziale.

In questo paragrafo proviamo ad utilizzare la definizione proposta per interpretare alcuni esempi tratti da protocolli degli studenti raccolti durante le sperimentazioni che abbiamo compiuto ed analizzato nei capitoli precedenti. Tenendo come riferimento il modello della Mediazione Semiotica (capitolo 3, par. 2.3) cerchiamo di chiarire il possibile ruolo dell'insegnante, la funzione delle metafore e il loro potenziale semiotico (Salvi, *submitted*).

3.1 Interpretazione di espressioni comparse negli esperimenti come metafore

In questa sezione discutiamo alcuni episodi verificatisi durante i due esperimenti cercando di interpretare alcune produzioni (verbali, gestuali..) degli studenti come metafore. Cerchiamo di metterne in evidenza le potenzialità didattiche per l'insegnante (il potenziale semiotico). Crediamo che alcune di queste metafore possano anche originare misconcezioni e proviamo ad immaginare alcune possibilità, comunque consapevoli che questo punto andrebbe indagato, più opportunamente, in maniera sperimentale.

Flusso come velocità e volume come distanza

Durante il primo esperimento, per affrontare il problema relativo allo svuotamento di un recipiente, in alcuni gruppi utilizzano nel testo gli stessi simboli utilizzati per trattare problemi sulla velocità di corpi in movimento. Alla domanda "*che tipo di grandezza è il rapporto litri/minuti?*", alcuni studenti rispondono che è "*tipo una velocità*" o la considerano una velocità (Allegato3_SintesiProtocolliPerClasse, G2_2: P2_Ipr_Mi, G5_1: P1_Ipr_NM), in altri casi dicono che il volume è "*come uno spazio*" (G2_2), oppure interpretano e ragionano sul volume come se fosse una distanza (G2_1: P1_Dia_NM). Pensiamo che si possa parlare di metafore (o forse in certi casi di similitudini) dato che le espressioni permettono di individuare analogie fra due domini, anche se in molti casi queste analogie non sono esplicitate dagli studenti che, come si evidenzia dall'analisi dei protocolli, sembrano utilizzarle in forma implicita. In alcuni casi la metafora serve per costruire esplicitamente una analogia che viene utilizzata dagli studenti per giustificare il loro processo risolutivo (G5_5: P2_Dia_Me).

La funzione di tali metafore per gli studenti, nei casi in cui non sono state direttamente introdotte tramite i testi (in forma esplicita) o dallo sperimentatore, può essere quella di esprimere e quindi comunicare (nel testo oppure oralmente) alcuni concetti nuovi in termini di concetti che gli studenti vedono come vicini (il flusso dell'acqua o di un fluido assomiglia al movimento di un corpo rigido). Non ci è parsa una funzione rappresentativa pienamente sviluppata, dato che gli studenti non ci sono parsi completamente consapevoli delle ragioni per le quali usavano tali termini o tali espressioni (metafore). Il compito dell'insegnante può essere quello di cogliere tali metafore e guidare gli studenti a sviluppare analogie che aiutano a risolvere il problema. Come abbiamo mostrato nell' Appendice2Cap4, dalla metafora che lega il moto di deflusso del liquido al moto di un punto su di un segmento, è possibile arrivare ad una soluzione del primo problema, nella quale sono coinvolte conoscenze sia matematiche che fisiche.

Parti di un artefatto come parti del corpo

Nel secondo esperimento (prima sessione), nella descrizione della macchina consegnata (rombo articolato) diversi gruppi si riferiscono alle asticelle che compongono la macchina con il termine "*braccia*", come abbiamo scritto nel capitolo 5 (par.4.1) (vedere Appendice1Cap5, riferimenti *4, *13, *23, *25.2, *27.1, *29). In questo caso proponiamo che questa sia una metafora nel senso che permette di collegare alcune caratteristiche della macchina con caratteristiche del corpo umano, in particolare l'uguaglianza delle lunghezze e la simmetria rispetto ad un asse. Ci sembra che la funzione della metafora, in questo caso, non sia quella di rappresentare ma quella di evidenziare alcune caratteristiche della macchina. Quindi in qualche modo la metafora sembra servire all'analisi dell'artefatto. Inoltre ci sembra che l'uso di tale termine da parte degli studenti non sia interpretabile come un uso consapevole di un termine tecnico, sia per il tipo di formazione non tecnica degli studenti, sia per la spontaneità di tale uso manifestata durante le attività da vari gruppi, sia per le risposte che hanno dato, nelle interviste finali, alle domande sul motivo dell'uso di tale termine. Inoltre si può osservare che anche un termine tecnico come "*braccio meccanico*" potrebbe avere un'origine metaforica. Anche questa può essere considerata una metafora, nel senso che permette di collegare alcune caratteristiche della macchina con caratteristiche del corpo umano. I domini che vengono messi in corrispondenza sono entrambi concreti; uno è quello del corpo umano e l'altro quello della macchina. Nella possibile analogia le braccia umane corrispondono alle asticelle della macchina, l'asse di simmetria della macchina corrisponde all'asse di simmetria del corpo umano, la relazione "*avere la stessa lunghezza*" è la stessa nei due domini. In questo sembra che la metafora possa utilmente indicare l'uguaglianza delle lunghezze e la simmetria rispetto a un asse in analogia, appunto, con le braccia umane. Dobbiamo comunque aggiungere che dalle interviste successive ai gruppi, domandando la ragione dell'uso di tali termini, non abbiamo ricevuto risposte che facessero pensare ad un uso consapevole dei significati da noi indicati. In questo caso una funzione potenziale della metafora potrebbe essere quella di indicare alcune caratteristiche della macchina e, quindi, di essere potenzialmente utile all'individuazione di contenuti matematici dell'artefatto. L'insegnante può cogliere queste espressioni e svilupparne il senso matematico arrivando a parlare di segmenti congruenti o di simmetria.

Analogia fra artefatti

Ancora nel secondo esperimento, alcuni gruppi descrivono quello che viene fatto dalla macchina consegnata utilizzando frasi quali : "*..le parti della macchina si influenzano a specchio*", "*..le figure formate sono speculari*" oppure "*..è come se ci fosse uno specchio*"**,** come abbiamo scritto nel capitolo 5 (par.4.1) (vedere Appendice1Cap5, riferimenti *1, *14, *35, *36). Anche in questo caso ci pare che le frasi siano metafore nel senso della definizione proposta, dato che permettono di individuare una analogia fra il comportamento della macchina e quello di uno specchio.
In questo caso la possibile analogia mette in relazione gli oggetti e le immagini formate dallo specchio con le posizioni dei tracciatori della macchina, la superficie dello specchio con l'asse di simmetria della macchina, e la relazione "*apparire alla stessa distanza dalla superficie dello specchio*" corrisponde alla relazione "*essere alla stessa distanza dall'asse di simmetria*". I domini sono entrambi concreti e lo sviluppo dell'analogia può consentire agli studenti, eventualmente con la guida dell'insegnante, di focalizzare e formalizzare le conoscenze matematiche che giustificano l'analogia: congruenza di segmenti e angoli, congruenza dei triangoli, simmetria. In questo caso, come nel precedente, la funzione della metafora (o similitudine) non pare essere quella di individuare un secondo dominio per rappresentare il primo, ma quella di individuare un dominio concreto più conosciuto nel quale alcune caratteristiche siano le stesse del primo. Ci sembra che una funzione potenziale possa essere quella di identificare alcuni fatti e facilitarne la comprensione. Sia dall'analisi dei protocolli scritti che dall'analisi dei filmati, abbiamo evidenziato che in alcuni casi l'uso dei termini sopra descritti come metafore, è stato seguito o accompagnato dall'uso del termini matematici "simmetria" o "simmetrico", e questo potrebbe corroborare l'ipotesi sulla funzione di queste metafore. Il ruolo dell'insegnante, relativamente alla comparsa di questa metafora, può essere quello di cogliere gli aspetti impliciti dell'analogia esistente fra comportamento degli oggetti e le loro immagini in uno specchio piano da un lato e il comportamento della macchina dall'altro, sfruttando l'analogia per sviluppare un discorso più

matematico (se la cosa è possibile si può anche allargare il discorso per discutere il comportamento fisico dello specchio piano e collegarlo alla simmetria assiale).

Gesti come metafore

Nel capitolo 1 (par 5.3) abbiamo mostrato come i gesti possano essere considerati, in certi casi, metafore. In questa sezione proviamo ad interpretare come metafore alcuni gesti che gli studenti hanno prodotto, accompagnati da parole, durante le sperimentazioni. In quanto segue analizziamo alcune di tali metafore cercando di metterne in luce, come nei casi precedenti, il possibile ruolo nel processo di insegnamento-apprendimento ed il possibile ruolo per l'insegnante.

Gestualità e linea dei reali

L'esempio si riferisce alla prima sperimentazione ed è tratto dal lavoro di uno dei gruppi di studenti brasiliani ai quali era stato assegnato il terzo problema che, per comodità, riportiamo sotto:

***Problema 3**: Volendo noleggiare una macchina per viaggiare per un giorno, immaginiamo di avere le tre possibili opzioni:*

- *D- quota fissa di 20 euro più 0,25 euro per Km percorso*
- *E- quota fissa di 26 euro più 0,20 euro per Km percorso*
- *F- franchigia di 50 Km (ovvero per distanze percorse giornalmente inferiore a 50 Km vengono comunque pagati 50 Km) più 0,5 euro per Km percorso*

Quindi possiamo esprimere matematicamente il costo delle tre opzioni come segue:

$c_A = 20 + 0{,}25d \;\; ; \; c_B = 26 + 0{,}20d \;\; ; \; c_C = \begin{cases} 25 & 0 < d \le 50 \\ 0{,}5d & d > 50 \end{cases}$ *dove d è la distanza percorsa in Km*

Quale delle tre opzioni conviene adottare in funzione del numero di Km che intendiamo percorrere?

Figura 1: il terzo problema proposto nel primo esperimento

Durante le attività con una classe, in un gruppo (gruppo G1_3 della classe 3° liceo brasiliana, vedere Allegato3_SintesiProtocolliPerClasse) chiediamo agli studenti come abbiano fatto a individuare i punti esatti nei quali cambia la convenienza delle diverse opzioni: gli studenti rispondono che prima hanno fatto dei tentativi e, in particolare, un alunno gesticola come se si stesse spostando avanti ed indietro su di una linea orizzontale per evidenziare che i tentativi potevano fornire valori troppo alti o troppo bassi e che quindi ci si doveva spostare indietro o in avanti. Lo studente gesticola in maniera molto vistosa con entrambe le braccia. I gesti rendono più chiara l'idea del metodo che gli studenti hanno individuato per ottenere la soluzione ottimale per il problema: provano un valore (indicato con una mano su una linea orizzontale immaginaria) e se il risultato è troppo alto provano un valore più basso (indicato con l'altra mano), a questo punto se il valore è troppo basso si prova con un valore intermedio e si procede con lo stesso metodo. Lo studente spiega gesticolando con le mani che si spostano orizzontalmente, rendendo chiara l'idea di una sorta di metodo di bisezione.

Interpretiamo questa specifica produzione di gesti e parole dello studente come metafora, utilizzando la definizione proposta; infatti i gesti, accompagnati da parole, dello studente permettono di individuare una analogia fra la posizione delle mani su di una linea immaginaria e le operazioni sui numeri. Nella possibile analogia la posizione delle mani corrisponde a punti su di una retta, che corrispondono a numeri. In questo caso i due domini, iniziale e finale, posti in relazione sono quello delle posizioni delle mani su di una linea e quello dei numeri. La relazione nel dominio iniziale "*essere a destra di*" corrisponde alla relazione "*essere maggiore di* " nel dominio finale. Pensiamo che la principale funzione di questa metafora per lo studente sia quella di spiegare all'interlocutore l'idea matematica che ha utilizzato, la posizione ed il movimento delle mani sostituivano una rappresentazione grafica alla quale lo studente si stava riferendo, rendendo possibile anche una dinamica, un processo che sarebbe stato meno immediato rappresentare graficamente. Pensiamo che l'insegnante possa utilizzare anche questa produzione gestuale (che accompagna un testo e delle parole) per sviluppare in maniera più rigorosa e formalizzata le idee che gli studenti hanno individuato, questo può accadere anche dopo che l'insegnante ha riflettuto sulle produzioni osservate e non necessariamente nel momento in cui la produzione avviene. Un primo modo può essere proprio quello di rendere esplicita l'analogia fra il processo utilizzato ed il movimento delle mani compiuto dallo studente e coinvolgere gli studenti nell'individuare la mappatura fra gesti ed operazioni compiute. Successivamente l'insegnante potrebbe sviluppare un discorso più matematico (in relazione alla classe ed al programma previsto) sul metodo di bisezione (sua formalizzazione e campo di applicabilità).

Gestualità e simmetria

Questo episodio si riferisce alla seconda sperimentazione ed è tratto dall'attività con la macchina matematica ed il testo del gruppo che è stato filmato. Nella fase iniziale di esplorazione gli studenti (Allegato6ProtocRomboArtParte1, tempo T=19,07), stimolati dalle domande del testo, cercano di capire che cosa faccia la macchina. Una delle studentesse accompagna la frase "..*se tu hai una figura qua, e una qua..*" con un gesto della mano che prima viene appoggiata su uno dei due semipiani e poi sull'altro, come mostriamo nelle due immagini seguenti. Pochi istanti dopo iniziano a parlare esplicitamente di figure simmetriche rispetto alla scanalatura della macchina (anche se avevano già individuato quello che la macchina fa senza usare la parola "simmetria").

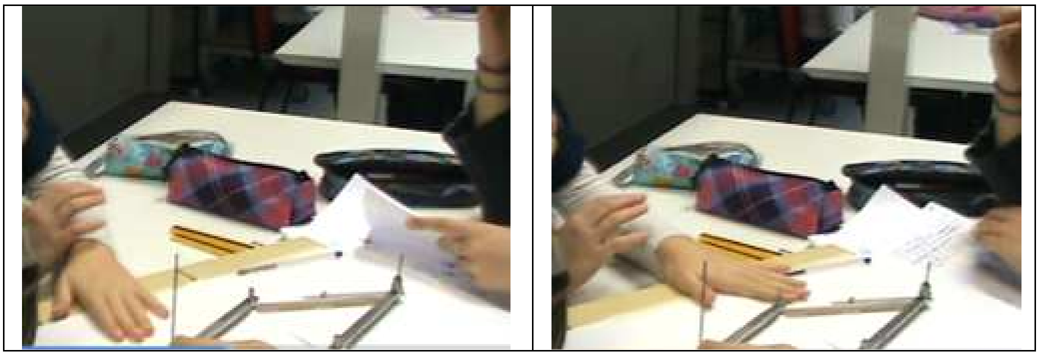


Figura 2

Possiamo interpretare questi gesti come una metafora? Crediamo di si e pensiamo che si possano vedere diverse metafore in questi gesti, con funzioni differenti. La mano che si sposta può “stare per” le figure geometriche che si formano da entrambi i semipiani, ed evocare una analogia fra la posizione delle mani (simmetrica rispetto all’asse) e quella delle figure. Notiamo, inoltre, che la metafora potrebbe evocare una analogia fra la forma delle mani e la forma delle figure che, in questo caso, sarebbe fuorviante per una analisi matematica, dato che la ragazza usa *la stessa mano* per entrambe le posizioni mentre le figure sono simmetriche rispetto all’asse. Anche se successivamente gli studenti dichiarano che le figure che si formano sono simmetriche rispetto all’asse (scanalatura) è presente una certa difficoltà a distinguere fra uguali e simmetriche e tale difficoltà si manifesta con affermazioni come “..*viene da entrambe le parti la stessa cosa*..”.

Questa possibile analogia è quindi potenzialmente produttiva ma anche fonte di potenziali misconcezioni (in realtà dall’analisi del filmato è chiaro che alla fine gli studenti hanno capito cosa fa la macchina anche se nel processo che li ha condotti al risultato finale hanno utilizzato termini che erano non precisi). La metafora potrebbe evocare anche una analogia fra il movimento della mano, che si sposta da una parte all’altra, e la procedura con la quale si è costruita la figura (prima costruzione di una figura su di un piano e poi costruzione con la macchina di una figura simmetrica dall’altra parte). Durante le attività del gruppo questa produzione è avvenuta in un momento in cui gli studenti stavano discutendo su ciò che la macchina fa e non erano ancora arrivati ad una risposta condivisa. Il gesto della studentessa si inserisce in una serie di scambi nei quali ogni componente cerca di mettere a fuoco la caratteristica della macchina ed accompagna le sue parole (anche se dal filmato non si capiscono bene). In ogni caso alla fine dell’episodio gli studenti iniziano a parlare esplicitamente di simmetria. Non vogliamo (e non possiamo) dire che la causa dell’identificazione della simmetria sia stata il gesto, ma crediamo che il gesto abbia avuto una funzione simile a quella che alcuni gesti hanno per l’identificazione di parole (e concetti) come abbiamo sinteticamente discusso nel capitolo 1 (par. 5.3). Crediamo che la studentessa abbia usato il gesto non solo per comunicare agli altri (come nel caso discusso precedentemente) ma, in qualche modo, anche per chiarire a se stessa quello che la macchina fa.

In ogni caso crediamo che, anche in questo caso, tutti questi (ed altri) possibili significati che l’interpretazione del gesto come metafora implica, possano essere un potenziale utile per l’insegnante che può sfruttare le analogie per discutere ed arrivare ai concetti matematici incorporati nella macchina. Non solo concentrandosi e sviluppando, assieme agli studenti, le idee corrette che emergono dalle possibili analogie, ma anche ponendo l’attenzione sulle possibili inferenze analogiche erronee. Per esempio potrebbe domandare se è possibile che la macchina trasformi la forma di una mano da un lato nella stessa forma dall’altro, come indica il gesto della ragazza, e da questo potrebbe portare gli studenti ad un confronto fra la traslazione e la simmetria assiale.

3.2 Metafore come ostacolo e origine di misconcezioni: analisi di alcuni casi emersi dagli esperimenti

Come abbiamo scritto nel primo capitolo (par 5.4), la seconda delle nostre domande di ricerca non ha inciso direttamente sulle ipotesi di ricerca indagate con i due esperimenti. Ricordiamo la domanda:

- *Quali possono essere le conseguenze in termini di misconcezioni ed ostacoli che le analogie associate alle metafore possono generare ?*

In questa sezione consideriamo questa domanda analizzando alcuni episodi tratti dalle sperimentazioni e proponendone una interpretazione come effetto di metafore che sono fonte (anche) di misconcezioni. Ci riferiamo ai concetti di ostacolo e misconzezione secondo quanto abbiamo proposto nel capitolo 2 (par. 3.3).

Linea dei reali e simmetria assiale

Durante il secondo esperimento, nel Gruppo 2 (vedere Appendice1Cap5, riferimento #6), si evidenzia una certa difficoltà ad interpretare come equivalenti le identità "2= – (–2)" e "–2= –2", uno dei commenti degli studenti è che la prima "*è forzata..dal punto di vista grafico*" e rimane una certa difficoltà fino alla fine, come si evidenzia dai protocolli.
La difficoltà nell'uso dei numeri negativi, in particolare la regola dei segni, è una difficoltà diffusa, e Fischbein la attribuisce al fatto che non ci sono modelli intuitivi sufficientemente semplici che servano a giustificare tale regola (Fischbein, 1998, pag.24). Noi ci domandiamo se, in questo particolare caso, non si possano individuare anche altre ragioni legate alla presenza di analogie che sono in conflitto con la regola dei segni. La simmetria assiale incorporata dalla macchina fa in modo, nelle parole degli stessi studenti, che da entrambe le parti "venga la stessa cosa", mentre i numeri da una parte sono considerati positivi e dall'altra negativi. Quindi una metafora che metta in relazione la simmetria assiale della macchina con i numeri reali sulla linea, potrebbe portare a problemi di mappatura, a cosa corrisponde, sulla linea dei reali, il fatto che i due tracciatori sono uno il simmetrico dell'altro? Potrebbe questo creare un conflitto negli studenti? Potrebbe essere questa la ragione per la quale una studentessa commenta che una delle equazioni è "*forzata dal punto di vista grafico*"?
La situazione può ricordare la distinzione fra conoscenze intuitive e formali e la potenziale presenza di modelli intuitivi in conflitto con quelli formali di Fischbein (Fischbein, 1994), oppure quella fra definizioni di concetti e immagine di concetti di Vinner (Vinner, 1991), che possono confliggere. Possiamo pensare che in certe situazioni siano presenti contemporaneamente due metafore che sono in conflitto? L' episodio precedente sulla discussione sui segni può essere interpretato in questo modo?

Funzionamento della seconda macchina

Ci riferiamo ancora al secondo esperimento, in questo episodio un componente del gruppo 2 (vedere Appendice1Cap5, riferimento #10), pensa inizialmente che il motivo per cui le figure prodotte non sono più esattamente simmetriche sia la posizione della scanalatura e non sia dovuta alla posizione dei perni. Pensiamo che tale idea si possa interpretare come una inferenza analogica con la prima macchina che, tuttavia, è fallace perché non coglie la ragione vera del differente comportamento delle due macchine. L'inferenza, di tipo analogico, potrebbe essere: *le due macchine sono analoghe nella struttura ma è presente una differenza nella posizione della scanalatura* (forse la differenza più evidente) *quindi è questa la ragione del differente comportamento*.

Modelli intuitivi come ostacoli?

Anche se abbiamo meno elementi di certezza rispetto agli altri casi, vogliamo discutere alcuni episodi accaduti durante il primo esperimento perché ci pare che ci siano punti degni di riflessione e portino a domande, per noi, interessanti. Le risposte date dagli studenti ad alcune delle domande

dello sperimentatore (Capitolo 4, par. 3.3), evidenziano, secondo noi, alcune conoscenze tacite, relative alle proprietà dei liquidi e del loro moto, nella risoluzione del problema relativo allo svuotamento del recipiente. Ad esempio le portate vengono sommate ma senza sapere spiegare il motivo (vedere Allegato3_SintesiProtocolliPerClasse, gruppi G6_1, G7_2, G7_1, G5_4) e la velocità di fuoriuscita del liquido dal recipiente viene implicitamente considerata costante (vedere Allegato3_SintesiProtocolliPerClasse, gruppi G1_1, G7_1, G6_2).
In alcuni casi gli alunni rispondono alle domande del testo o dello sperimentatore, utilizzando termini o frasi che sono interpretabili come metafore (per esempio in G7_6 e anche in altri gruppi) che comportano analogie con altri ambiti per giustificare l'uso della somma. In questi casi sono gli alunni stessi che propongono le metafore che possono, secondo noi, essere sfruttate dall'insegnante come punto di partenza per indagare le concezioni degli studenti e per giungere a contenuti più corretti e formalizzati.

Per quanto riguarda la velocità di fuoriuscita del liquido ci chiediamo se non possa essere attiva una conoscenza fisica *ingenua* di tipo aristotelico, come quelle rilevate da Bozzi (Bozzi, 1990) in relazione alla caduta dei corpi. In ogni caso, ci sembra che queste risposte siano compatibili con l'esistenza di un modello intuitivo che gli studenti potrebbero utilizzare nella risoluzione del problema, anche se non possiamo certamente dire che questa sia l'unica interpretazione possibile. Proseguendo nella speculazione, e ipotizzando l'esistenza di tale modello intuitivo, lo potremmo definire una *conoscenza ostacolo?* (capitolo 2 par. 3). Forse può essere un candidato ad essere definito una conoscenza ostacolo, se consideriamo che la deduzione sul tempo di svuotamento che diversi gruppi fanno sul primo problema è corretta, ma lo è per ragioni che non sono del tutto evidenti agli stessi studenti che la usano. Il tipo di ragionamento che compiono, secondo noi, è di tipo analogico, perché inquadrano il problema come un problema che conoscono e di tipo più semplice (moto rettilineo uniforme), e utilizzano conclusioni che sono vere nel primo caso come se fossero vere anche nel secondo. Il problema è che nel secondo caso tali conclusioni (la stessa formula per il tempo di svuotamento e la portata complessiva come somma delle portate parziali) sono vere per ragioni più complesse (come abbiamo mostrato nell'Appendice2Cap4). Possiamo considerare questa come una misconcezione? Secondo noi il nome misconcezione è fuorviante in questo caso dato che la concezione è corretta (la formula per il tempo di svuotamento) ma, noi ipotizziamo, è il modello (intuitivo) che li ha guidati ad essere errato. Quindi tale modello sembra comportarsi da conoscenza ostacolo anche se la concezione espressa è corretta. In questo caso per fare emergere il modello intuitivo come ostacolo si dovrebbero porre domande che sono vere nel modello intuitivo utilizzato ma false nel problema considerato. E, in effetti, le domande che lo sperimentatore ha fatto durante le attività hanno avuto l'effetto di fare emergere altre concezioni (la velocità di fuoriuscita costante) che sono misconcezioni. In sintesi questa interpretazione dell'episodio porterebbe a evidenziare l'esistenza di concezioni in sé corrette (l'uso di una conoscenza corretta per una particolare situazione) derivanti da un modello che non è corretto e che può essere una conoscenza ostacolo, se ha le caratteristiche di persistenza e tendenza a ricomparire anche dopo interventi didattici correttivi.

Identificazione degli ostacoli

Nella precedente discussione di alcuni episodi abbiamo messo in evidenza, secondo la nostra interpretazione, alcune misconcezioni che potrebbero derivare da conoscenze-ostacolo le quali possono essere ostacoli in altre situazioni (capitolo 2, par 3.3). Da quanto abbiamo detto nel secondo capitolo, coerentemente con la concezione di ostacolo condivisa nella comunità dei ricercatori in questo ambito, la conoscenza-ostacolo, per essere considerata un ostacolo, deve essere studiata nel tempo e in maniera sistematica e con diverse condizioni, per verificare se: tende a ripresentarsi, viene difesa da chi la usa, secondo alcuni dei criteri già descritti (capitolo 2, par. 1.2). Quindi, per stabilire se si tratta di veri e propri ostacoli, ci sarebbe bisogno di uno studio più approfondito che comprenda (almeno):

- un confronto con altri studi (non è stato fatto in questa sede per mancanza di tempo e perché non era il principale obiettivo della sperimentazione);

- progettazione di altre sperimentazioni mirate a verificare alcune caratteristiche: pervasività, permanenza, fiducia, ecc.

3.3 Il ruolo dell'insegnante

In questa sezione proponiamo alcune riflessioni che riguardano la terza domanda di ricerca:

- *Come può l'insegnante utilizzare in maniera produttiva e consapevole le metafore presenti (effettivamente o potenzialmente) durante l'attività di insegnamento-apprendimento?*

Come abbiamo mostrato nel capitolo 3 (par. 2.3) nel modello della mediazione semiotica l'insegnante (esperto) gioca un ruolo cruciale nel favorire l'evoluzione dei segni da segni situati (con un significato personale e situato) a segni matematici (con un significato istituzionale e generale). Tale importanza è stata messa in evidenza da alcune delle osservazioni fatte nei capitoli 4 e 5 non solo nell'identificazione, in certi casi, di possibili metafore, ma anche nel guidare gli studenti a sfruttare appieno le potenziali analogie da esse evocate (capitolo 4, par. 4.1, Appendice1Cap4, capitolo 5 par. 4.1). L'importanza dell'insegnante nell'uso produttivo di analogie è stata messa in luce da diverse ricerche, come abbiamo visto nel primo capitolo (capitolo 1, par. 4).

Nei capitoli 1 e 2 abbiamo già mostrato i risultati di alcuni studi sull'uso didattico di analogie, dai quali gli autori hanno tratto indicazioni possibilmente utili per l'insegnante, sia per quanto riguarda l'ambito di migliore utilizzo di analogie, il momento migliore per introdurle, le condizioni che dovrebbero essere soddisfatte perché siano proficue (capitolo 1, par.4, capitolo 2 par. 2.2) sia per quanto riguarda i possibili pericoli (misconcezioni ed ostacoli) che possono essere associati alle analogie (capitolo 2, par. 2.1).

Nei paragrafi 3.1 e 3.2 precedenti abbiamo proposto alcune possibilità per l'insegnante di sfruttare le metafore che abbiamo analizzato. In questo paragrafo proviamo a sintetizzare una serie di possibili criteri che l'insegnante (l'esperto) potrebbe seguire per riconoscere, sfruttare le metafore potenzialmente produttive e potenzialmente pericolose. Per chiarirci le idee, relativamente alle azioni che l'insegnante può compiere durante le attività di insegnamento-apprendimento per sfruttare le metafore, proponiamo una suddivisione in tre fasi, che richiede certamente nuove indagini, soprattutto sperimentali, che intendiamo come una proposta operativa dalla quale si può partire per ulteriori affinamenti o miglioramenti. Tale suddivisone ci permette di raggruppare, crediamo sensatamente, alcune osservazioni e risultati di cui abbiamo scritto nel corso di questa indagine. Le fasi che distinguiamo sono:

1- *riconoscimento delle metafore*;

2- *valutazione delle metafore;*
3- *sviluppo del potenziale semiotico delle metafore*.

Queste fasi possono anche avvenire a distanza di tempo l'una dall'altra, per esempio l'insegnante potrebbe riconoscere la presenza di una metafora nei protocolli scritti degli studenti, valutarla in un secondo tempo e, successivamente, sfruttarne le potenzialità con nuove attività con gli studenti (per esempio utilizzando come artefatti con i quali lavorare gli stessi protocolli). Le fasi possono anche mescolarsi allo stesso tempo, ad esempio se l'insegnante sta orchestrando una discussione matematica con la classe e si accorge che uno studente usa una metafora; in questo caso l'insegnante può introdurre la metafora nella discussione in maniera esplicita (per esempio tramite un rispecchiamento con aggiunta di alcune informazioni), in modo che il suo potenziale semiotico, in termini possibili di analogie evocate, venga sviluppato durante la discussione e possa aiutare ad portare il discorso verso i segni matematici.

1) *Riconoscimento di metafore*

Il primo passo che l'insegnante può compiere, se vuole sfruttare le metafore nel processo di insegnamento-apprendimento, è quello di riconoscere le metafore nei testi, prodotti o meno dagli studenti, nelle parole e nei protocolli scritti degli studenti, negli artefatti utilizzati o nelle proprie parole, gesti o azioni.

Come abbiamo messo in evidenza (capitolo 1, par. 3 e capitolo 3 par. 3.2), durante il processo di insegnamento-apprendimento, le metafore possono essere presenti nei testi, negli artefatti, prodotte dagli studenti o dallo stesso insegnante. In ognuno di questi casi se l'insegnante è sensibilizzato al loro riconoscimento potrà valutare, interpretandole, il loro *potenziale semiotico* relativamente ai contenuti matematici (ma anche fisici, chimici..) che vuole sviluppare. Non abbiamo la pretesa di pensare che per il riconoscimento di una metafora sia necessaria la nostra definizione (capitolo 1, par. 5), l'insegnante può evidentemente usare altre definzioni o non usarne, ma crediamo che la definizione che proponiamo possa aiutare a collegare in maniera più diretta l'espressione candidata alla sua produttività ed utilità, dato che viene richiesto che si possa individuare o creare una analogia. Secondo noi questo può essere davvero uno strumento operativo per l'insegnante per riconoscere la metafora potenzialmente utile.

Analogamente a quanto osservato da Tirosh e Stavy relativamente all'uso di regole intuitive (capitolo 2 par.1.3) o da Duit e Treagust relativamente alla presenza di misconcezioni negli stessi insegnanti (capitolo 2 par.1.4), possiamo pensare che, anche per quanto riguarda le metafore, gli insegnanti le possano utilizzare senza rendersene conto, magari introducendo misconcezioni o perdendo la possibilità di svilupparle e sfruttarle appieno. Probabilmente una sensibilizzazione degli stessi insegnanti al riconoscimento e alla interpretazione delle metafore li renderebbe più predisposti a questa attività durante il normale processo di insegnamento-apprendimento in aula (ipotizzando che questo sia utile, come noi stiamo facendo).

Durante le attività in classe l'insegnante può sfruttare la *discussione matematica* (capitolo 3 par. 2.3) per fare emergere *voci* che indichino la presenza di metafore con l'uso di particolari termini, espressioni o paragoni (come noi abbiamo fatto in alcuni episodi delle nostre interviste finali).

Durante tale discussione l'insegnante potrebbe fare emergere alcune conoscenze implicite o modelli impliciti (Fischbein, 1989) che possono manifestarsi con metafore, come abbiamo descritto nel paragrafo precedente.

2) *Valutazione delle metafore*

In questa fase l'insegnante prende in considerazione le possibili analogie che la metafora può evocare (che ci devono essere se l'espressione in studio viene identificata come metafora, secondo la nostra definizione operativa). Se l'insegnante individua una analogia che permette il collegamento con i concetti matematici che sono oggetto della sua azione di insegnamento-apprendimento, tale analogia potrà essere sfruttata produttivamente.

Potenzialità

Dipendendo anche dall'estensione e dalla coerenza delle metafore (capitolo 1, par. 5.1), l'insegnante può valutare il loro potenziale semiotico in termini di possibili analogie utili ad essere analizzate con gli studenti (che possono anche essere tratte da testi storici). L'insegnante, soprattutto nel caso di metafore presenti nei testi o negli artefatti, può cercare di analizzare le loro origini storiche, per evitare problemi (misconcezioni di tipo storico) come quelli indicati da Kipnis (capitolo 2, par. 2.1), e per aumentare il potenziale semiotico della metafora individuata. In questa ricerca non abbiamo approfondito questo aspetto anche se abbiamo dato qualche possibile indicazione sull'importanza delle metafore nella storia di alcune idee scientifiche (capitolo 1, par. 3).

Misconcezioni ed ostacoli

Per valutare le possibili misconcezioni che possono sorgere dalle analogie che ha individuato, l'insegnante potrebbe utilizzare la classificazione proposta da (Spiro et al., 1989, capitolo 2, par. 2.1). A tale classificazione noi aggiungiamo il caso in cui ci possono essere concezioni corrette (inferenze analogiche) che vengono ottenute usando (in maniera anche inconsapevole) un modello errato (come abbiamo visto nell'analisi di un precedente episodio nel paragrafo 3.2). In questo ultimo caso le domande dell'insegnante possono essere importanti per fare emergere eventuali misconcezioni negli studenti che possono rivelare la presenza di un modello errato che gli studenti stanno utilizzando. Come abbiamo scritto tale modelli possono rivelarsi ostacoli, ma per accertare questo fatto sono necessari il confronto con altri studi, analisi approfondite e prolungate nel tempo.

Se abbiamo ragione a sostenere l'esistenza di due forme differenti di metafora, come abbiamo scritto (capitolo 4, par. 5, capitolo 5), pensiamo che possa essere utile all'insegnante distinguere il tipo di metafora che intende sfruttare. Infatti, partendo dalle osservazioni che ci hanno portati a fare questa ipotesi (capitolo 4 par. 4.5), pensiamo che:

- se la metafora ha carattere intuitivo o incorporato sia più difficile da individuare e gli studenti potrebbero avere difficoltà ad esplicitare le conoscenze usate. Il compito dell'insegnante potrebbe essere innanzitutto quello di metterle in evidenza, rendere esplicite le analogie associate sia per poterne sfruttare le potenzialità (potenziale semiotico) che per individuare le potenziali misconcezioni che ne derivano (Allegato3_SintesiProtocolliPerClasse, gruppi G1_1, G2_2, G2_1, G4_2, G4_3);

- se la metafora ha carattere formale/culturale può essere analizzata e valutata più semplicemente da parte dell'insegnante che dovrà soprattutto verificare ed eventualmente completare le conoscenze degli studenti sul dominio source, prima di utilizzare le analogie con il dominio target (Allegato3_SintesiProtocolliPerClasse, gruppi G5_4, G5_6, G7_5). Anche in questo caso l'insegnante può individuare le potenziali misconcezioni.

3) *Sviluppo del potenziale semiotico delle metafore (sviluppo delle analogie)*

Attività di esplicitazione delle metafore e introduzione delle analogie

Come abbiamo scritto a proposito degli strumenti che l'insegnante ha a disposizione nel condurre le attività di insegnamento-apprendimento (capitolo 3, par. 3.2), l'insegnante può stimolare la produzione di segni legati ad una particolare metafora con opportuni interventi (rispecchiamento, rispecchiamento con aggiunta di informazione, domanda aperta..). In particolare con opportune domande che partono dalle metafore prodotte dagli studenti può fare emergere le loro concezioni, oppure sfruttare la presenza di metafore *morte* (capitolo 1, par.1.2) recuperandone il senso metaforico ed introdurre alcune possibili analogie da essa evocate. Come abbiamo già detto nella parte precedente, in questo caso le domande dell'insegnante possono essere importanti per rivelare caratteristiche non evidenti del modello che gli studenti stanno utilizzando per risolvere un problema o analizzare una situazione. L'insegnante può rendere evidenti e discutere tali caratteristiche che possono fare o meno parte delle analogie scelte per la risoluzione di un problema, per la spiegazione di un concetto o per altri obiettivi didattici.

Come abbiamo messo in evidenza nel primo esperimento (per esempio nel gruppo G4_4), stimolare la costruzione di un problema analogo ad un problema dato che rispetti certi vincoli, può servire a rendere evidenti alcuni degli assunti impliciti e quindi, crediamo, certe caratteristiche del modello (intuitivo o meno) utilizzato dagli studenti. L'insegnante può proporre attività di questo tipo che possono servire a stimolare la presa di coscienza da parte degli alunni di tali assunti.

Attività di sviluppo delle analogie (e dei modelli)

Se per le attività che intende svolgere ha senso lo sviluppo di analogie o la costruzione di modelli (ad esempio durante la risoluzione di problemi), l'insegnante può guidare gli studenti nell'analisi delle analogie introdotte dalle metafore, e nella costruzione di una mappatura fra i domini. Può discutere le possibili inferenze corrette e le possibili inferenze scorrette (capitolo 1, par. 4 e capitolo 2, par. 2.1). Questo è, in parte, ciò che abbiamo fatto durante uno degli esperimenti (Appendice1Cap4, Tabella 5). Dipendendo dagli obiettivi dell'insegnante e dalle conoscenze pregresse degli studenti, l'insegnante li può guidare nella costruzione di diversi modelli più o meno elaborati della situazione. Questa era una delle possibilità che avevamo considerato nel primo esperimento, anche se non siamo riusciti a raggiungere questo livello in nessuno dei gruppi. Nel paragrafo seguente proviamo ad indicare un percorso possibile pensato a partire dalla nostra esperienza. Se l'insegnate si rende conto che per sfruttare pienamente una analogia gli studenti non hanno sufficienti conoscenze del dominio source, allora potrà introdurre ed approfondire tali conoscenze.

Attività di sviluppo dei concetti matematici (tramite analogie)

L'obiettivo di alcune delle attività di insegnamento-apprendimento dell'insegnate può essere quello di introdurre e definire concetti matematici (o scientifici più in generale). In questo caso non è necessario che le analogie portino a modelli ma è importante discutere le possibili implicazioni possono implicare le metafore usate. Se le metafore nascono dagli studenti, l'insegnate (che immaginiamo le abbia già riconosciute e valutate) può pensare a possibili modi per analizzare le analogie associate in modo da fare convergere il concetto personale o comune della metafora utilizzata verso il concetto matematico o scientifico al quale tende l'attività di insegnamento-apprendimento (capitolo 3 par. 2.2). Come abbiamo visto, nel secondo esperimento sono emerse alcune metafore ("*braccia*", "*come uno specchio*") originate dalla struttura dell'artefatto utilizzato, che si prestano a questo tipo di attività di interpretazione della metafora ed analisi dell'analogia guidata dall'insegnante. Immaginiamo che un'altra possibilità per l'insegnante possa essere quella di cogliere, anche tramite le metafore prodotte dagli studenti, una evoluzione dei concetti matematici personali e di sfruttarla, anche in questo caso, per trasformarli in concetti istituzionali (matematici o scientifici). Nel secondo esperimento alcune metafore prodotte dallo stesso gruppo in momenti diversi delle attività, ci pare che possano essere sfruttate in questo senso: inizialmente gli studenti definiscono le figure che si formano in modi differenti "*figure identiche*", "*figure simmetriche*"e "*figure speculari*", successivamente, studiando la seconda macchina, dicono che crea figure "*simmetriche ma di dimensioni diverse* " (Appendice1Cap5, riferimenti *14, *30, *31).

3.4 Esempio di un possibile percorso

Sintetizziamo un possibile percorso che permette di affrontare i contenuti che abbiamo esposto nell'Appendice2Cap4, relativamente al problema dello svuotamento di un recipiente (problema P1, capitolo 4, par.2.3). Questo percorso è pensato per affrontare contenuti matematici e fisici adatti alle scuole superiori, e pensiamo che possa essere inserito nel quadro teorico della mediazione semiotica, come alcuni percorsi che sono stati studiati per le scuole primarie (Bartolini Bussi, Corni, Mariani, Falcade, 2012). Immaginiamo un percorso nel quale, oltre agli altri segni, si possano riconoscere ed utilizzare metafore, secondo quanto descritto nel paragrafo precedente.

Come possibili artefatti potremmo considerare:

- *Un testo storico* (*testo esterno* secondo la definizione di Mariotti e Maracci): un brano del trattato di Torricelli nel quale propone un esperimento per giustificare la sua legge per la velocità di fuoriuscita dell'acqua da un foro praticato in fondo ad un recipiente;

- *Un apparato sperimentale concreto*: in laboratorio (o in classe) si può studiare concretamente il deflusso dell'acqua da un recipiente di plastica nel quale sono presenti fori con diametri differenti sul fondo;

- *Un testo con un problema* (tipo il problema P1);

- *Testi prodotti dagli stessi studenti* (*testi interni* secondo la definizione di Mariotti e Maracci).

Possiamo pensare ad una sequenza di cicli didattici nei quali vengono utilizzati i precedenti artefatti:

Ciclo 1: Viene consegnato agli studenti un brano tratto dall’opera “*Sul moto delle acque*” di Torricelli (Torricelli, 1664), assieme ad un testo che ne guida l’analisi. Nella discussione orchestrata dall’insegnante, si può discutere l’analogia che propone Torricelli fra la caduta di un corpo e la velocità dell’acqua in uscita (possibili misconcezioni che possono derivare sulla velocità di deflusso dell’acqua). Si possono discutere alcuni termini ed alcuni disegni usati da Torricelli che possono, in qualche modo, essere metafore.

Ciclo 2: Consegna di un testo contenente un problema (tipo P1) sul calcolo del tempo di svuotamento. Nella discussione sui lavori di ogni gruppo l’insegnante può riconoscere ed utilizzare eventuali metafore usate dagli studenti ed eventualmente collegarle con quelle usate da Torricelli.

Ciclo 3: Consegna di un apparato sperimentale e degli strumenti necessari a misurare il tempo di svuotamento in diverse condizioni. Nella discussione sui lavori di ogni gruppo l’insegnante può riconoscere ed utilizzare eventuali metafore usate dagli studenti che possono essere legate all’apparato utilizzato.

Ciclo4: Consegna dei testi scritti che gli studenti hanno prodotto nel ciclo 2. Nella discussione l’insegnante sfrutta la metafora che lega il moto del liquido al moto di un punto (Appendice2Cap4), che può introdurre direttamente nel caso che non sia sorta spontaneamente fra gli studenti, e guida gli studenti nella costruzione di un modello per la soluzione del problema.

4. Possibili sviluppi, domande e conclusioni

In questo paragrafo poniamo alcune domande, in parte già formulate in quanto scritto precedentemente. Alcune sono domande che ci siamo posti durante la ricerca e, anche se non direttamente legate alle domande o alle ipotesi di ricerca, potrebbero servire a orientare future eventuali indagini.

4.1 Possibili direzioni da approfondire in riferimento alle riflessioni fatte durante l’analisi teorica e le osservazioni sperimentali

Funzione della metafora

Dagli esempi visti durante gli esperimenti, in parte descritti precedentemente, e dall’analisi teorica che abbiamo svolto nel primo capitolo, abbiamo visto come le metafore possano essere utilizzate con funzioni diverse. Le metafore possono servire a dotare di significato alcuni concetti, possono servire per una argomentazione o una dimostrazione (tramite ragionamento analogico), possono servire ad analizzare (o favorire l’analisi di) una situazione, possono servire a rappresentare alcune conoscenze o a comunicarle. È stato proposto di chiamare *metafore di comunicazione* (Boero, Bazzini, Garuti, 2001) le metafore utilizzate per comunicare alcune conoscenze. Quali altre funzioni possono svolgere? E’ importante riuscire a distinguere la funzione svolta dalla metafora ai fini di migliorare il processo di insegnamento-apprendimento?

Produttività della metafora

Da quali fattori dipende la facilità con la quale una metafora funziona effettivamente come metafora in un particolare contesto e con particolari obiettivi? In altre parole, da cosa dipende la produttività delle metafore? Abbiamo iniziato a cercare qualche risposta a questa domanda con i due esperimenti che avevano l'obiettivo di valutare la dipendenza dell'uso di una metafora dal modo con il quale appariva in un testo, dall'azione dell'insegnante e dal tipo di metafora.

Metafore che diventano ostacoli

Come abbiamo visto nel capitolo 2 e da alcuni degli esempi che abbiamo analizzato ed interpretato in precedenza, alcune metafore possono generare misconcezioni e possono rappresentare in certi casi un ostacolo per i successivi apprendimenti. Ad esempio l'idea intuitiva di continuità di una funzione può ostacolare l'introduzione formale del concetto di continuità (questo accade, secondo alcuni studiosi (Núñez, Edwards, Matos, 1999) perché le due differenti definizioni fanno ricorso a diverse metafore, a diverse conoscenze *embodied*) ed in altri casi alcune metafore non meglio approfondite possono portare a misconcezioni. Per Fischbein l'idea di continuità che si appoggia su un modello pittorico tacito può ostacolare l'idea di funzione in ogni punto continua ma non derivabile (Fischbein, 1987, p.138). Quali sono le metafore più frequentemente utilizzate in matematica ed in didattica della matematica che, utilizzate ad un certo stadio del processo di insegnamento-apprendimento, possono rappresentare un ostacolo per gli apprendimenti successivi? Possiamo individuare le caratteristiche delle metafore potenzialmente pericolose? Come possiamo migliorare tali metafore e renderle comunque utili nelle attività di insegnamento-apprendimento?

4.2 Altre figure retoriche?

In didattica della matematica lo studio di figure retoriche come la metonimia o la sineddoche (oltre a metafora e analogia) non è nuovo (Presmeg, 1997b). Noi potremmo ipotizzare di integrare nel quadro teorico della mediazione semiotica, chiarendone la funzione, anche altre figure retoriche e darne un significato per l'insegnamento della matematica e delle scienze.

4.3 Riflessioni sulla ricerca e sul percorso svolto

A conclusione di questo percorso mi sembra naturale fare un (sintetico) bilancio relativamente alle attese personali iniziali, ai conseguimenti e al tipo di valenza formativa e scientifica che il percorso ha rappresentato per me. Le attese personali sono state certamente raggiunte, dato che la motivazione che mi ha spinto a questo era principalmente di studio ed approfondimento. L'approfondimento di alcuni problemi ha portato a tematiche inizialmente inattese che si sono rivelate di una vastità, in certi momenti, sconfortante. In questo è stato senz'altro importante l'aiuto e la guida del gruppo di ricerca dell'Università di Modena e Reggio Emilia che ha saputo ri-dirigere, di volta in volta, gli sforzi che andavano compiuti e senza perdere di vista anche gli obiettivi pragmatici e quindi puntando, quasi sin dall'inizio, anche sulla parte sperimentale. L'interazione fra teoria ed esperimento e, soprattutto, la progettazione degli esperimenti ha rappresentato la fase più delicata di questo lavoro, quella che mi ha lasciato con maggiori insoddisfazioni per alcuni degli errori compiuti. Credo, come ho scritto nel paragrafo 2 di questo capitolo, che per arrivare ad una proficua interazione fra teoria (che guida l'esperimento) ed esperimento (che guida la teoria) sia necessaria l'esperienza che deriva anche dall'errore (oltre che dallo studio e dalle esperienze di successo). Oltre alla stesura di questa tesi, agli insegnamenti ricevuti e agli scambi proficui con la co-tutor (Prof.ssa Bartolini Bussi), anche la stesura e la pubblicazione di alcuni articoli (per alcuni non ancora avvenuta) è stata una esperienza formativa notevole, sia per l'opportunità di avere un confronto schietto con referees anonimi sui contenuti, sia per la soddisfazione di vedere apprezzati i miei contributi.

Riferimenti bibliografici

Abrantes P. (1999), Analogical reasoning and modeling in the science. *Foundation of Science* 4: 237-270.

Alexander P.A., White C.S. & Daugherty M. (1997), Analogical Reasoning and Early Mathematics Learning.In (eds) English L.D. (1997), *Mathematical Reasoning: analogies, metaphors and images*(pp. 117-147), Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Aleksandrov A.D., Kolmogorov A.N., Lavrent'ev M.A. (1974), *Le matematiche.*Universale Bollati Boringhieri.

Amaldi U.(2008), *La fisica di Amaldi: idee ed esperimenti*. Zanichelli.

Andreini M., Manara R. & Prestipino F. (1998), *Matematica controluce: geometria analitica*. McGraw Hill.

Aristotele, (2008) *Poetica*, Einaudi.

Aristotele, (1995) *Retorica*, Mondadori.

Arzarello F.(2000), Linee di tendenza della ricerca per l'innovazione in Italia: Un quadro di riferimento teorico. *Acta de la Escola de Verão*, Santarem: 197- 226.

Arzarello F., Bartolini Bussi M.G.(1998), Italians Trends in Research in Mathemaics Education: A National Case Study in the International Perspective, in Kilkpatrick J. & Sierpinska A. (eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*. Kluwer Academic Publishers, vol. 2: 243-262.

Arzarello F., Robutti O. (2001), From Body Motion to Algebra through Graphing. *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference*: pp. 33-40.

Arzarello, F., Robutti, O. (2009), Embodiment e multimodalità nell'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. vol. 32, A-B N.3; p. 243-268.

Ascher M. (2007), *Etnomatematica*, Bollati Boringhieri.

Bachelard G.(1938), *La formation de l'esprit scientifique*. Ed.italiana: La formazione dello spirito scientifico, 1995, Raffaello Cortina Editore.

Bakhtin M. (1979), *Estetica e romanzo: un contributo fondamentale alla scienza della letteratura*. Torino, Einaudi.

Bakhtin M. (1988), *L'autore e l'eroe: Teoria letteraria delle scienze umane*. Torino, Einaudi.

Bacon F. (1620), *Novum Organum*. Trad. Italiana: Nuovo Organo, 2002. Bompiani Testi a Fronte.

Bagni G.T. (1996), *Storia della Matematica:Vol 1*. Pitagora Editrice Bologna.

Bartolini Bussi M.G. (1991), Social interaction and mathematical knowledge. *Proc. XV PME (Assisi)*, vol.1: 1-16.

Bartolini Bussi M.G. (1993), Geometrical proof and Mathematical Machines. *Proc. XVII PME* (Tsukuba, Japan), vol.2: 97-104.

Bartolini Bussi M.G. (1996), Mathematical discussion and perpsective drawing in primary school. *Educational Studies in Mathematics*, 31: 11-41.

Bartolini Bussi M.G. (1998), Joint activity in mathematics classroom: A Vygotskian analysis, In F. Seeger, J. Voigt, U. Waschescio (Eds.). *The culture of mathematics classroom*: 13-49.

Bartolini Bussi M.G. (1998), Verbal interaction in mathematics classroom: A Vygotskian analysis, In Steinbring H. et al (Eds.). *Language and communication in the mathematics classroom*: 65-84.

Bartolini Bussi, M. (2000), Linee di tendenza della ricerca per l'innovazione in Italia: Analisi di un caso paradigmatico. *Acta de la Escola de Verão*, Santarem: 235-255.

Bartolini Bussi M.G. (2007), Semiotic mediation: fragments from a classroom experiment on the coordination of spatial perspectives. *ZDM the International Journal of Mathematics Education.* 39(1): 63-72.

Bartolini Bussi M.G., Boni M., Ferri F. (1995), *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica*. Comune di Modena: CDE. http://istruzione-p.comune.modena.it/memo/Sezione.jsp?idSezione=666&idSezioneRif=659.

Bartolini Bussi, M., Boni M., Ferri F., Garuti R. (1998), La costruzione del pensiero teorico in geometria: una ricerca sugli ingranaggi nella scuola elementare. In Gallo E., Giacardi L. & Roero C. S. (eds.), *Conferenze e Seminari* 1997-98, 28-60.

Bartolini Bussi M.G., Boni M (2003), Instruments for Semiotic Mediation in Primary School Classrooms. *For the Learning of Mathematics*, 23, 2: 15-22.

Bartolini M.G., Corni F., Mariani C., Falcade R. (2012), Semiotic Mediation in Mathematics and Physics Classrooms: Artefacts and Signs after a Vygotskian Approach**.** *The Electronic Journal of Science Education*, 16 (3): 1-28, ISSN: 1087-3430.

Bartolini M. **G.**, Garuti R., Martignone F., Maschietto M. (2011), Tasks for teachers in the MMLAB-ER Project. In B. Ubuz *Proceedings of the 35th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education*, Ankara (TUR), n. 1, pp: 127- 130.

Bartolini Bussi M.G., Mariotti M.A. (1999), Instruments for Perspective Drawing: Historic, Epistemological and Didactic Issues. In Goldschmidt G., Porter W., Ozkar M. (eds.), *Proc. Of the 4th Int. Design Thinking Res. Symp. On Design Representation, Massachussets Institute of Technology & Technion-Israel Institute of Technology*, III: 175-185.

Bartolini Bussi M.G., Mariotti M.A., Ferri F. (2003), *L'educazione geometrica attraverso l'uso di srumenti: un esperimento didattico*. Studio realizzato nell'ambito del progetto PRIN COFIN2003 Problemi di insegnamento-apprendimento in matematica: significati, modelli, teorie.

Bartolini Bussi M.G., Mariotti M.A. (2008), Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifact and signs after a Vygotskian perspective. In English e al. (Eds.) *Handbook of International Research in Mathematics Education*. (pp.746-783). New York and London, Routlegde.

Bartolini Bussi M.G., Mariotti M.A. (2009), Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 32 A-B, pp. 270-294.

Bartolini Bussi M.G., Mariotti M.A. (2010), Artefatti e segni a scuola: mediazione semiotica nella tradizione vygotskiana. *XXVI Seminario nazionale di ricerca in Didattica della Matematica*. Rimini 4-6 febbraio 2010. (pp.1-14).

Bartolini Bussi M. G., Maschietto M.(2006), *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*. Springer.

Bartolini M, Taimina D., Isoda M. (2010), Concrete models and dynamic instruments as early technology tools in classrooms at the dawn of ICMI: from Felix Klein to present applications in mathematics classrooms in different parts of the world. *ZDM The International Journal of Mathematics Education* , n. 42: 19 – 31, ISSN: 1863-9690.

Bazzini L**.** (1990), Examples of incorrect use of analogy in word problems. *Proceedings of PME XIV,* Mexico, Vol III, pp.175-182.

Bazzini L. **(**1994a), Il ruolo dell'analogia nell'apprendimento della matematica. In Gallo E., Giacardi L., Pastrone F. (a cura di), *Conferenze e Seminari 1993/94*, Dipartimento di Matematica, Università di Torino, *pp.*231-241.

Bazzini L. **(**1994b), Il ruolo del pensiero analogico nella costruzione delle conoscenze numeriche, in "Numeri e proprietà ". *Atti del I Internuclei Scuola dell'Obbligo,* Università di Parma:107-112.

Bazzini L. **(**1995), Il pensiero analogico nell'apprendimento della matematica:considerazioni teoriche e didattiche. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* Vol. 18A, n°2: 107-129.

Bazzini L. (2001), From grounding metaphors to technological devices:a call for legitimacy in school mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 47: 259-271.

Bauersfeld H. (1988), Interaction, contruction and knowledge: alternative perspectives for mathematics education. In D.A. Grouws, T. Cooney and D. Jones (Eds.) *Effective mathematics teaching 1*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics: 27-46.

Bell A., Swan M, Taylor G. (1981), Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 12: 399-420.

Bellone E. (1990), *Caos e Armonia: storia della fisica moderna e contemporanea*, UTET.

Bellone E. (2000), in *Storia della Scienza Moderna e Contemporanea*, Tea.

Benaglia L., Miele A. (2001), *Laboratorio di Matematica*, Tramontana.

Bergamini M., Trifone A. & Barozzi G. (2008), *Manuale di algebra*, Zanichelli.

Bikner –Ahsbahs A., Dreyfus T., Kidron I., Arzarello F., Rafdord L., Artigue M., Sabena C. (2010), Networking of theories in Mathematics Education. In Pinto M.M.F. & Kawasaki T.F. (Eds). *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.1, 145-175. Belo Horizonte, Brazil.

Black M. (1962). *Modelli, Archetipi, Metafore*. Pratiche Editrice.

Blanchette I, Dunbar K. (2000), How analogies are generated: The roles of structural and superficial similarity, *Memory & Cognition*, 2000, 28(1), 108-124.

Bloor D. (1976), *Knowledge and Social Imagery*.Chicago University Press. Edizione italiana: La dimensione sociale della conoscenza.(1994) Raffaello Cortina Editore.

Boero P. (1989), Campi semantici nell'insegnamento-apprendimento della matematica: riflessioni su problem di concettualizzazione e mediazione linguistic connessi ad esperienze di innovazione curricolare. *Report Seminario Nazionale di Pisa* 1989.

Boero P. (1992), The crucial role of semantic fields in the development of problem solving skills in the School Environment. In Pedro Ponte J.P., Matos J.F. & Fernandes D. (eds.) *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies*: 77-91.

Boero P. (1994), Experience fields as a tool to plan mathematics teaching from 6 to 11. In *Proceedings II German-Italian Joint Symposium on Mathematics Education*, IDM Bielefeld: 45-62.

Boero, P., Bazzini, L., Garuti, R. (2001), Metaphors in teaching and learning mathematics: a case study concerning inequalities. *Proceedings of the 25th PME Conference*, Vol.2, Utrecht

University, the Netherlands, 185-192.

Boero P., Dapueto C., Ferrari P., Ferrero E., Garuti R., Lemut E., Parenti L., Scali E. (1995), Aspects of the Mathematics, Culture Relationship in Mathematics Teaching-Learning in Compulsory School. *In Proceedings of the XIX PME (Recife)*, 1: 151-166.

Boero P., Guala E. (2008), Development of mathematical knowledge and beliefs of teachers. In Sullivan, P. & Wood, T. (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education.* (Vol. 1, pp. 223-244), Purdue University, USA: SensePublishers.

Bonura A. (2002), *Introduzione alla Fisica*, Paravia.

Booth R. L., (1988), Children's difficulties in beginning algebra. In A. E. Coxford and A.P. Shulte (Eds.) The ideas of algebra*, K-12- 1988 Yearbook. The National Council of teachers of Mathematics*, Virginia, U.S.A.: 20-32.

Bosch M., Gascon J. (2006), Twenty-Five Years of the Didactic Transposition, *ICMI Bulletin*, n°58: 51- 65.

Bozhovich L., Slavina L. (1972), Fifty years of Soviet psychology of upbringing. In J. Brozek e D. Slobin (Eds.), *Psychology in the URSS. An historical perspective*, White Plains, NY, International Arts and Sciences Press, pp. 161-180.

Bozzi P. (1990), *Fisica ingenua. Oscillazioni, piani inclinati e altre storie: studi di psicologia della percezione*, Garzanti.

Brandi P, Salvadori A. (2004). *Modelli matematici elementari*. Bruno Mondadori.

Brousseau G. (1989), Obstacles epistemologiques, conflits socio-cognitifs et ingegnerie didactique. In Bodnardz N., & Garnier C. (eds.) *Construction Des Savoirs* (pp. 277-285). CIRADE. Agence d'arc.Canada.

Brousseau G. (1997), *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Brousseau G. (2004), Una modellizzazione dell'insegnamento della matematica, *Bollettino dei docenti di matematica*, 49: 11-32.

Brousseau G. (2008), *Ingegneria didattica ed epistemologia della Matematica*, Pitagora Editrice, Bologna.

Brown A. (1989), Analogical learning and transfer: What develops? In Vosniadou S. e Ortony A. (eds), *Similarity and Analogical Reasoning*. Cambridge, Ma.,Cambridge University Press. (pp. 369-411).

Brown D.E. e Clement J (1989), Overcoming Misconceptions Via Analogical Reasoning:Abstract Tranfer Versus Explanatory Model Contruction. *Instructional Science*, n.18, pp.237-261.

Bryce T., MacMillan K. (2005), Encouraging conceptual change:the use of bridging analogies in the teaching of action-reaction forces and the 'at rest' condition in physics. *International Journal of Science Education*, 27, 737-763.

Bruner J. (1986). *Actual Minds, possible words*.Cambridge, MA: Harvard University Press: Trad. It. La mente a più dimensioni, Editori Laterza.

Bruner J. (1991). The narrative contruction of reality. *Critical Inquiry* 18(1),1-21.

Caforio A., Ferilli A. (2000), *Nuova Physica 2000*, Le Monnier.

Carnot S. (1824), *Reflexions sur la puissance motrice du feu*, Ed. italiana "La potenza del fuoco"- Universale Bollati Boringhieri.

Castelnuovo E. (1979), *La Geometria*, La Nuova Italia.

Castelnuovo E. (1979), *I Numeri*, La Nuova Italia.

Castelnuovo E., Barra M. (1976), *Matematica nella realtà*, Bollati Boringhieri.

Cerulli M., Mariotti M.A. (2003), Bulding teorie: working in a micro world and writing the mathematical notebook, *Proc. 27 PME Conference*, Hawaii II: 46-53.

Chevallard Y. **(**1985), *La Transposistion Didactique*. Du savoir savant au savoir enseigné. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard Y. **(**1992), Fundamental concepts in didactics: Perspectives provided by an anthropological approach. In R. Douady and A. Mercier (eds.), *Research in Didactics of Mathematics, Selected Papers.* La Pensée Sauvage, Grenoble, 131-167.

Chevallard Y. **(**1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19/2, 221-266.

Chevallard Y. **(**2006), Steps towards a new epistemology in mathematics education. In Bosch M. (eds.) *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (*CERME 4*).

Cienki A. (1998), Metaphoric Gestures and Some of Their Relations to Verbal Metaphoric Expressions. In J.P. Koenig (ed). *Discourse and cognition: Bridging the gap.* (pp.189-205): Stanfors, CA: CSLI.

Clement J. (1982), Students' preconceptions in introductory mechanics. *American Journal of Physics*, 50: 66-71.

Clement J. (1993), Using bridging analogies and anchoring intuitions to deal with students' preconceptions in phisics. *Journal of Research in Science Teaching*, 30, 1241-1257.

Clement J., Brown D.E. e Zietman A. (1989), Non All preconceptions Are Misconceptions : Finding 'Anchoring Conceptions' for Grounding Instruction on Studentes'Intuitions. *International Journal of Science Education*, 11,n.5, pp.554-565.

C.M.O. [Commissione Ministeriale per lo studio delle questioni inerenti alla revisione degli Orientamenti dell'attività educativa della Scuola Materna] (1990), Orientamenti delle attività educative per la scuola materna statale, Roma.

Cobb P. (1988), The tension between theories of learning and instruction in mathematics education. *Educational Psychologist* 23(2), 87-103.

Cobb P. (1994), Where is the mind? Contructivist and sociocultural prespectives on mathematical development. *Educational Researcher* 23(7), 13-20.

Cobb P., Confrey J., diSessa A., Lehere R., Schauble L. (2003), Design experiments in education research. *Educational researcher*, 32(1): 9-13.

Cobb P., Yackel E., Wood T. (1992), A constructivist alternative to the representational wiew of mind. *Journal for Research in Mathematics Education* 23(1): 2-33.

Collins A., Brown D.E., Newman S.E. (1989), Cognitive apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing, and mathematics. In *Knowing, learning, and instruction: Essays in honor of Robert Glaaser*, ed. L.B. Resnick, Hillsdale, NJ: Erlbaum: 453-494.

Confrey J. (1994), A theory of intellectual development, part 1. *For the Learning of Mathematics* 14(3), 1-8.

Confrey J. (1995a), A theory of intellectual development, part 2. *For the Learning of Mathematics* 15(1), 38-48.

Confrey J. (1995b), A theory of intellectual development, part 3. *For the Learning of Mathematics* 15(2), 36-45.

Corni F., Mariani C., Laurenti E (a cura di) (2010), Innovazione nella didattica delle scienze nella scuola primaria: al crocevia fra discipline scientifiche e umanistiche. *Atti del convegno,* Modena e Reggio Emilia 12-13 Novembre 2010.

Curtis R.V, Reigeluth C.M (1984), The Use of Analogies in Written Text. *Instructional Science*, 17, n.2,pp.99-117.

Dagher Z. R.(1994), Does the Use of Analogy Contribute to Conceptual Change? *Science Education* 78(6): 601-614.

D'Ambrosio U., (2002), *Etnomatematica*, Pitagora Editrice, Bologna.

D'Amore B. (1999), *Elementi di Didattica della Matematica*, Pitagora Editrice, Bologna.

D'Amore B. (2007), I bambini e lo zero. Come un ostacolo epistemologico si trasforma in ostacolo didattico. In D'Amore B., Sbaragli S. (eds) (2007). *Allievi, insegnanti, sapere: la sfida della didattica della matematica*. *Atti del Convegno Nazionale Incontri con la matematica,* n°21.2-3-4 novembre2007, Castel San Pietro Terme, Bologna. Pitagora.83-90.

D'Amore B., Fandino Pinilla M.I., Iori M. (2013), *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica,* Pitagora Editrice Bologna.

D'Amore B., Godino D.J., (2006), Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica.* 1, 7-36.

D'Amore B., Radford L., Bagni G.T, (2006), Ostacoli epistemologici e prospettiva socio-culturale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 29B, 1,11-40.

Davis R.B., Maher C.A. (1997), How Students Think: The Role of Representation. In English L.D. (eds), *Mathematical Reasoning: analogies, metaphors and images* (pp. 93-115), Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Di Leonardo M.V., Marino T., Spagnolo F. (1999), Lo 0 è un ostacolo?, *Quaderni di Ricerca in Didattica,* n°8, G.R.I.M: 91-109.
reperibile sul sito http://math.unipa.it/~grim/zero.pdf

Di Paola B., Milici P. (2012). Geometrical-mechanical artefacts mediating tangent meaning: the Tangentograph. *Acta Didactica Universitatis Comenianae-Mathematics,* Issue 12, pp 1-13.

Di Sessa A. (1983), Phenomenolgy and the Evolution of Intuition. In Gentner D., Stevens A.L. (Eds.) *Mental Models,* Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ: 15-33.

Di Sessa A. (1993), Towards an epistemology of physics. *Cognition and Instruction* 10, 105-225. DOI 10.1207/s1532690xci1002&3_2

Dixon-Krauss L. (a cura di) (1996), *Vygotskij in the classroom. Mediated literacy intruction and assessment*, Longman Publishers, USA. Trad it. Vygotskij nella classe, Erickson, 2000.

Dodero N., Baroncini P., Manfredi R. (2005), *Nuovo corso di analisi*, Ghisetti e Corvi Editore.

Dreistadt R. (1969), The use of analogies and incubation in obtaining insight in creative problem solving. *The Journal of Psychology*, 71:159-175.

Driver R., Easley J. (1978), Pupils and paradigms: A review of literature related to concept development in adolescent science students. *Studies in Science Education*, 5: 61-84.

Duhem P. (1978), *La teoria fisica*, Il Mulino.

Duit R. (1991), On the Role of Analogy and Metaphor in Learning Science. *Science Education*, n.75, pp.649-672.

Duit R. (2007), Science Educaion Research Internationally: Conceptions, Research Methods, Domain of Research. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education* 3(1): 3-15.

Duit R., Gropengießer H. , Kattmann U., Komorek M., Parchmann I. (2012), The Model of Educational Reconstruction – a Framework for Improving Teaching and Learning Science. *Cultural Perpectives in Science Education*, Vol. 5:13-37.

Duval R. (2002), The Cognitive Analysis of Problem of Comprehension in the Learning of Mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 1(2), 1-16.

Duval R. (2006), A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 61, 103-131.

Duval R. (2008), Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. In: Radford L., Schubring G., Seeger F. (Eds.). *Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture. Rotterdam: Sense Publishers:* 39-61.

Eco U. (2007), *Dall'albero al labirinto*, Studi Bompiani.

Egan K. (1989), The shape of the science text: A function of stories. In S. de castell, A.Luke e C.Luke (Eds.), *Language, authority and criticism: Readings on the school textbook* (pp.96-108).New York, Routledge.

Egan K. (1989b), Memory, imagination and learning: Connected by the story. *Phi Delta Kappan* 70 (6): 455-459.

Elia I., Gagatsis A., Demetriou A. (2007), The effects of different modes of representation on the solution of one-step additive problems. *Learning and Instruction*, 17: 658-672.

English L.D. (eds) (1997), *Mathematical Reasoning: analogies, metaphors and images*, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Engestrom Y. (1990), When is a tool? Multiple meanings of artifacts in humen activity. In Engestrom Y. Learning, *Working and Imagining. Twelve studies in activity theory*. Orienta-Konsultit Oy. Helsinki.

Evans, J.S.B.T. (2003), In two minds: Dual process accounts of reasoning. *Trends in Cognitive Sciences*, 7, 454-459. *DOI: 10.1016/j.tics.2003.08.012.*

Evans, J.S.B.T. (2008). Dual-processing accounts of reasoning, judgmente and social cognition. *Annual Review of Psycology,* 59, 255-278. *DOI 10:1146/annurev psych.59.103006.093629.*

Falcade R. (2006), *Théorie des Situations, médiation sémiotique et discussions collective, dans des sequence d'ensignament avec Cabri-Géomètre por la construction des notions de fonction et graphe de fonction*. Grenoble: Université J. Fourier: Tesi di dottorato non pubblicata.

Falcade R., Laborde C., Mariotti M.A. (2007), Approaching functions: Cabri tools as instruments od semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics*, 66: 317-333.
DOI 10.1007//s10649-006-9072-y.

Falcade R., Strozzi P. (2009), Construction and Representation of Space in 5-years-old children. In O.A. Barbarin & B.H. Wasik, *Handbook of Child Development and Early Education: Research to Practice.* New York: The Guilford Press: 499-520.

Ferreri M., Spagnolo F. (1994), L'apprendimento tra emozioni ed ostacolo, *Quaderni GRIM, n°4. reperibile sul sito http://math.unipa.it/~grim/quaderno4.htm*

Fischbein E. (1985). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In Chini Artusi L. (ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base.* Bologna, Zanichelli, UMI.

Fischbein E. (1987), *Intuition in Science and Mathematics,* Dortrecht, D. Reidel Publ. Company.

Fischbein E. (1989), Tacit Models and Mathematical Reasoning. *For the Learning of Mathematics*, n°2: 9-14.

Fischbein E. (1992). Intuizione e dimostrazione. In: Fischbein E., Vergnaud G.(1992). *Matematica a scuola:teorie ed esperienze.* Bologna.Pitagora.

Fischbein E. (1994), The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline,* Biehler R., Scholz R. W., Straser R., Winkelmann B. (Eds.). Kluwer, Academic, Dordrecht, The Netherlands: 231-245.

Fischbein E. (1998), Conoscenza intuitiva e conoscenza logica nell'attività matematica. *La matematica e la sua didattica*, 4, p 365-401.
Reperibile anche nel volume n°4 della collana edita da Pitagora Editrice Bologna e Grupo Editorial Iberoamérica, col titolo: Conoscenza intuitiva e conoscenza logica nell'attività matematica.

Fischbein E. (2001), Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics* 48: 309-329.

Fischbein E., Deri M., Sainati Nello M., Sciolis Marino M., (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education,* Vol. 16, N° 1: 3-17.

Fischbein E., Sainati Nello M., Sciolis Marino M. (1991). Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics,* n°22: 523-549.

Font V.,Bolite J., Acevedo J. (2010), Metaphors in mathematics classrooms: analyzing the dynamic process of teaching and learning of graph function. *Educational Studies in Mathematics* 75:131-152.

Foucault M. (1966), *Les mots e les choses,* Editions Gallimard, Paris.Ed italiana: Le parole e le cose, BUR.

Frederick, S. (2005), Cognitive Reflection and Decision Making. *Journal of Economic Perspectives*. Volume 19, Number 4, Fall 2005, pp. 24-42.

Fuchs H.U. (2010), Origin of Analogical Reasoning in Physics. *GIREP 2010 Conference on Physics Education,* Reims, France, Proceedings.

Fuchs H.U. (2010a), Force Dynamic Gestalt, Metaphor and Scientific Thought. Invited talk at the conference *"Innovazione nella didattica delle scienze nella scuola primaria: al crocevia fra discipline scientifiche e umanistiche"*, Università degli studi di Modena e Reggio Emilia, 12-13 November 2010.

Fuchs H. U., Corni F., Giliberti E., Mariani C. (2012), Force dynamic gestalt of natural phenomena: teaching the concept of Energy. *Proceedings of the ESERA 2011 Conference: Science learning and Citizenship:* 31 - 37 ; ISBN:9789963700448.

Gallese V., Lakoff G. (2005), The brain’s concepts: The role of sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive Neuropsychology,* 22(3/4), 455-479.

Gamow G. (1961), *Biography of Physics,* Ed. Italiana “Biografia della fisica”- Mondadori.

Gardner H. (1999), *Sapere per comprendere,* Feltrinelli.

Gelman R. (1991), Epigenetic foundation of knowledge structure: Initial and trascendent constructions. In S. Carey, R. Gelman (Eds.), *The Epigenesis of Mind: Essays on biology and cognition* (pp. 293-322).

Gentner D. (1989), The mechanism of Analogical Learning. In Vosniadou S. e Ortony A. (eds), *Similarity and Analogical Reasoning*. Cambridge, Ma.,Cambridge University Press. (pp.199-241).

Gergen K. (1995), Social constructionism and the educational process. In L. Steffe (Ed.), *Constructivism in education*. Hillsdale, NJ. Erlbaum Associates: 17-39.

Gerofsky, S. (2004). *A man left Albuquerque heading east: Word problems as genre in mathematics education*. New York: Peter Lang.

Gerofsky, S. (2009). Genre, Simulacra, Impossible Exchange, and the Real: How Postmodern Theory Problematises Word Problem. In Verschaffel L, , Greer B., Van Dooren W., Mukhopadhyay

S. (Eds.),(2009). *Words and Worlds: Modelling Verbal Descriptions of Situations.* Rooterdam: Sense Publshers. pp. 21-39.

Ginsburg H. (1977), *Children's arithmetic*. Van Nostrand, New York.

Glynn S.M., Britton B.K., Semrud-Clikeman M., Muth K.D. (1989), Analogical Reasoning and Problem Solving in Science Textbooks, in Glover J.A., Ronnong R.R., Reynolds C.R (eds.), *Handbook of Creativity*, New York, Plenum.

Godino J.D., Batanero C. (2000), Significato istituzionale e personale degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica*, n° 3: 260-289.

Goldin G. (2001), Counting on the metaphorical, *Nature*, Vol.413: 18-19.

Goldin G. (2008), Perspecives on representation in mathematical learning and problem solving, *Handbook of international research in mathematics education*. In L.English (Ed): 178-203. Routledge.

Greer B. (1997), Modelling reality in mathematics classroom: the case of word problems. *Learning and Instruction*, Vol.7: 293-307.

Grenier D. (1988), *Construction et étude du functionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième*. These. Université Jospeph Fourier, Grenoble 1. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00331264

Hampe B. (2005). *From Perception to Meaning. Image Schemas in Cognitive Linguistics*. Berlin, Mouton de Gruyter.

Harel G., Post T. H., Behr M. (1988), On the textual and the semantic structure of mapping rule and multiplication compare problems. *Proceedings of the Twelfth International Conference, Psychology of Mathematics Education*. Vol 2. Vezprém, Hungary.

Harrison A.G, Treagust D.F., (1993), Teaching with analogies: a case study in grade 10 optics. *Journal of Research in Science Teaching*, 30, 1291-1307.

Hasan R. (2002), Semiotic mediation, language and society: three exotropic theories- Vygotskij, Halliday and Bernstein, In *Language, Society and Consciousness: The Collected Works of Ruqaiya Hasan*, Vol 1, Edited by Jonathan Webster, London: Equinox.
available on line in:
http://www.education.miami.edu/blantonw/mainsite/Componentsfromclmer/Componenet13/Mediation/SemioticMediation.html

Heider F., Simmel M., (1944), An experimental study of apparent behavior. *American Journal of Psychology*, vol. 57: 243-259.

Hermann F. et al (2010). Analogies: A Key to Understanding Physics. *GIREP 2010 Conference on Physycs Education*, Reims, France, Proceedings.

Hesse M. (1966), *Models and Analogies in Sciences*, Ed. italiana "Modelli ed analogie nella scienza", Feltrinelli Editore.

Hewson P.W., Hewson M.A.G. (1984), The role of conceptual conflict in conceptual change and the design of science instruction. *Instructional Science*, 13: 1-13.

Hobbes T. (1651), *Leviathan*. Trad italiana: Leviatano, 2005, Editori Riuniti.

Holton G. (1984), Metaphors in Science Education, In W. Taylor (Ed) *Metaphors in education*, p. 91-113, London, Heinemann.

InEd, (2008), *Innovazione Educativa*, inserto allegato al n°8, Ottobre 2007. Mensile di discussione e progettazione di nuovi itinerari formativi. IRRE Emilia Romagna. http://kidslink.bo.cnr.it/irrsaeer/rivista/innoegionale8-06.pdf

Iverson J., Goldin-Meadow S. (1998), Why people gesture when they speak?, *Nature*, Vol. 396, 228.

Iverson J., Thelen E. (1999), Hand, mouth and brain: The dynamic emergence of speech and gesture. In R. Núñez & W. Freeman (eds.), *Reclaiming Cognition: The primacy of action, intention and emotion* (pp. 19-40). Thorverton, UK: Imprimt Academic.

Jaworski B. (2006), Theory and Practice in Mathematics Teaching Development: critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*. Special Issue: Relations between theory and practice in mathematics teacher Education. Vol. 9 number 2, pp. 187-211.

Johnson M.(1987).*The Body in the Mind.The Bodily Basis of Meaning, Imagination and Reason*. University of Chicago Press. Chicago.

Johnson-Laird P.N. (1983), *Modelli Mentali*, Il Mulino.

Julo J. (1990), Surface features, Representations and Tutorial Interventions in Mathematical Problem Solving. *European Journal of Psychology of Education*, Vol. 3: 255-272.

Kaiser A. (1996), Ricerca Didattica e Scienze dell'Educazione, in M.Gennari (a cura di), *Didattica Generale*, Ed Bompiani, Milano: 393-424.

Kahneman, D., Tversky, A. (1979), Prospect Theory: An Analysis of Decision Under Risk. *Econometrica*, 47(2), 263-291.

Kendon A. (2000), Language and Gesture: unity or duality? In *Language and Gesture*, Cambridge, Cambridge University Press.

Kepler J. (1604), *Ad Vitellionem paralipomena*, CAP. IV, paragrafo 4
(sulle sezioni del cono). Francoforte, rintracciabile nel Fascicolo n°9 sul sito della Associazione Macchine Matematiche (ottobre 2013):
www.macchinematematiche.org/index.php?option=com_content&view=article&id=58&Itemid=160.

Kepler J. (1634), *Somnium*, Ed. italiana "Il sogno di Keplero", 2009, a cura di Anna Maria Lombardi-Sironi Editore.

Kipnis N. (2005), Scientific Analogies and Their Use in Teaching Science. *Science & Education* , Vol. 14: 199-233. DOI 10.1007/s 11191-004-6406-y.

Knorr K. (1980), The scientist as an analogical reasoner: A critique of the metaphor theory of innovation. In K.D. Knorr, R Krohn & R. Whitley (Eds.), *The social process of scientific investigation. Sociology of the sciences* (Vol. IV, pp.25-52) D.Reidel.

Krauss R.M. (1998), Why do we gesture when we speak? *Current directions in Psychological Science*, Vol. 7, pp. 54-60.

Lakoff G. (1994), What is metaphor? In A.Barnden & K.J. Holyoak (Eds), *Advances in connectionism and neural computation theory*, (Vol.3 pp.203-258). Norwood, NJ:Ablex.

Lakoff G., Johnson M. (1980), *Metaphors we live by*. University of Chicago Press.Ed. italiana: Metafora e vita quotidiana, Bompiani.

Lakoff G e Johnson M.(1999). *Philosophy in the Flesh:The Embodied Mind and its Challenge to Western Thought*. New York, Basic Books.

Lakoff G., Núñez R.E. (1997), The Metaphorical Structure of Mathematics: Sketching Out Cognitive Foundations for a Mind-Based Mathematics. In (eds) English L.D. (1997), *Mathematical Reasoning: analogies, metaphors and images*(pp. 21-89). Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Lakoff G., Núñez R.E. (2000), *Where mathematcs come from.How the embodied mind brings mathematics into beeing*. Basic Books-Ed.italiana: Da dove viene la matematica. Bollati Boringhieri.

Leino A.L., Drakenberg M. (1993), Metaphor: An educational perspective. University of Helsinky.Department of Education, *Research Bullettin n° 34* .

Leont'ev A. N. (1981), The problem of activity in psychology. In J.V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology*. Armonk, NY: Sharpe.

Leont'ev A. N. (1977), *Attività, coscienza, personalità*. Firenze, Giunti Barbera.

Lerman S. (1996), Intersubjectivity in Mathematics Learning: A Challenge to Radical Constructivist Paradigm? *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 133-150.

Levin T., Wagner T. (2006), In their own words: Understanding student conceptions of writing through their spontaneous metaphors in science classroom. *Instructional Science* (2006) 34: 227-278.

Lightman A.P. (1989), Magic on the Mind: Physicists' Use of Metaphor. *The American Scholar*, 1989 (Winter): 97-101.

Linchevski L, Vinner S. (1988), The naive concept of sets in elementary teachers. *Proceedings of the Twelfth International Conference of Psychology of Mathematics Education*, Vol 2,: 471-478. Vezprém, Hungary.

Lolli G. (2002), La metafora in matematica, in G. L. Beccaria e C. Marello (a cura di), *La parola al testo. Scritti per Bice Mortara Garavelli*, dell'Orso, Alessandria, pp. 221-232.

Lumbelli L. (1990a), Un approccio alla valutazione formativa: Per una metodologia della valutazione orale, *Scuola e città*, 41(1): 8-18.

Lumbelli L. (1990b), Per una fenomenologia di atti linguistici congruenti con l'intenzione di saperne di più, *Scuola e Città*, 41(2): 67-78.

Lurija A.R. (1971), Towards the problem of the historical nature of psychological processes. *International Journal of Psychology*, 6, pp. 259-272.

Madden J. (2001), Where mathematics comes from:How the embodied mind brings mathematics into being. *Notices of the American Mathematical Society*, Vol.48: 1182-1188.

Marazzini P., Bergamaschini M.E., Mazzoni L., (2008), *Fenomeni e Fisica*. Minerva Scuola.

Mariani C., Giliberti E., Corni F. (2010), Il progetto "piccoli scienziati" storie e percorsi, In *Innovazione nella didattica delle scienze nella scuola primaria: al crocevia fra discipline scientifiche e umanistiche, Atti del convegno Modena e Reggio Emilia* 12-13 Novembre 2010.

Mariotti M.A. (2002), Influence of technologies advances on students' math learning. In English L. et al. *Handbook of International Research in Mathematics Education*, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 695-723.

Mariotti M.A., Maracci M. (2012), Resources for the teacher from a semiotic mediation prespective, In G.Gueudet, B.Pepin, L. Trouche (eds), *From Text to 'Lived' resources: mathematics Curriculum Materials and Teacher Development*, Springer, Volume 7: pp 59-75.

Martignone F., Antonini S. (2009a), Exploring the mathematical machines for geometrical transformations: a cognitive analysis. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M., Sakonidis, H. (Eds), *Proceedings of the 33th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Thessaloniki, Greece, vol.4, pp.105-112.

Martignone F., Antonini S. (2009b), Students' utilization schemes of panthographs for geometrical transformations: a first classification. *Proceedings of Cerme6*, Lyon, France, pp. 1250-1259.

Martzloff J.C. (1997). *A History of Chinese Mathematics*. Springer.

Maschietto M. (2009), Numeri reali e scienze cognitive. In Fiori C, Invernizzi S. *Numeri Reali* (pp. 143-151). Pitagora Editrice Bologna.

Maschietto M., Martignone F. (2008), Activities with the Mathematical Machines: Pantographs and curve drawers. *Proc. Of the 5th European Summer University On The History and Epistemology in Mathematics Education*, Univerzita Karlova, Prague.

Mason L. (1992), *Reti di somiglianze: conoscenze e analogie nell'istruzione*, Franco Angeli.

Mason L. (1995), Il cambiamento concettuale nella costruzione di conoscenze scientifiche in classe. Rassegna di recenti acquisizioni. *Rassegna di Psicologia*, n°1 vol XII: 31-61.

Maurer S. B., (1987), New knowledge about errors and views about learners; What they mean to educators and what more educators would like to know. In A. Shoenfeld (Ed.) *Cognitive science and mathematics education*. Hillsdale, N.J., Lawrence Erlbaum Associates.

McCloskey M., (1983a), Intuitive Physics, Scientific American (april), pp.122-130

McCloskey M. (1983b), Naive teorie. In Gentner D., Stevens A.L. (Eds.), Mental Models, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ:299-324

McCloskey M., Caramazza A., Green B. (1982), Curvilinear motion in the absence of external forces: Naive beliefs about the motion of objects. *Science*, 210: 1139-1141.

McNeill D. (1992), *Hand and Mind: What Gestures Reveal about Thought*. Chicago: University of Chicago Press.

Milici P., Dawson R. (2012). The Equiangular Compass. *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 34, 4, pp. 63-67.

Milici P., Salvi M.(2013), Laboratorio di Matematica in classe: due nuove macchine per problemi nel continuo e nel discreto. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)*, n.23: 15-24. http://math.unipa.it/~grim/QRDM_%20Salvi_Milici_23_2013.pdf

Miller A. I. (2000), *Insights of Genius: imagery and creativity in science and art*, Cambridge, Mass.: The MIT Press.

Miller A. I.(1994), *Immagini e metafore nel pensiero scientifico*, Edizioni Theoria.

Minick N. (1989), L. S. Vygotskij and Soviet activity theory: Perspectives on the relationship between mind and society. *Literacies Institute, Special Monograph Series* N°1. Newton, MA: Educational Developement Center, Inc.

Moll L.C. (1990), Introduction. In L.C Moll (a cura di), *Vygotskij and education: Instructional implications and applications of sociohistorical psychology*, New York, Cambridge University Press: pp. 19-42.

Nemirowsky R., Ferrara F. (2009), Mathematical imagination and embodied cognition. *Educational Studies in Mathematics*, 70: 159-174.

Nesher P. (1980), The stereotyped Nature of Word Problems. *For the Learning of Mathematics, vol.1, n.1*.

Newton L. (2003), The occurrence of analogies in elementary school science books. *Instructional Science* 31: 353-375.

Norenzayan A., Gervais W.G. (2012). Analytic Thinking Promotes Religious Disbelief. *Science* 336: 493-496.

Norenzayan A., Smith E.E., Kim J.B., Nisbett R.E. (2002).Cultural preferences for formal versus intuitive reasoning. *Cognitive Science* 26: 653-684.

Norman D.A.(1988), *The Psychology of Everyday Things*. Basic Books, Inc., Publishers, New York. (traduz.italiana.La caffettiera del masochista: psicopatologia degli oggetti quotidiani, Giunti, 1997).

Norman D.A.(1993), *Things that make us smart*. Addison-Wesley Pub.Com (traduz.italiana .Le cose che ci rendono intelligenti, Feltrinelli, 1995).

Noss R., Hoyles C. (1996), *Windows on Mathematical Meanings: Learning Cultures and Computers*. Dordrecht: Kluwer.

N.R.S.D.M. (1992), *Macchine Matematiche ed altri oggetti*. Comune di Modena.

Núñez R.E, (2004), Do Real numbers really move? Language, thought, and gesture: the embodied cognitive foundations of mathematics. in *Embodied artificial intelligence* (pp.54-73), Springer.

Núñez R.E., Edwards L.D., Matos J.F. (1999), Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 39:45-65. Kluwer Academic Publishers.

Núñez R.E., Sweetser E. (2006), With the Future Behind Them: Convergent Evidence From Aymara Language and Gesture in the Crosslinguistic Comparison of Spatial Construals of Time. *Cognitive Science*, 30: 401-450.

Oppenheimer R. (1956), Analogy in Science. *American Psycologist*, Vol.11: 127-135.

Ortony A. (1978), *Metaphor, language and thought.* In Ortony A. (Ed) *Metaphor and Thougth*. (pp. 1-16). Cambridge University Press.

Palm T. (2009), Theory of Authentic Task Situation. In Verschaffel L, , Greer B., Van Dooren W., Mukhopadhyay S. (Eds.),(2009). *Words and Worlds: Modelling Verbal Descriptions of Situations*. Rooterdam: Sense Publshers. pp 1-21.

Paton W.R. (1979) (tr.), *The Greek Anthology*. London, W.Heinemann-Loeb Classical Library.

Peled I. (2007), The role of analogical thinking in designing tasks for mathematics teacher education: An example of a pedagogical ad hoc task. *Journal of Math Teacher Edication*, 10: 369-379. DOI: 10.1007/s10857-007-9048-6.

Peruzzi G. (2010), *Vortici e colori: alle origini dell'opera di James Clerk Maxwell*. Edizioni Dedalo.

Piaget J. (1928), Logica genetica e sociologia. Trad.It. in *Studi Sociologici*, Franco Angeli, Milano, 1989.

Piaget J. (1970), *L'épistémologie génétique*. Presses Univesitaires de France, Paris. Trad.It. L'epistemologia genetica, Editori Laterza, 1993.

Pimm D.(1981), Metaphor and Analogy in Mathematics. *For the Learning of Mathematics*,. Vol. 1 n°3, pp. 47-50.

Pirie S.E.B, Schwarzenberger L.E.(1988), Mathematical Discussion and Mathematical Understanding. *Education Studies in Mathematics*, 19:459-470.

Polya G. (1945), *How to solve it*. Princeton University Press, Princeton. Trad it. Come risolvere i problemi di matematica, Feltrinelli.

Polya G. (1954), *Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton University Press, Princeton.

Polya G. (1962), *Mathematical discovery*. Wiley&Sons, Trad. it. La scoperta matematica, Feltrinelli.

Posner G. J., Strike K. A., Hewson P.W., Gertzog W.A.(1982), Accomodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. *Science Education*, 66: 211-227.

Prediger S., Bikner-Ahsbahs A., Arzarello F. (2008), Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual frame work. *ZDM Mathematics Education*, 40:165-178.

Presmeg N.C (1997a), Generalization Using Imagery in Mathematics. In (eds) English L.D. (1997), *Mathematical Reasoning: analogies, metaphors and images* (pp. 299-312).Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Presmeg N.C (1997b), Reasoning With Metaphors and Metonymies. In (eds) English L.D. (1997), *Mathematical Reasoning: analogies, metaphors and images* (pp. 267-279).Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Rabardel P. (1995), *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains*. A.Colin, Paris.

Rabardel P. (1997), Gli strumenti dell'uomo: dal progetto all'uso. *Ergonomia*, 9: 12-20.

Rabardel P., Samucay R. (2001), From Artifact to Instrumented-Mediated Learning, New challenges to research on learning, *International symposium organized by the Center for Activity Theory and Developmental Work Research*, University of Helsinki, March 21-23. (non si trova).

Radford L. (2008a), Connecting theories in mathematics education:challenges and possibilities. *ZDM Mathematics Education*, 40:317-327.

Radford L. (2008b), Theories in Mathematics Education: A Brief Inquiry into their Conceptual Differences, *ICMI Survey Team 7:The notion and the role of theory in mathematics education research.*

Radford L. (2003), Gestures, Speech and the Sprouting of Signs. A semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5 (1), 37-70.

Radford L. (2003b). On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic

Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. In Anderson M. et Al. (Eds.). *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis.*

Radford L., Bardini C., Sabena C., Diallo P., Simbagoye A. (2005), On embodyment, artifacts and signs: a semiotic-cultural perspective on mathematical thinking. In Chick H.L., Vincent J.L. (Eds.). *Proceedings of the International Group for the Psycology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 113-120.

Radford L., Demers S., Guzman, Cerulli M.(2008c), The sensual and the conceptual: artefact-mediated kinesthetic actions and semiotic activity. In M.J Hoines and A.B. Fuglestad (Eds.). *Proceedings of the 28° Conference of International Group for the Psycology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 73-80. Norway: Bergen University College.

Ratterman M.J. (1997), Commentary: Mathematical Reasoning and Analogy. In (eds) English L.D. (1997), *Mathematical Reasoning: analogies, metaphors and images* (pp.247-264). Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Reddy M.J. (1978), The conduit metaphor: A case of frame conflict in our language about language. In Ortony A. (Ed) *Metaphor and Thougth*. (pp. 164-201). Cambridge University Press.

Redish E.F. (2003), A Theoretical Framework for Physics Education Research: Modelling Student Thinking. *International School of Physics*, Varenna, July 2003.

Resnick L. B., (1982), Syntax and semantics in learning to subtract. In T. Carpenter , J. Moser and T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: a cognitive perspective*. Hillsdale, N.J., Lawrence Erlsbaum Associates.

Resnick L. B., (1983a), Procédure et comprehension en arithmétique élémentaire. *Proc. Seminaire de Didactique des Mathématiques*. IMAG de Grenoble.

Resnick L. B.(1983b), Mathematics and science learning: A new conception. *Science*, 220:477-478.

Resta L, Gaudenzi S., Alberghi A. (2011), *Matebilandia: Laboratorio di matematica e modellizzazione in un parco divertimenti*. Springer

Robutti O. (2003), Il senso del grafico con la mediazione delle tecnologie: metafore attivate e significati costruiti. *La matematica e la sua didattica*, n°2, 173-195.

Robutti O. (2006), Embodied cognition e didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*, n°2, 162-186.

Rogoff B. (1990), *Apprenticeship in Thinking: Cognitive Development in Social Context*, Oxford University Press, Oxford. Trad. It. Imparando a pensare, Raffaello Cortina Editore.

Rossi P. (1986), *I ragni e le formiche: Un'apologia della storia della scienza*. Il Mulino.

Ruffo G. (2000), *Fisica per moduli*. Zanichelli.

Salvi M. (*in stampa*), Una dimostrazione geometrica dell'identità di Bachét –Bezout, *Archimede* 1/2014.

Salvi M. (*submitted*), Metafora ed Analogia in Didattica della Matematica, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*.

Sander E, Hofstadter D. (2013), *Surfaces and Essences: analogy as the fuel and fire of thinking*, Basic Books, New York.

Sbaragli S. (2005), Misconcezioni “inevitabili” e misconcezioni “evitabili”. *La matematica e la sua didattica*, n°1, 57-71.

Sbaragli S. (2006), Diverse chiavi di lettura delle misconcezioni. Rassegna. *Istituto Pedagogico di Bolzano*.XIV, 29,47-52.

Sbaragli S., Cottino L, Gualandi C., Nobis G., Ponti A., Ricci M. (2008), *L’analogia: aspetti concettuali e didattici*. Armando Editore

Schiralli M, Sinclair N. (2003), A constructive response to “Where mathematics comes from”. *Educational Studies in Mathematics* 52:79-91-Kluwer Academic Publishers.Printed in the Netherlands.

Sfard A, (1997), Commentary: On Metaphorical Roots of Conceptual Growth. In English L.D.(eds), *Mathematical Reasoning: analogies, metaphors and images* (pp.339-371). Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Sfard A. (2009), *Psicologia del pensiero matematico: il ruolo della comunicazione nello sviluppo cognitivo*. Erickson.

Shotter J. (1995), In dialogue: Social constructionism and radical constructivism. In L. Steffe (Ed.), *Constructivism in education*. Hillsdale, NJ. Erlbaum Associates.

Sierpinska A. , Lerman S.(1996), Epistemologies of Mathematics and Mathematics Education. In A.J. Bishop et al., *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht, Kluwer: 827-876.

Smith J.P., DiSessa A., Roschelle J. (1994), Misconceptions Reconceived: A Constructivist Analysis of Knowledge in Transition. *Journal of the Learning Science*, 3(2): 115-163.

Spagnolo F. (2009), Come gestire la comunicazione delle matematiche in classe: la teoria delle situazioni didattiche. *Quaderni di Ricerca in Didattica* (pp. 59-96), Supplemento al n°19, G.R.I.M., Cap 4, Università di Palermo. Reperibile sul sito: http://math.unipa.it/~grim/Epist_Sperim_Capitolo%204_09.pdf

Spellman B., Holyoak K.J., Morrison R.G. (2001), Analogical priming via semantic relations. *Memory & Cognition*, 29(3): 383-393.

Speranza F. (1988), Salviamo la geometria! *La matematica e la sua didattica*, N° 2, 3: 6-13.

Spiro R.J, Feltovich P.J., Coulson R.L, Anderson D.K.(1989), Multiple analogies for complex concepts: antidotes for analogy-induced misconceptions in advanced knowledge acquisition. In Vosniadou S. e Ortony A. (eds), *Similarity and Analogical Reasoning*. Cambridge, Ma.,Cambridge University Press. (pp. 498-531).

Stavy R., Tirosh D. (1996), The Role of Intuitive Rules in Science and Mathematics Education. *European Journal of Teacher Education*, Vol.19, n° 2: 109-119.

Stavy R., Tirosh D. (2001), *Perché gli studenti fraintendono matematica e scienze?: Alcune regole intuitive generano errori clamorosi*. Trento, Erickson.

Stepich D.A, Newby T.J.(1988), Analogical Instruction within the Information Processing Paradigm:Effective Means to Facilitate Learning. *Instructional Science*,17,n.2, p. 129-144.

Sternberg R.J e Downing C.J (1982), The Development of Higher-Order Reasoning Processes in Adolescence. *Child Development*, n.53, pp.209-221.

Swetz F.J (2009). Word Problems: Footprints from the History of Mathematics. In Verschaffel L, , Greer B., Van Dooren W., Mukhopadhyay S. (Eds.),(2009). *Words and Worlds: Modelling Verbal Descriptions of Situations*. Rotterdam: Sense Publishers. pp 73-93.

Tall D. (2002), Using technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics. *First Coloquio do Historia e Tecnologia no Ensino de Matematica at Universidade do Estado do Rio de Janeiro*, February 2002.

Talmy L. (2000), *Toward a Cognitive Semantics.Volume I: Concept Structuring Systems*. Cambridge, The MIT Press.

Thurston W. (1994), On proof and progress in mathematics. *Bullettin of the American Mathematical Society*, Vol.30 n°2, pp. 161-177.

Tirosh D. (1991), The role of students' intuition of infinity in teaching the Cantorian theory, In D. Tall (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer, Dordrecht: 199-214.

Tirosh D., Graeber A. D., and Glover R. M. (1986), Preservice teachers choice of operation for multiplication and division word problems. *Proceedings of the Tenth International Conference, Psychology of Mathematics Education*. London, England.

Torricelli E. (1664), in *Opere scelte di Evangelista Torricelli* a cura di Lanfranco Belloni, UTET, Torino (1975), 264-283.

Treagust D.F., Duit R. (2008), Conceptual change: a discussion of theoretical, methodological and practical challenges for science education. *Cult Stud of Sci Educ*, n.3, pp.297-328.

Tuminaro J., Redish E. F. (2007), Elements of a Cognitive Model of Physics Problem Solving: Epistemic Games. *Phys. Rev.* Special Topics in Physics Ed. Res, 3 (2), pp 1-22.
reperibile su internet: http://www.physics.umd.edu/perg/papers/redish/T&REGames.pdf

Verschaffel L., De Corte E., and Van Coillie (1988), Specifying the multiplier effect on children's solutions of simple multiplication word problems. *Proceedings of the Twelfth International Conference , Psychology of Mathematics Education*, Vol.2: 20-25. Vezprém, Hungary.

Verschaffel L, , Greer B., Van Dooren W., Mukhopadhyay S. (Eds.),(2009). *Words and Worlds: Modelling Verbal Descriptions of Situations*. Rotterdam: Sense Publishers.

Vianna E., Stetsenko A. (2006), Embracing History through Transforming It: Contrasting Piagetian versus Vygotskian (Activity) Theories of Learning and Development to Expand Contructivism within a Dialectical View of History. *Theory & Pshychology*, Vol. 16(1):81-108.

Viennot L (1979), Spontaneous learning in elementary dynamics. *European Journal of Science Education* 1(2): 205-221.

Villani V. (2006), *Cominciamo dal punto*. Bologna, Pitagora

Vinner S. (1991) The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In Tall (editor). *Advanced Mathematical Thinking*, volume 11 of Mathematics Education Library. Kluwer, 1992. p.65-81.

Vygotskij L.(1978), *Mind in society.The development of higher psycological processes*. Harvard University Press. Ed. italiana: Il processo cognitivo, Bollati Boringhieri.

Vygotskij L. (1990). *Pensiero e Linguaggio. Ricerche psicologiche*. Editori Laterza. Ed orig. Myslenie i rec.Psichologiceskoe issledovanija, (1934)

Vygotskij L. (1974). *Storia dello sviluppo delle funzioni psichiche superiori e altri scritti*. Firenze, Giunti.

Voigt J. (1992), Negotiation of mathematical meaning in classroom processes. A paper presented at the *Seventh International Congress of Mathemaics Education*. Quebec, Canada, August.

von Glaserfeld E. (1984), An introduction to radical constructivism. In P. Watzlawick (Ed.), *The invented reality*. New York. W.W. Norton:17-40.

von Glaserfeld E. (1985), *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning*. London.The Falmer Press.

Vosniadou S. (1989), Analogical reasoning in knowledge as a mechanism in knowledge acquisition: a developmental perspective. In Vosniadou S. e Ortony A. (eds), *Similarity and Analogical Reasoning* (pp. 413-437). Cambridge, Ma.,Cambridge University Press.

Vosniadou S. (1994), Capturing and Modeling the Process of Conceptual Change. *Learning and Instruction*, Vol.4: 45-69.

Vosniadou S. e Ortony A (eds) (1989), *Similarity and Analogical Reasoning*. Cambridge, Ma.,Cambridge University Press.

Walker J.S. (2002), *Fisica*. Zanichelli.

Walkerdine V. (1982), From context to text: A psycosemiotic approach to abstract thought. In M. Beveridge (ed.), *Children Thinking through Language*. Edward Arnold, London.

Wartofsky M. (1979), Perception, Representation and the Forms of Action: Towards an Historical Epistemology. In *Models Representation and the Scientific Understanding*. D. Reidel Publishing Company: 188-209.

Williams J, Wake G. (2007), Metaphors and Models in translation between college and workplace mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 64: 345-371: DOI: 10.1007/s10649-006-9040-6.

Wilson M. (2002), Six views of embodied cognition. *Psychonomic Bullettin & Review*, 9(4), 625-636.

Wilson T. (1553), *Arte of Retorique* (Thomas J. Derrick ed.), Garland Publishing, Inc., New York and London, 1982 (p. 345).

Wiser M. (1989), Does learning science involve theory change? Paper presented at the Biannual *Meeting of the Society for Research in Child Development*, Kansas City, MO (non si trova).

Wong E. (1993), Self-generated Analogies as a Tool for Contructing and Evaluating Explanations of Scientific Phenomena. *Journal of Research in Science Teaching*, n°30: 367-380.

Zan R. (1998), *Problemi e convinzioni*. Pitagora Editrice, Bologna.

Zemblyas (2005), Three perspectives on linking the cognitive and the emotional in science learning: Conceptual change, socio-contructivism and poststructuralism. *Studies in Science Education*, 41: 91-116.

Zingarelli N. (2001), *Lo Zingarelli minore: vocabolario della lingua italiana*. Zanichelli.

Allegato 0: Protocolli della prima sperimentazione

Nelle tabelle che seguono sono contenute le trascrizioni dall'originale dei registri delle attività, integrati con le osservazioni che lo sperimentatore ha scritto alla fine di ogni sessione. Segue la copia dei protocolli degli alunni, scannerizzata dall'originale. Le tabelle seguono l'ordine cronologico secondo la data nella quale è stata svolta la sessione di lavoro.

Primo incontro 14/02/2012

Contesto e metodologia	**Contesto di classe**: 3 liceo scientifico della Fundaçao Torino, composta da 12 alunni, in questa prima sessione due erano assenti. Il loro insegnante di matematica e fisica (Prof. Alessio Gava) mi dice che questa è una classe molto buona, che si impegna nelle attività. In questa scuola il liceo è organizzato, come le altre scuole superiori brasiliane, in quattro anni. Tuttavia il programma è uguale a quello del liceo italiano e quindi i tempi per gli apprendimenti sono velocizzati (le ore settimanali sono 4 di matematica e 4 di fisica). Quindi questa classe corrisponde ad una quarta italiana, e l'insegnante curricolare ha già affrontato lo scorso anno la geometria analitica e, in fisica, la parte relativa alla meccanica ed alla fluidostatica. **Adattamenti necessari**: gli alunni sono praticamente tutti di madrelingua portoghese (tranne un alunno che si è trasferito da qualche anno da Torino e parla fluentemente il portoghese). L'offerta formativa della scuola prevede che alcune delle materie siano insegnate in italiano, fra le quali matematica e fisica. Gli alunni parlano tutti abbastanza bene l'italiano e lo capiscono. Per evitare problemi relativi alla comprensione del testo ho tradotto in portoghese i testi proposti. Il resto delle attività si è svolto, da parte mia, in italiano e da parte degli alunni sia in italiano (produzioni orali e scritte) che in portoghese. **Metodologia:** come previsto dal progetto di sperimentazione, la classe è stata suddivisa, con l'aiuto dell'insegnante, in tre gruppi omogenei.(vedere allegati). A ciascuno dei gruppi è stata consegnata una scheda con il problema da risolvere e fogli con un codice di gruppo per le loro produzioni scritte. L'insegnante è rimasto in classe ed è intervenuto solo marginalmente nelle attività. L'accordo era che avrebbe potuto partecipare alle attività secondo modalità concordate. Le attività sono state registrate con un registro scritto che viene riportato sotto.

REGISTRO ATTIVITA'

L'orario nel quale si è svolta la sessione andava dalle 11,30 alle 13.L'attività e cominciata con una mia breve presentazione e con la spiegazione del tipo di attività proposta. Ho chiarito che l'attività è una attività di sperimentazione di dottorato e che il mio obiettivo è osservare quello che accade durante il loro lavoro, specificando che:

- La mia attività consisterà nell'osservarli, registrando ed eventualmente filmando quello che fanno;
- Il tipo di interazione dipende dal tipo di problema che stanno affrontando e non da altri fattori personali;
- All'interno di ogni gruppo ci deve essere collaborazione ma non fra gruppi diversi, visto che questo potrebbe incidere sui risultati;
- Ogni gruppo deve cercare di scrivere, spiegando e disegnando tutto quello che viene proposto, anche se non immediatamente utile per la soluzione del problema assegnato.

Tempo	Gruppo	Evento	Azione Sperim.	Azione Insegn.
11.38		Consegna problemi		
11.43	G1_1	Calcolano la media delle velocità ma hanno dubbi sul fatto che sia possibile. Provano con la somma e poi qualcuno del gruppo dice che non si può.		
11.50	G1_3	Cominciano facendo molte prove numeriche con la calcolatrice. Si basano sui numeri che compaiono nelle equazioni e non fanno disegni	Gli alunni chiedono solo pochi chiarimenti ma mostrano di procedere senza molti dubbi ed impegnandosi sin da subito	
11.51	G1_2	Trovano subito una soluzione sommando le portate e senza, apparentemente, usare metafore. Hanno dei problemi nella conversione dei minuti (decimali) in secondi.		
11.54	G1_3	Continuano con le prove numeriche e dicono di avere trovato la soluzione		
11.56	G1_1	1-Trovano la soluzione pensando alla somma delle velocità ma senza	2-Chiedo di spiegare, scrivendola, la loro soluzione	

		giustificarla.		
12.00	G1_3	2-Dicono che prima hanno fatto dei tentativi (e qui un alunno gesticola come se si stesse spostando avanti ed indietro su di una linea orizzontale per evidenziare che i tentativi potevano fornire valori troppo alti o troppo bassi e che quindi ci si doveva spostare indietro o in avanti) e poi una ragazza mi mostra che hanno impostato una equazione.	1-Chiedo come hanno fatto ad individuare i punti esatti nei quali cambia la "convenienza" delle diverse opzioni.	
12.02	G1_1	1-Utilizzano nella spiegazione l'espressione "*in modo costante*"	2-chiedo cosa significhi tale espressione	
12.05	G1_3	2-Dicono che stanno verificando se il metodo delle equazioni porta allo stesso risultato di quello "a tentativi" che comunque non è chiarito	1- Chiedo cosa stiano facendo dato che li vedo fare molti calcoli	
12.08	G1_2		Chiedo di spiegare la soluzione che propongono (che pare corretta)	
12.10	G1_1	Spiegano dicendo che ogni rubinetto avrà una velocità costante durante lo svuotamento che non viene influenzata dagli altri rubinetti.		
12.14	G1_3	2-Dicono che quello è il punto dove il costo è uguale, ma non spiegano bene come possa servire a risolvere il problema. Non fanno alcun disegno.	1-Chiedo perché abbiano impostato una equazione	
12.21	G1_1	Dicono di avere finito, hanno		

		usato la somma delle velocità senza usare esplicitamente metafore ma non si pongono il problema del cambiamento di velocità dell'acqua che esce.		
12.30	G1_2	Consegnano il materiale		
12.31	G1_3	1-Un alunno commenta che il punto di svolta è stato l'impostazione dell'equazione. 3-Alcuni pensano ad una disequazione	2-Chiedo in che modo riescono a scegliere fra le opzioni dopo che hanno impostato l'equazione	
12.33	G1_1	1-Vogliono consegnare il materiale	2-Li spingo a spiegare meglio quello che hanno fatto	
12.36	G1_3	1-Vogliono consegnare il materiale	2-Dopo avere constatato che non ci sono spiegazioni, li spingo a rivede il testo cercando di commentare e spiegare quello che hanno fatto.	
12.37	G1_3	1-Propongo al gruppo di interpretare in maniera geometrica il problema	2-una alunna chiede..”..vedere le equazioni come rette?” 3-io rispondo di si	
12.53	G1_3	Dopo avere disegnato le rette dicono che è più semplice vedere quello che comunque avevano già trovato prima		
12.56	G1_1	1-Consegnano e chiariscono che con velocità intendono velocità medie	2-li spingo a considerare il problema della velocità che in realtà diminuisce mentre l'acqua esce 3-dicono che la loro è in realtà una approssimazione	
12.58	G1_3	Consegnano		

Osservazioni
Riporto alcuni dei momenti significativi che ho riscontrato dall'analisi dei protocolli scritti ed orali. **G1_2 testo P2_Ipr_NM** Hanno calcolato per ogni pompa quanti litri/min riesce a pompare, quindi sommano le tre portate e infine dividono la capacità della vasca per la portata complessiva. Si nota che nel testo scrivono che dividono la portata per la capacità ma poi effettuano l'operazione inversa (quella giusta). Ottenendo un valore di 5,45 minuti cercano di trasformare i decimali in secondi ed ci riescono impostando una proporzione. Non si trovano ulteriori giustificazioni nel testo che possano far pensare a metafore o analogie, almeno in maniera esplicita. L'unica cosa che viene specificata è che per risolvere il problema hanno "*scelto di pensare ad una progressione del tempo minuto per minuto*". Mi pare che con questo abbiano voluto intendere che l'unità da loro fissata per calcolare la portata e per poi sommare le singole portate sia il minuto. **G1_1 testo P1_Dia_Me** Iniziano calcolando le portate dei diversi rubinetti. Considerano poi la media dei risultati ottenuti. Si rendono conto che questo porta a risultati contraddittori e cambiano strategia. Nella stesura finale spiegano che hanno "*sommato le velocità dei tre rubinetti* " trovando un valore che è quello che usano di seguito per calcolare il tempo, dividendo la capacità del tino per tale velocità. Propongono poi una verifica, moltiplicano la portata di ciascun rubinetto per il tempo ottenuto ed ottengono un valore quasi uguale alla capacità iniziale, spiegano oralmente che la differenza è dovuta alle approssimazioni. Si pongono il problema della possibile influenza sulla velocità di uscita dell'acqua in ogni rubinetto dall'apertura degli altri, e dicono che non ci sono influenze e che il "*vino dovrebbe uscire in maniera costante*", ma non chiariscono bene cosa significhi, successivamente scrivono che i rubinetti distribuiranno il vino "*costantemente*" e la velocità di ognuno sarà costante nel tempo. In seguito ad alcune mie provocazioni sul cambiamento della pressione in seguito allo svuotamento progressivo, provano a dare qualche giustificazione che tuttavia non pare molto chiara. Chiedo quale parte del testo sia stata, secondo loro, più utile per la soluzione e mi rispondono che è la parte finale. **G3_1 testo P3_Ipr_Mi** Gli studenti iniziano a fare dei calcoli, usando anche la calcolatrice, provando alcuni valori di distanza e verificando quale delle diverse opzioni risulta più conveniente per i valori ottenuti. Questo li porta a capire, come scrivono anche nella pagina finale, che per certi valori è conveniente una opzione e per altri valori una opzione differente. Usando tentativi arrivano ad individuare i

valori critici, nei quali cambia la convenienza delle diverse opzioni. Chiedo come hanno fatto ad ottenere i risultati ed uno degli alunni mi spiega, gesticolando con le mani come muovendosi su una linea orizzontale immaginaria, che hanno proceduto per tentativi andando avanti ed indietro (quindi usando un primitivo procedimento per approssimazione somigliante a quello per bisezione).Spinti dalle mie domande su come fare ad essere sicuri di tali valori iniziano ad impostare equazioni, ed arrivano ai valori esatti (in effetti un valore ottenuto per tentativi non è corretto e successivamente viene modificato). Chiedo loro come fanno a scegliere fra le diverse opzioni senza fare tentativi, propongono di utilizzare disequazioni che utilizzano correttamente per giustificare la soluzione definitiva che è corretta. Nel testo non ci sono molte spiegazioni. Non utilizzano spontaneamente una rappresentazione grafica fino a quando non li spingo esplicitamente a farlo. A questo punto disegnano le rette (correttamente) e concordano che in questo modo la soluzione si vede più facilmente anche se coincide con quella già ottenuta per altra via.

Protocolli dei gruppi del primo incontro

Gruppo G1_ Problema P1_Dia_Me

GRUPPO G 1_1

1

TORNEIRA MAIOR : 10 min

" MEDIA : 15 "

" MENOR : 20 "

TOT. VOLUME = 50 L

5L × minuto

$\frac{50}{15}$ 3,3

3,3L × minuto

2,5 L × minuto

MEDIA

50L

+/-

$\frac{5+3,3+2,5}{3} = \frac{10,8}{3} = 3,6L$ × minuto

10,8 L × minuto

$\frac{50}{10,8} \simeq 4,6$ minuto

5 × 4,6 = 23

3,3 × 4,6 = 15,18

2,5 × 4,6 = 11,5

49,68 L

1° minuto 5L 10,8

2° minuto 10,8

sobra 39,2

28,4

⋮

4,6 minutos

$\frac{50}{15}$

4,63

23,15 15,29 11,5

4,6

500 432 680 648 320

$\begin{array}{r|l} 50 & 15 \\ 45 & 3,3 \\ \hline 5 & \end{array}$

②

Sommando le velocità dei tre rubinetti, troviamo un valore pari a 10,8 litri al minuto. In questo modo, dividendo i litri totali per i litri al minuto, si trova che il tempo necessario è circa 4,6 minuti

RUBINETTO GRANDE

10 minuti

Velocità = $\frac{50L}{10min.}$ = 5L x minuto

RUBINETTO MEDIO

15 minuti

Velocità = $\frac{50L}{15min}$ = 3,$\bar{3}$ L x minuto

RUBINETTO PICCOLO

20 minuti

Velocità = $\frac{50}{20}$ = 2,5 L x minuto

CONFERMARE

5L x 4,6 minuti	= 23 L
3,3L x 4,6 "	= 15,18 L
2,5L x 4,6 "	= 11,5 L
	49,68 L

Litri totali "espulsi" per minuto = 2,5 + 3,3 + 5 = 10,8 L

Velocità totale = 10,8 L x minuto

Tempo necessario = $\frac{50}{10,8}$ ≃ 4,6 minuti

Trovandosi tutti e tre i rubinetti sul fondo della botte, ~~...~~ il vino dovrebbe uscire in modo costante e distribuito tra i tre. In tal modo ~~...~~ il vino uscito deve essere la somma dei valori dati.

I tre rubinetti distribuiranno "costantemente" il volume di vino calcolato in precedenza. Il fatto che i tre siano aperti allo stesso tempo non influenzerà la velocità dei singoli. La velocità di ognuno sarà costante, ovvero ognuno avrà una velocità e essa non cambierà nel corso del tempo.

GRUPPO G1_1

③

Abbiamo scelto di non usare la pressione, poiché la pressione cambia durante il tempo, solo che i valori dati dal testo, crediamo, considerano la variazione di pressione. Cioè, il tempo e la velocità trovata a partire da esso, é una media.
La velocità trovata alla fine, quindi, é una media. Ovviamente, all'inizio, la velocità sará superiore e alla fine inferiore.
In questo modo, secondo noi, il risultato più logico é la media della velocità.
Perciò, la pressione é stata tralasciata.

Gruppo G1_2 Problema P2_Ipr_NM

G1_2 (1)

1. Para resolvermos este problema escolhemos ~~pensar~~ pensar em uma progressão de minuto a minuto. Para isso calculamos quantos litros ~~por minuto~~ cada bomba (separadamente) enche por minuto. Depois somamos os três valores das três bombas para obter quanto elas enchem juntas em um minuto e dividimos este valor pela capacidade total da banheira.

$300\,l : 55 = 5,45$

300 l ↓ capacidade da banheira

55 ↓ quantidade que as três bombas enchem juntas por minuto.

5,45 ↓ tempo resultante.

Banheira = 300 L

Bomba A = 20 m ⇒ 15 L/m
Bomba B = 30 m ⇒ 10 L/m
Bomba C = 10 m ⇒ 30 L/m

$\}$ 55 L/m

- Obtivemos quantos litros de água cada bomba enche por minuto.

- Somamos os valores para conseguir o valor compressivo das três bombas: ~~[illegible]~~ 55 litros por minuto.

3- Dividimos o valor obtido pela capacidade total da banheira: ~~[illegible]~~ e concluimos que seriam necessário ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ que o valor ~~conseguido~~ ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ 5,45 ~~[illegible]~~. No entanto este valor não nos satisfaz uma vez que este valor (0,45) está em centesimos e os ~~[illegible]~~ minutos são calculados em "sessentesimi". ~~[illegible]~~

4- Regra de três:

$$\begin{array}{l} 45 \text{ --- } 100 \\ x \text{ --- } 60 \end{array}$$

$$x = 0,27$$

5- Concluimos então que as três bombas encheram a banheira em cerca 5 minutos e 27 segundos.

O valor é aproximado, uma vez que ~~[illegible]~~ encontramos $0,\overline{45}$ e não 0,45, como calculamos.

Gruppo G1_3 Problema P3_Ipr_Mi

G1_3

(1)

Até 19 Km a opção A é a que vale mais a pena.
A e C se igualam aos 20 Km
entre 20 Km e 80 Km a opção C vale mais a pena

$A = 0,25 \cdot 19 + 20 = 24.75$
$C = 25$
$B = 26 + 0.20x$

A 80Km a opção A e a opção C são iguais em preço

$A_{80} = 40$
$C_{80} = 40$

Depois de 80 Km a opção A volta a valer a pena até 120Km quando A e B se igualam em preço

$A_{120} = 0.25 \cdot 120 + 20 = 50$
$B_{120} = 0.20 \cdot 120 + 26 = 50$

A partir de 120Km a opção B sempre vale mais a pena

* $C_{20} = 25$
$A_{20} = 25$
$B_{20} = 0,20 \cdot 20 + 26$

$C_{80} = 40$
$A_{80} = 40$
$B_{80} = 42$

G1-3

100km $\rightarrow$ a = 45

100km $\rightarrow$ b = 46

100km $\rightarrow$ c = 50

Tentativas para ver onde o custo de a, b e c se igualam

a (50km) $\rightarrow$ 32,5

c (50km) $\rightarrow$ 25

a (75 Km) $\rightarrow$ 38,75

c (75km) $\rightarrow$ 37,5

a (110 km) $\rightarrow$ 47,50

b (110km) $\rightarrow$ 48

a (80km) $\rightarrow$ 40

c (80km) $\rightarrow$ 40

a (120km) $\rightarrow$ 50

b (120km) $\rightarrow$ 50

A-C₁ $0,25x+20=25$

$0,25x=5$

$x=20$

A-C₂ $x>50$

$0,25x+20=0,50x$

$(0,25-0,50)x=-20$

$0,25x=20$

$x=80$

A-B

$0,20x+26=0,25x+20$

$26-20=(0,25-0,20)x$

$6=0,05x$

$x=\frac{6}{0,05}=120$

C-B $x>50$

$0,20x+26=0,50x$

$26=(0,50-0,20)x$

$26=0,30x$

$x=\frac{26}{0,30}=86,\bar{6}$

C-B

$0<x\leq 50$

$0,20x+26=25$

$0,20x=-1$

$x=-\frac{1}{0,20}$ impossível

$$\overset{a}{0{,}25x + 20} > \overset{c}{x\,0{,}50}$$ $\boxed{C.E.\ x \geq 50}$ G1-3 (3)

$20 > x\,(0{,}50 - 0{,}25)$

$20 > x\ 0{,}25$

$\frac{20}{0{,}25} > x$

se $x < 80$, $c < a$

se $x = 80$, $c = a$

se $x > 80$, $c > a$

$$\overset{b}{0{,}20x + 26} > \overset{a}{0{,}25x + 20}$$

$6 > 0{,}05\,x$

$\frac{6}{0{,}05} > x$ $\quad 120 > x$

se $x < 120$, $a < b$

se $x = 120$, $a = b$

se $x > 120$, $a > b$

$$\overset{a}{0{,}25x + 20} > \overset{c}{25}$$ $\boxed{C.E\ x < 50}$

$0{,}25\ x > 5$

$x > 20$

se $x < 20$, $a < c$

se $x = 20$, $a = c$

se $x > 20$, $a > c$

G1 - 3 (4)

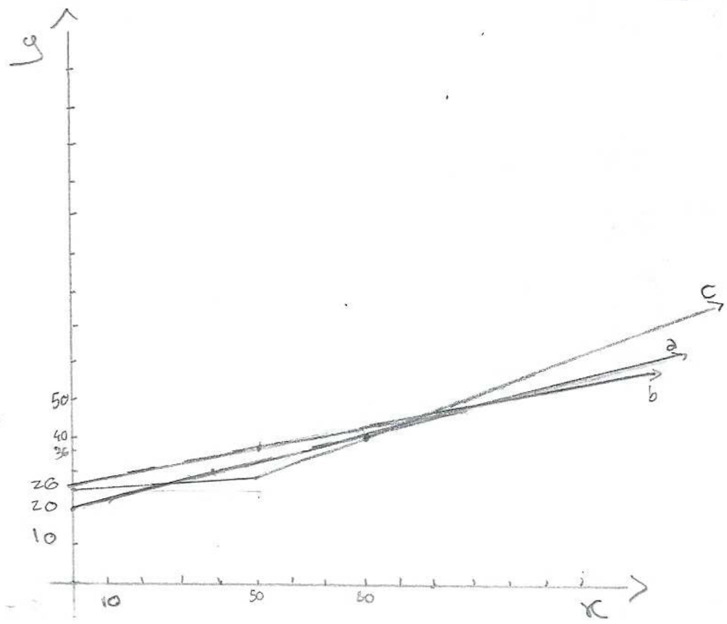
$\therefore$ E $x \geq 0$.

$y = 0{,}25x + 20$

$y = 0{,}20x + 26$

$y = 25$, se $x < 50$

$y = 0{,}50x$, se $x \geq 50$



a b

G 1 _ 3 (5)

Primeiro foram feitas tentativas considerando várias distâncias para ver quais das opções A, B e C seriam melhores.

Concluiu-se que em certas faixas de quilometragem, uma das opções apresentaria mais baixo custo e em outras faixas, uma das outras opções seria melhor.

Depois resolvemos ver como seria se tentássemos resolver o mesmo problema utilizando somente equações. O método utilizado foi tentar equivaler as equações ao variar da quilometragem (x).

Após conseguirmos a equivalência das equações, utilizamos inequações para saber a partir de qual valor seria melhor uma das três opções.

Em conclusão conseguimos identificar as faixas de quilometragem na qual cada uma das três opções seria melhor. Depois foi realizado um gráfico, no qual os resultados ficaram mais evidentes.

Secondo incontro 24/02/2012

Contesto e metodologia	**Contesto di classe**: 4 liceo scientifico della Fundaçao Torino, composta da 10 alunni, in questa prima sessione uno era assente. Il loro insegnante di matematica e fisica (Prof. Alessio Gava) mi dice che questa è una classe con diverse difficoltà dove alcuni alunni disturbano la lezione. In questa scuola il liceo è organizzato, come le altre scuole superiori brasiliane, in quattro anni. Tuttavia il programma è uguale a quello del liceo italiano e quindi i tempi per gli apprendimenti sono velocizzati (le ore settimanali sono 4 di matematica e 4 di fisica). Quindi questa classe corrisponde ad una quinta italiana, e l'insegnante curricolare ha già affrontato lo studio di funzioni e le derivate ed ha iniziato gli integrali. **Adattamenti necessari**: gli alunni sono praticamente tutti di madrelingua portoghese L'offerta formativa della scuola prevede che alcune delle materie siano insegnate in italiano, fra le quali matematica e fisica. Gli alunni parlano tutti abbastanza bene l'italiano e lo capiscono. Per evitare problemi relativi alla comprensione del testo ho tradotto in portoghese i testi proposti. Il resto delle attività si è svolto, da parte mia, in italiano e da parte degli alunni sia in italiano (produzioni orali e scritte) che in portoghese. **Metodologia:** come previsto dal progetto di sperimentazione, la classe è stata suddivisa, con l'aiuto dell'insegnante, in tre gruppi omogenei.(vedere allegati). A ciascuno dei gruppi è stata consegnata una scheda con il problema da risolvere (allegati) e fogli con un codice di gruppo per le loro produzioni scritte. L'insegnante è rimasto in classe ed è intervenuto solo marginalmente nelle attività. L'accordo era che avrebbe potuto partecipare alle attività secondo modalità concordate (vedere progetto). Le attività sono state registrate con un registro scritto che viene riportato sotto, e con filmati.

REGISTRO ATTIVITA'

L'orario nel quale si è svolta la sessione andava dalle 14,00 alle 15,50.L'attività e cominciata con una mia breve presentazione e con la spiegazione del tipo di attività proposta. Ho chiarito che l'attività è una attività di sperimentazione di dottorato e che il mio obiettivo è osservare quello che accade durante il loro lavoro, specificando che:

- La mia attività consisterà nell'osservarli, registrando ed eventualmente filmando quello che fanno
- Il tipo di interazione dipende dal tipo di problema che stanno affrontando e non da altri fattori personali
- All'interno di ogni gruppo ci deve essere collaborazione ma non fra gruppi diversi, visto che questo potrebbe incidere sui risultati
- Ogni gruppo deve cercare di scrivere, spiegando e disegnando tutto quello che viene proposto, anche se non immediatamente utile per la soluzione del problema assegnato

Tempo	Gruppo	Evento	Azione Sperim.	Azione Insegn.
14,16		Consegna problemi		
14,20	G2_1	Iniziano facendo un disegno.		
14,21	G2_2	Dicono di avere già trovato il risultato		
14,22	G2_3	Iniziano a fare dei calcoli ma non fanno disegni o grafici di alcun tipo		
14,24	G2_2	Dicono di avere finito e che a loro sembra ovvio che le portate debbano essere sommate	Chiedo perché facciano la somma delle portate che hanno calcolato	
14,27	G2_3	Mi chiedono chiarimenti sul modo di interpretare la funzione che era definita a tratti	Spiego che è una funzione che è definita in due intervalli di valori diversi e spiego come interpretarla. Non fanno ancora disegni	
14,28	G2_2	Dicono che è "*tipo una velocità*"	Chiedo che tipo di grandezza sia il rapporto L/min , litri diviso minuti	
14,30	G2_3	Chiedono se 0,5 significhi 50 centesimi, mentre non hanno dubbi sul fatto che 0,25 siano 25 centesimi.(*Sembra che la*	Spiego che è 50 centesimi, confrontandolo con 0,25 e spiegando che il numero 0,5 è	

		difficoltà derivi dalla mancanza di uno zero)	uguale al numero 0,50	
14,32	G2_3	Fanno prove , tentativi numerici per vedere quale opzione è più conveniente		
14,37	G2_1	Utilizzano delle formule che fanno direttamente riferimento a velocità e tempo. Dicono che lo spazio (ovvero il volume occupato dal liquido) "*è come una distanza*"	Chiedo perché utilizzino il termine velocità ed il termine distanza (usano il simbolo Δs)	
14,44	G2_2	Dicono che l'immagine della vasca che si riempie è utile e parlano di "*potenze* " dei diversi rubinetti che quando si usano insieme si sommano	Chiedo quale parte del testo è stata secondo loro più utile per individuare una soluzione	
14,47	G2_3	Hanno sottolineato nel testo la frase che afferma che le equazioni sono interpretabili come rette. Ma non riescono ad interpretare il simbolo d. Non fanno disegni.	Chiedo cosa stiano facendo	
14,52	G2_1		Chiedo cosa stiano facendo e di spiegare bene, nel testo, perché sommano le velocità	
14,54	G2_3		Chiedo cosa stanno facendo e noto che non hanno ancora trovato un metodo generale	
15,00	G2_3	Stanno impostando delle disequazioni e cercano di interpretarne il significato. Non hanno ancora fatto grafici o disegni	Noto che hanno interpretato male una parte della funzione definita a tratti, ponendola uguale a 25 + 0,5*d. Spiego che non è corretto facendo vedere che in quel punto c'è continuità con i due tratti, e la funzione è 0,5*d	
15,04	G2_1	Capiscono che dipende dalla pressione. Si chiedono se la	Chiedo se le velocità sono costanti, rispondono che	

		pressione dipenda dalla forma del contenitore.	effettivamente non lo sono. Li spingo a ragionare su questo fatto.	
15,09	G2_2	Consegnano dopo avere spiegato		
15,11	G2_3	Si trovano in difficoltà nell'interpretazione di ca e d come x ed y. Non sanno quale dei valori funzioni come x e quale come y. Successivamente propongono che d sia x. Chiedo loro cosa possa essere y e dicono che è il costo. Chiedono un foglio a quadretti per disegnare meglio le rette.	Li spingo ad interpretare le equazioni come rette e disegnarle.	
15,15	G2_1	1-Iniziano a parlare di *velocità media* , un componente dice che la soluzione è la stessa (non so se in maniera profonda o superficiale)	2-Li spingo a ragionare sul fatto che si possa interpretare la velocità come una velocità media e come questo influisca sulla soluzione esatta.	
15,20	G2_1	Consegnano		
15,27	G2_3	Si trovano in difficoltà a tracciare le rette. Un componente disegna solo due segmenti e non sanno come sfruttarli per trovare la risposta		
15,32	G2_3		Li stimolo a capire come sfruttare il grafico per ottenere le informazioni sul problema. Capiscono che la convenienza dipende dall'essere "sopra " o "sotto " delle rette e non, come inizialmente propongono, dalla pendenza delle rette. E questo avviene quando li spingo a considerare il	

			significato della y come costo. Li spingo a trovare i punti dove si ha cambiamento di convenienza, ovvero dove c'è intersezione fra le rette. Chiedo loro come fare ad individuare tali punti e, dopo un po', un componente suggerisce che si debba risolvere un sistema.	
15,45	G2_3	Consegnano		

Osservazioni
Riporto alcuni dei momenti significativi che ho riscontrato dall'analisi dei protocolli scritti ed orali.

G2_1 testo P1_Dia_NM

Hanno fatto un disegno rappresentando i rubinetti con tre fori di differenti diametri sul fondo del contenitore. Il disegno è un cilindro nel quale riportano il simbolo che indica il raggio r e l'altezza h. Ma non disegnano alcuna graduazione o segno che indichi il livello dell'acqua. Scrivono la formula $Velocità = \frac{\Delta S}{\Delta T}$ e la usano per calcolare le diverse velocità nei tre casi. Sommano poi le velocità ottenute ed utilizzano il risultato per calcolare il tempo che impiega a svuotarsi con la nuova velocità. Scrivono il risultato nella forma $10.83 = \frac{50L}{T}$ e $T = 4.61\ min$. Nella spiegazione che chiedo di scrivere giustificano la somma dicendo che hanno considerato "*come se ci fosse un solo un grande buco*". Osservano che il risultato è "*logico e possibile*" perché il tempo impiegato usando i tre rubinetti a aperti è certamente inferiore a ciascuno dei tre. Dopo la mia domanda sulla eventuale non costanza della velocità dell'acqua durante lo svuotamento, affermano che tale velocità dipende dalla pressione e dalla quantità di acqua che c'è (in realtà sono io che li spingo ad arrivare a questo), disegnano poi una curva (con andamento decrescente e quasi iperbolico) che rappresenta la velocità di uscita in funzione del tempo, ma senza ulteriori giustificazioni. Riscrivono le velocità definendole, questa volta, velocità medie e scrivono che il risultato è comunque lo stesso.

G2_2 testo P1_Ipr_Mi

Associano ad ogni pompa il rapporto L/minuto calcolando quindi, per ogni pompa, quanti litri vengono pompati in un minuto (risp. 15L/min, 10L/min e 30L/min). Successivamente sommano queste grandezze (55L/min) e dividono la capacità della vasca per la somma ottenuta(300/55). Alla mia domanda "Che tipo di grandezza è il rapporto L/min" rispondono che "*è tipo una velocità*" ed utilizzano la stessa definizione di velocità spazio/tempo per giustificarla, notano che il volume non è uno spazio ma è "*come uno spazio*". Da quello che scrivono si vede che non riescono a chiarirsi bene il significato della grandezza, provano diverse strade ma non riescono a spiegare bene perché la grandezza da loro calcolata sia legata alla velocità.

G2_3 testo P3_Ipr_Me

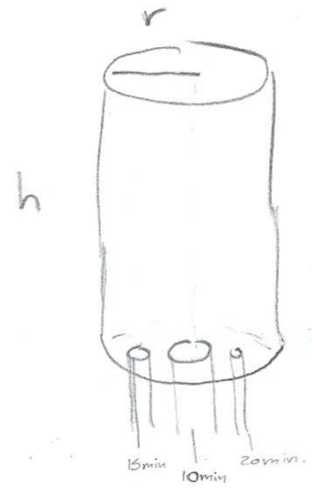
Il testo scritto è molto disordinato, ci sono diversi tentativi che non pare portino da nessuna parte, alcuni si basano su tentativi numerici, fissata una distanza calcolano il costo per le diverse alternative e vedono quale è il più basso. Dopo avere posto l'attenzione sull'interpretazione delle equazioni come rette, dimostrano alcune difficoltà nell'interpretazione dei termini (cosa è q?).Passano ad impostare alcune disequazioni che tuttavia non riescono ad interpretare correttamente in funzione del problema da risolvere. In seguito al mio suggerimento di fare un grafico, non riescono a disegnare completamente le rette, per due rette si limitano a tracciare due segmenti. Inoltre inizialmente associano la maggiore o minore convenienza con la pendenza delle rette e si accorgono dell'errore solo quando li faccio ragionare esplicitamente sul significato della y come costo. Anche nella sintesi finale è chiaro che il procedimento seguito è stata una serie di diverse prove e diverse idee ma fra loro sconnesse e nessuna sviluppata fino in fondo.

Gruppo G2_1 Problema P1_Dia_NM

G 2-1

④

$$\text{Velocità} = \frac{\Delta S \nearrow 50\,L}{\Delta T \searrow ?}$$



$50\,L = cm^3$

$$V_1 = \frac{50\,L}{10\,min} = 5\,L/min$$

$$V_2 = \frac{50\,L}{15\,min} = 3.33\,L/min \longrightarrow 10.83\,L/min$$

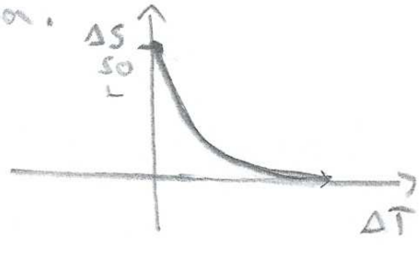
$$V_3 = \frac{50\,L}{20\,min} = 2.5\,L/min$$

$$10.83 = \frac{50\,L}{T} \qquad T = 4.61\,min$$

- Abbiamo considerato il volume del cilindro come Δspazio, per essere usato nella formula di Velocità lineare $V = \frac{\Delta s}{\Delta T}$, permettendoci di ricavare il volume di acqua che esce dal contenitore per minuto, per le 3 diverse situazioni. Siccome le 3 velocità influiscono direttamente

nell'uscita dell'acqua, allo stesso tempo, le abbiamo sommate, considerando come se fosse solo un grande buco, attraverso il quale passa 10.83 Litri di acqua per minuto. Siccome ci sono 50 Litri di acqua, svuotando a 10.83 L/min, il tempo impiegato per svuotarlo completamente è di 4.61 min.
È una risposta logica e possibile, perché il tempo per svuotarlo con i 3 buchi aperti (4.61 min) è certamente minore di 10 min, 15 min o 20 min, perché l'acqua esce più velocemente

- In realtà abbiamo considerato che la velocità dell'acqua che esce è costante, ma dipende dalla pressione, dalla quantità di acqua che c'è. All'inizio (50L) la velocità sarà massima e alla fine (0.00..1 L) sarà minima.



V_1 media = 5L/min
V_2 media = 3.33 L/min
V_3 media = 2.5 L/min

Abbiamo considerato che queste sono, in realtà, <u>velocità Medie</u>, come se sin dall'inizio, fino alla fine, fosse la stessa velocità, trasformandolo in una funzione lineare. Ossia, la risposta è 4.61 min e PUNTO.

Gruppo G2_2 Problema P1_Ipr_Mi

G 2_2 P2 - Ipr_Mi (2)

300 L : 55 =

Ogni pompa riempie rispettivamente:

A → $\frac{15L}{min.}$ insieme, dunque, fanno $\frac{55L}{m}$ (15+10+30)

B → $\frac{10L}{min}$ x riempire una vasca di 300 L, quindi, si calcola:

$\frac{300}{55}$ = 5,45.... min

C → $\frac{30L}{min}$

$\frac{L}{S} = \frac{m}{\cancel{\Delta T}}$ = ? Velocidade em que se enche um objeto x, - capacidade de encher x em y tempo

$\frac{\Delta S}{\Delta T}$ = v NO!

ΔS → spazio; ΔT → tempo

L = m   L = Volume - ΔV Volume = $(\Delta S)^3$ (ΔS → spazio)

min = tempo - ΔT

Capacità? $\frac{(\Delta S)^3}{\Delta T}$

Três bombas têm que encher uma banheira de 300 Litros

Bomba A, leva 20 minutos. Se dividirmos 300 L. por 20 min; ou seja, 15, se calcula a quantidade de litros por minuto: 300 : 20 = 15

A → $\frac{15L}{min}$

Usando o mesmo princípio pode-se calcular que:

B → $\frac{10L}{min}$ (enche a banheira em 30 minutos)

C → $\frac{30L}{min}$ (enche a banheira em 10 minutos)

Têm que se calcular o tempo gasto para que a junção das três bombas encha a banheira.

A + B + C = ΔL

15 + 10 + 30 = 55 Litros

As três bombas juntas, então, fazem $\frac{55L}{min}$

Se para calcular L/m se faz o volume total dividido pelo tempo gasto, inversamente; $\frac{300}{x} = 55$ $55x = 300$ $x = \frac{300}{55}$ = 5,45 minutos para encher a banheira

Gruppo G2_3 Problema P3_Ipr_Me

G2-3

P3_Ipr_Me

Querendo alugar um carro para viajar por um dia, imaginamos ter três possiveis opções:

- *A- Quota fixa de 20 reais mais 0.25 reais por Km percorrido*
- *B- Quota fixa de 26 reais mais 0,20 reais por Km percorrido*
- *C- Franquia de 50 Km (ou seja para distância percorrida inferiores a 50 Km serão de qualquer modo pagos 50 Km) mais 0,50 reais por Km percorrido.*

Então podemos exprimir matematicamente o custo em função dos Km percorrídos das três opções como segue:

$y = mx + q$ $\quad$ $y = q + mx$

$c_A = 20 + 0{,}25d$; $c_B = 26 + 0{,}20d$; $c_c = \begin{cases} 25 & 0 < d \le 50 \\ 0{,}5d & d > 50 \end{cases}$ *onde* d è a *distância percorrida em Km e* c_A, c_B, c_c *os custos.*

Tais equações podem ser interpretadas como retas. Qual das três opções convem adotar em função do número de Km que pretendemos percorrer?

①

x	y
5	21,25
0	20

②

x	y
0	26
5	27

③

x	y
0	0
5	2,5

① $y = 0{,}25 \cdot x + 20$

② $y = 0{,}20 \cdot x + 26$

③ $y = 0{,}50 \cdot x$

$y = 25$

G 2_3

0,20
0,25
0,50

①

100Km — 20R\$
45R\$

50 Km →

100Km — 26
20
46

A = 1 Km = 20,25
B = 1Km = 26,20
C = 1 Km = [illegible],5

100Km → 50R\$

d = 100

~~100 = 20 + 0,25d~~

~~80~~ = d

~~320~~ R

32,30
36

Ca = 45 Ca = 30,5
Cb = 46 Cb = 36
Cc = 50 Cc = 25

$y = c_1$

$mx = 20$

$q = d$

$y = q$

$26 + 119 \cdot 5 \quad 121 \cdot 4$

$\cancel{119 \times 4}$

$\cancel{476}$

$\boxed{\begin{matrix}496\\504\end{matrix}} \rightarrow f($

$C_a = 20 + 0{,}25d$

$C_b = 26 + 0{,}20d$

$$C_c = \begin{cases} 25 & 0 < d \leq 50 \\ 0{,}5 & d > 50 \end{cases}$$

$\cancel{f(d) = 20 + 0{,}25d}$

$$\begin{cases} f(x_1)y = 20 + 0{,}25x \\ f(x_2)y = 26 + 0{,}20x \\ f(x_3)y = 25 \quad D: x < 50 \\ \cancel{f(x_3)} = \cancel{\ } 0{,}5 \times \; D: x > 50 \end{cases}$$

$f(x_1) > f(x_2)$

$\cancel{f(x_1) > f(x_2)}$

$f(x_1) > f(x_2)$

$\boxed{20 + 0{,}25x} > \boxed{26 + 0{,}20x}$

$0{,}05x > 6$

$x > \dfrac{6}{\frac{5}{100}}$

$x > \dfrac{600}{5}$

$\boxed{x > 120}$

$$f(x_1)\begin{cases} 20 + 0{,}25 \cdot 119 \\ 20 + 0{,}25 \cdot 121 \end{cases}$$

$$f(x_2)\begin{cases} 26 + 0{,}20 \cdot 119 \\ 26 + 0{,}20 \cdot 121 \end{cases}$$

$20 + \frac{1}{4} \cdot 119$

20

G 2-3

(?)

(1) Abbiamo sostituito nelle 3 funzioni presentate, 3 valori diversi della variabile "d". Ricerca di prove.
Con ognuna delle formule si fa 3 calcoli, con "d" avendo i seguenti valori ipotetici scelti a caso:

- 50 Km
- 100 Km
- 25 Km

(2) Se le equazioni vengono interpretate come delle rette, possono essere contenute nella formula $y = mx + q$?
In questo caso sono sempre crescenti.
Come possiamo arrivare a sapere il massimo ed il minimo di Km che devono essere percorsi?

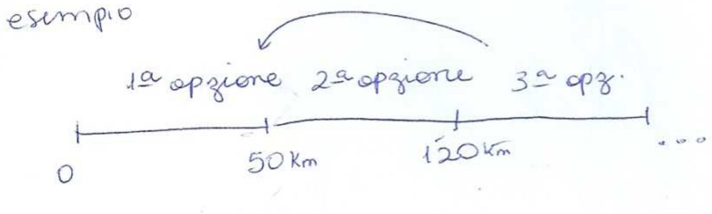
(3) Fino ad una determinata distanza (50Km) la terza opzione è la più viabile però se si aumenta la distanza...

(4) Si deve determinare il rapporto tra f_1, f_2 e f_3, cioè

$f_1 > f_2$ $f_2 > f_3$ e così via e poi determinare l'intervallo
$f_1 > f_3$ $f_2 > f_1$

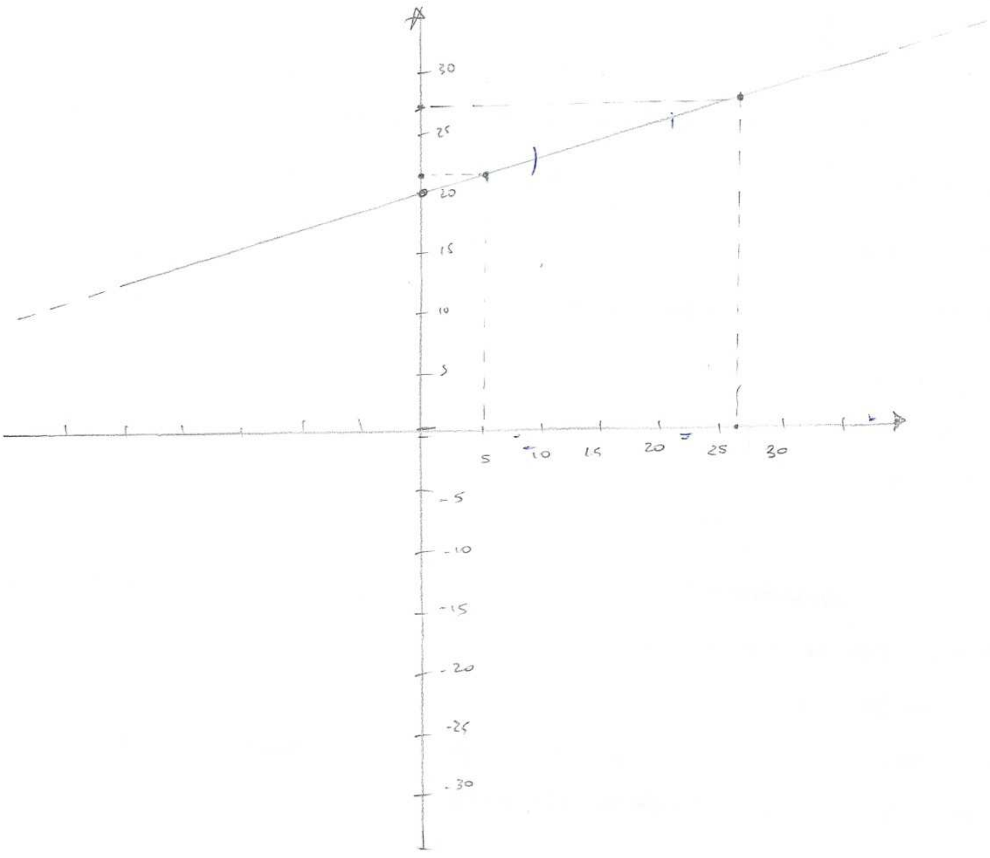
che determina quale la migliore scelta a seconda dei valori

esempio



(5) Si cerca di disegnare le rette su un piano cartesiano.

(6) Mettiamo le rette a sistema per sapere dove si intersecano

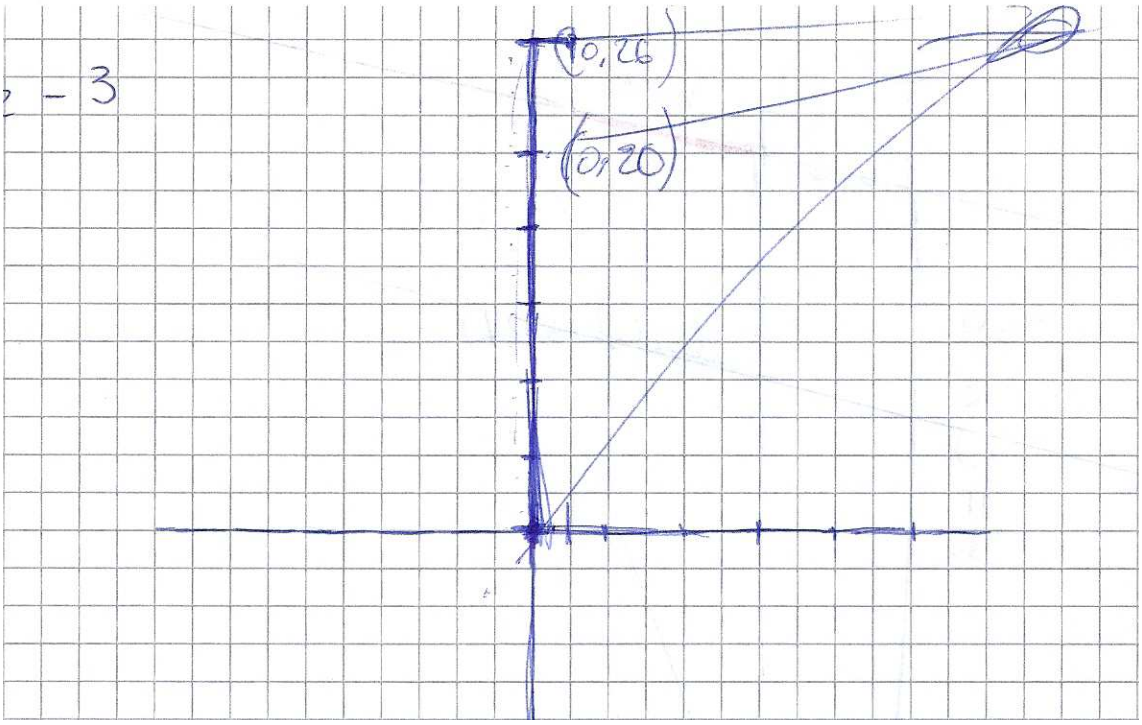


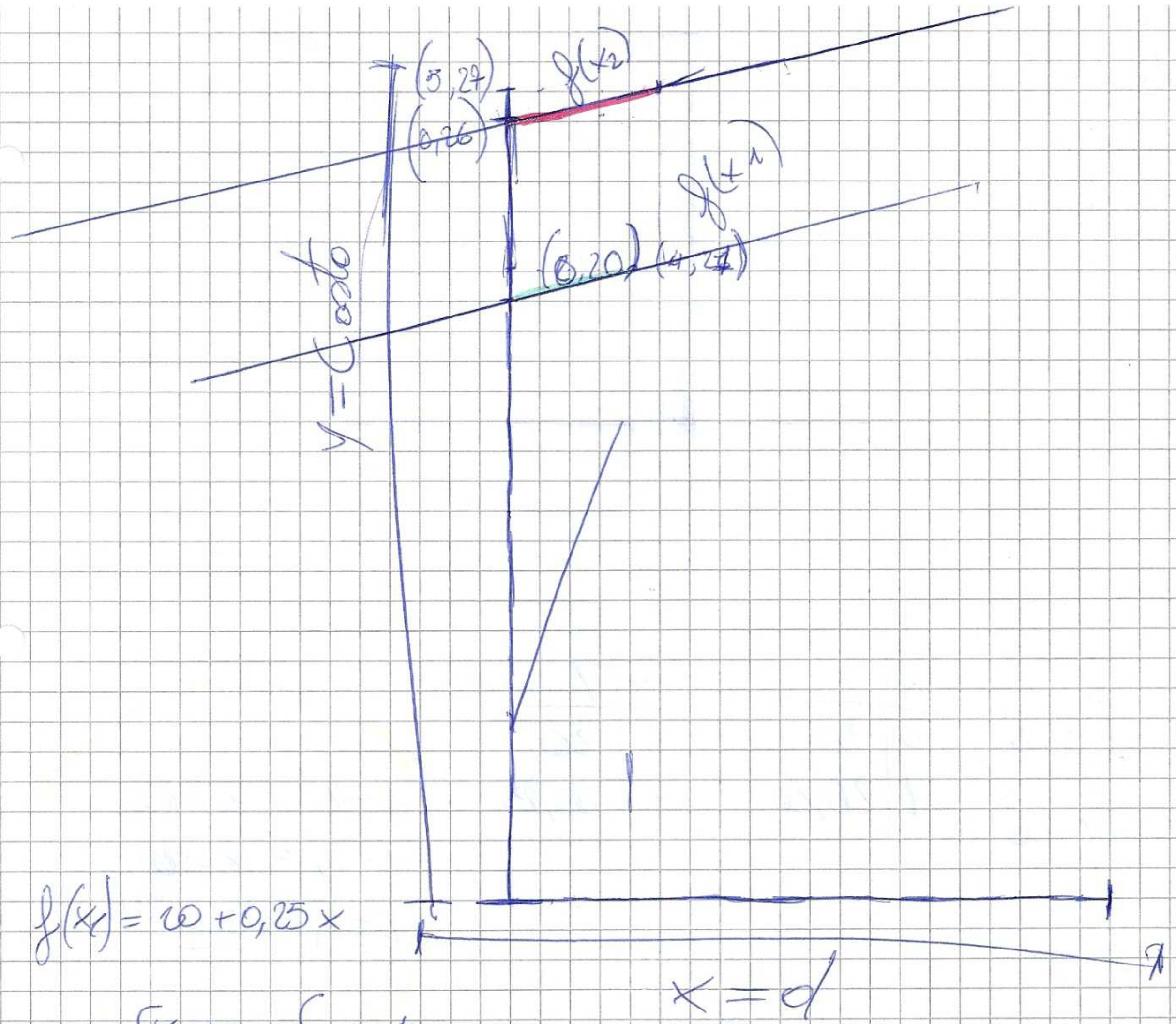
$$\begin{cases} y = 0{,}25 \cdot x + 20 \\ y = 0{,}20 \cdot x + 26 \\ y = 0{,}50 \cdot x \end{cases}$$

2 – 3

$$\begin{cases} 20+0{,}25\cdot 119 \\ 20+0{,}25\cdot 121 \end{cases} \qquad \begin{cases} 20+\frac{119}{4} \\ 20+\frac{121}{4} \end{cases} \qquad \Big\{$$

$$\begin{cases} 26+0{,}20\cdot 119 \\ 26+0{,}20\cdot 121 \end{cases} \qquad \begin{cases} 26+\frac{119}{5} \\ 26+\frac{121}{\;} \end{cases}$$





$f(x_1) = 20 + 0{,}25x$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 20 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 \\ y = 21 \end{cases}$

$f(x_2) = 26 + 0{,}20x$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 26 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5 \\ y = 27 \end{cases}$

$f(x3) = 0{,}5x$

Terzo incontro 19/03/2012

Contesto e metodologia	**Contesto di classe**: 1 liceo scientifico della Fundaçao Torino, composta da 18 alunni. Il loro insegnante di matematica e fisica (Prof. Stefano Camerani) mi dice che questa è una classe di non grande qualità. . In questa scuola il liceo è organizzato, come le altre scuole superiori brasiliane, in quattro anni. Tuttavia il programma è uguale a quello del liceo italiano e quindi i tempi per gli apprendimenti sono velocizzati (le ore settimanali sono 4 di matematica e 4 di fisica). L'insegnante ha affrontato con gli alunni le equazioni e farà prossimamente le disequazioni. In fisica ha affrontato la problematica delle unità di misura in fisica, e sta sviluppando l'ottica geometrica. **Adattamenti necessari**: gli alunni sono praticamente tutti di madrelingua portoghese L'offerta formativa della scuola prevede che alcune delle materie siano insegnate in italiano, fra le quali matematica e fisica. Gli alunni parlano tutti abbastanza bene l'italiano e lo capiscono. Per evitare problemi relativi alla comprensione del testo ho tradotto in portoghese i testi proposti. Il resto delle attività si è svolto, da parte mia, in italiano e da parte degli alunni sia in italiano (produzioni orali e scritte) che in portoghese. **Metodologia:** come previsto dal progetto di sperimentazione, la classe è stata suddivisa, con l'aiuto dell'insegnante, in quattro gruppi omogenei.(vedere allegati). A ciascuno dei gruppi è stata consegnata una scheda con il problema da risolvere (allegati) e fogli con un codice di gruppo per le loro produzioni scritte. L'insegnante è rimasto in classe ed è intervenuto solo marginalmente nelle attività. L'accordo era che avrebbe potuto partecipare alle attività secondo modalità concordate (vedere progetto). Le attività sono state registrate con un registro scritto che viene riportato sotto.

REGISTRO ATTIVITA'
L'orario nel quale si è svolta la sessione andava dalle 9,30 alle 11,20.L'attività e cominciata con una mia breve presentazione e con la spiegazione del tipo di attività proposta. Ho chiarito che l'attività è una attività di sperimentazione di dottorato e che il mio obiettivo è osservare quello che accade durante il loro lavoro, specificando che: - La mia attività consisterà nell'osservarli, registrando ed eventualmente filmando quello che fanno

- Il tipo di interazione dipende dal tipo di problema che stanno affrontando e non da altri fattori personali
- All’interno di ogni gruppo ci deve essere collaborazione ma non fra gruppi diversi, visto che questo potrebbe incidere sui risultati
- Ogni gruppo deve cercare di scrivere, spiegando e disegnando tutto quello che viene proposto, anche se non immediatamente utile per la soluzione del problema assegnato

<table>
<tr><th>Tempo</th><th>Gruppo</th><th>Evento</th><th>Azione Sperim.</th><th>Azione Insegn.</th></tr>
<tr><td>9,45</td><td></td><td>Consegna problemi</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>9,55</td><td>G3_4</td><td>Iniziano a lavorare e disegnare insieme.</td><td rowspan="3">Chiedo cosa stiano facendo e dicono che cercano di capire la terza opzione
Li spingo a scrivere quello che hanno fatto fino ad ora</td><td></td></tr>
<tr><td>9,56</td><td>G3_2</td><td>Ragionano insieme e chiedono chiarimenti sulla terza opzione, vogliono sapere se devono sommare o no il 25</td><td></td></tr>
<tr><td>9,59</td><td>G3_3</td><td>Calcolano i rapporti e parlano di velocità, li sommano ma non sono sicuri su come procedere</td><td></td></tr>
<tr><td>10,03</td><td>G3_1</td><td>Trovano rapidamente il risultato ma scrivono sul banco. Utilizzano subito una formula corretta ma non direttamente legata al ragionamento iniziale</td><td>Li spingo a scrivere meglio tutto sui fogli</td><td></td></tr>
<tr><td>10,07</td><td>G3_4</td><td>Hanno fatto il calcolo delle diverse velocità, le sommano e trovano il tempo totale con una proporzione (regola del tre)</td><td>Chiedo cosa stiano facendo</td><td></td></tr>
<tr><td>10,10</td><td>G3_2</td><td>Stanno procedendo per tentativi numerici, usano anche i numeri che compaiono nel testo 25, 50, 100 e poi tentano valori intermedi come 80 (“perché è fra 50 e 100”)</td><td>Chiedo cosa stiano facendo</td><td></td></tr>
</table>

10,15	G3_3	2-Dicono che sono convinti del procedimento: trovano le diverse velocità, le sommano e per la parte finale impostano una proporzione . Non utilizzano unità di misura.	1-Chiedo cosa stiano facendo 3- Chiedo di usare unità di misura	
10,20	G3_4	Scrivono il calcolo dei rapporti, con unità di misura ed utilizzano una proporzione (anche loro usano “la regola del tre”)		
10,30	G3_4	2- Indicano alcune frasi della parte finale (anche quella che parla di velocità) in particolare indicano l’ultima affermazione di Mario (che nelle mie intenzioni doveva funzionare come metafora esplicita) Parlano esplicitamente di velocità dell’acqua.	1-Chiedo quale parte del testo sia stata più utile	
10.31	G3_3	Chiedono di poter scrivere il ragionamento “dentro al dialogo” (*è il primo gruppo che si accorge esplicitamente della richiesta e vuole continuare il dialogo*)		
10,31	G3_4		Chiedo di proseguire il dialogo, ovvero di trasformare quello che hanno scritto e in un dialogo che prosegua quello del testo.	
10,35	G3_2	2-Dicono di avere finito e dall’analisi si vede che hanno proceduto per tentativi, arrivando ad un	1-Chiedo chiarimenti su quello che hanno fatto	

		risultato che pare corretto. 4- Dicono (una alunna) che sa che si dovrebbe usare un sistema ma non sa come fare. (*Risulta che la ragazza ha già frequentato un'altra classe dove hanno studiato i sistemi ma non sa come usarli*)	3-Chiedo come possano essere sicuri del risultato	
10,45	G3_4	2- Una alunna dice (dopo avere pensato un pò) che quando c'è più acqua la pressione sarà maggiore e quindi anche la velocità.	1- Chiedo come possano essere sicuri che l'acqua mantenga la propria velocità costante mentre esce. 3-Propongo di discutere fra loro su questo fatto e vedere, se sono tutti d'accordo sull'osservazione, come cambia il risultato, se cambia.	
10,50	G3_3	2-Dicono che è la velocità con la quale l'acqua esce	1-Chiedo che tipo di grandezza sia il rapporto Volume/tempo	
10,55	G3_1	Dicono che è la velocità dell'acqua la grandezza che hanno calcolato ma non pare che ci siano metafore o analogie con altri problemi	1-Chiedo se la velocità abbia qualcosa a che fare con il problema	
10,56	G3_2	Consegnano il lavoro		
11,00	G3_4		Ripropongo di scrivere un dialogo perché non lo hanno fatto e spiego che in	

			effetti la velocità dell'acqua non è costante mentre esce.	
11,05	G3_3	2- Arrivano a capire che dipende dalla pressione. Dicono che la velocità calcolata è quella media ed uno avanza il dubbio che possa cambiare il risultato e quindi su come si possa calcolare il tempo.	1- Li spingo a ragionare sulla velocità dell'acqua	
11,10	G3_1 G3_3 G3_4	Consegnano il lavoro		

Osservazioni
Riporto alcuni dei momenti significativi che ho riscontrato dall'analisi dei protocolli scritti ed orali. **G3_1 testo P2_Ipr_Me** Il gruppo arriva molto rapidamente ad una soluzione ma lo fa scrivendo una relazione che sembra derivare da un ragionamento non esplicitato o da problemi simili: $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{10}=\frac{1}{x}$ Svolgono poi i calcoli ottenendo x=5,45 che trasformano in 5 minuti e 27 secondi. Gli alunni non chiariscono bene l'origine della relazione anche se successivamente fanno vedere che per ogni pompa hanno calcolato il rapporto litri/minuti ottenendo i valori che hanno messo inizialmente nella prima relazione. **G3_2 testo P3_Dia_NM** Nel testo non compare alcun tipo di disegno o grafico. Iniziano calcolando il costo per diversi valori, usano i valori:50, 25, 10, 100, 60, 80, 120 Km. Quando chiedo una giustificazione dicono che stanno procedendo a tentativi ma non spiegano bene perché abbiano deciso di usare proprio

quei valori. Successivamente propongono una soluzione in questo modo:

0<d<20 opzione A

20<d<80 opzione C

80<d<120 opzione A

d>120 opzione B

In realtà il 25 viene mutato in un 20 dopo un ulteriore tentativo (che viene scritto successivamente). La strategia quindi è per tentativi, non vengono impostate equazioni per determinare i punti nei quali cambia la convenienza.

G3_3 testo P1_Dia_Mi

Nel testo vengono riportati i dati ma non viene fatto alcun disegno. Vengono calcolati per ogni rubinetto i litri che fuoriescono per ogni minuto. Nella prima pagina di calcoli che propongono (scritta a matita) sommano queste quantità (litri al minuto) ottenendo 10,8. Per ricavare il tempo inizialmente impostano una serie di proporzioni, l'impressione analizzando il testo è che non sappiano bene come utilizzare la proporzione e fanno diversi tentativi fino ad arrivare ad un risultato che ottengono comunque dividendo la capacità per la velocità totale e che sembrano successivamente giustificare con una proporzione. Nella trasformazione in dialogo di quanto fatto, parlano esplicitamente di "*velocità con cui l'acqua esce da ogni rubinetto*" ed utilizzano come unità di misura litri/min. Successivamente dicono che si deve trovare "*la relazione fra x la velocità e la dimensione (grandezza) del recipiente*" e propongono la formula :

$$\frac{Dimensione}{Tempo} = velocità = \frac{50l}{x_{min}} = 10{,}8l/min$$

Non è chiaro cosa intendano per velocità, inizialmente parlano di velocità dell'acqua poi la velocità diventa velocità come rapporto fra la dimensione del recipiente e tempo , non viene esplicitato in nessun punto il legame fra i due concetti. In ogni caso parlano di velocità.

Per risolvere l'ultima equazione dicono di utilizzare la "*regola del tre*" . Il risultato che ottengono è 4,269 che viene lasciato scritto in questo modo.

G3_4 testo P1_Dia_Me

Partono disegnando un tino cilindrico con tre rubinetti e riportando i dati significativi. Passano a calcolare per ogni rubinetto la quantità di acqua per minuto. Sommano poi le grandezze ottenute. Per ottenere il tempo impostano una proporzione con il significato: 10,8 (quantità di litri che escono in un minuto) sta ad 1 minuto come 50 (quantità complessiva di acqua) sta ad x (tempo incognito). Ricavano il tempo 4,6 minuti.

Gruppo G3_1 Problema P2_Ipr_Me

G3_1 x= tempo totale (1)

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{10}=\frac{1}{x}$$

$$\frac{3+2+6}{60}=\frac{1}{x}$$

$$\frac{11}{60}=\frac{1}{x}$$

$$60=11x$$

$$\boxed{x=5,\overline{45}}$$

$$\begin{array}{r|l} 60 & 11 \\ \hline 55 & 5,4545... \\ 50 & \\ 60 & \\ 50 & \\ 60 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 45 & 100 \\ x & 60 \end{array}$$

$$5x=135$$

$$\boxed{x=27}$$

$$\begin{array}{r} 5,45 \\ \times\ 3 \\ \hline 16,35 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 16,35 & 5 \\ \hline 15 & 3,267 \\ 13 & \\ 33 & \\ 35 & \end{array}$$

R: As três bombas juntas levariam 5 minutos e 27 segundos para encher a banheira completamente. t: tempo x: tempo totale

$$A=\frac{30\cancel{0}\,l}{2\cancel{0}\,min}=\boxed{15\,l/min} \qquad t=\frac{300\,l}{55}=\frac{60}{11}=\boxed{5,\overline{45}=t}$$

$$B=\frac{30\cancel{0}\,l}{3\cancel{0}\,min}=\boxed{10\,l/min}$$

$$C=\frac{30\cancel{0}}{1\cancel{0}}=\boxed{30\,l/min}$$

$$55\,l/min$$

$$\begin{array}{ll} 45 & 10\cancel{0} \\ x & 36\cancel{0} \end{array}$$

$$5x=135$$

$$\boxed{x=27}$$

Gruppo G3_2 Problema P3_Dia_NM

63-2

P3_Dia_NM

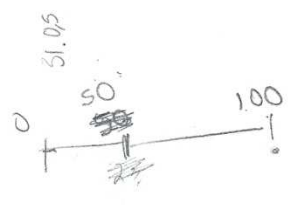
Alfredo está querendo alugar um carro para viajar no próximo domingo, então ele vai na agência onde conversa com Luisa, a responsavel por alugueis de carro:

A: "Bom dia, eu estava querendo umas informações sobre aluguel de carro, queria viajar no próximo domingo"
L: "Sim, que tipo de carro o senhor estava querendo alugar? Um carro popular, um carro de luxo ou algo de intermediário?"
A: "Não, um carro popular basta, não estou com necessidades particulares"
L: "Bom, então por este tipo de carro podemos lhe oferecer três diferentes opções, a primeira uma quantia fixa de 20 reais mais 0,25 reias por cada quilometro percorrido, a segunda uma quantia fixa de 26 reais mais 0,20 reais por quilometro percorrido e a terceira uma franquia de 50 Km por 25 reais mais 0,5 reais por Km percorrido"
A: "Então...o que significa franquia de 50 Km?"
L: ".. é a primeira vez que o senhor aluga um carro é?.."
A: " é sim...ha ha"
L: "Significa que se no domingo o senhor for percorrer uma distancia menor do que 50 quilometros, deverá pagar como se tivesse percorrido 50 quilometros"
A: "Entendi, então para escolher a opção mais conveniente eu teria que ter uma ideia de quantos quilometros iria percorrer..está certo?"
L: "Exatamente senhor Alfredo, é assim mesmo! O senhor deveria fazer uma estimativa do numero de quilometros que o senhor iria percorrer, dependendo do percurso, e depois decidir a opção mais conveniente pra o senhor"
A: "..então acho que vou pedir uma ajuda ao meu filho Marco, ele estuda engenharia e entende um pouco mais de matematica do que eu..depois vou voltar para combinar a opção"
L: "Está bem, então até logo, se quiser pode tambem ligar para reservar o carro"

Alfredo explica o problema para o filho que começa a escrever em um papel e a raciocinar em voz alta com seu pai :

M: "..se eu entendi bem podemos escrever matematicamente o custo das três opções da seguinte forma:

$$c_A = 20 + 0{,}25d \;\; ; \; c_B = 26 + 0{,}20d \;\; ; \; c_A = \begin{cases} 25 & 0 < d \le 50 \\ 0{,}5d & d > 50 \end{cases}$$



160 . 0,5 = 50

A: "O que são aqueles simbolos?"
M: "Na matematica as grandezas podem ser indicadas com simbolos e letras, neste caso as letras c indicam os diferentes custos dependendo da opção escolhida, d è a

3_2 (1)

$20 + 0,25 / km$

$26 + 0,20 / km$

$\frac{25 + 0,5}{50 \text{ km}}$ X

$C_A = 20 + 0,25d$; $C_B = 26 + 0,20d$; $C_A = \begin{cases} 25 & 0 < c \\ 0,5d & \end{cases}$

C = CUSTO

D = DISTÂNCIA PERCORRIDA EM KM

$:20 + 0,25 \cdot d$

$:26 + 0,20 \cdot d$

$\begin{cases} 25 & 0 < d \leq 50 \\ 0,5 \cdot d & d > 50 \end{cases}$

sendo $d = 10$ Km

$C_A = 20 + 2,5 = 22,5$ reais

$C_B = 26 = 2,0 = 28,0$ reais

$C_C = 25$ reais

sendo $d = 50$ Km

$C_A = 20 + 12,5 = 32,50$ Reais

$C_B = 26 + 10 = 36$ REAIS

$C_C = 25$ REAIS

sendo $d = 100$ Km

$C_A = 20 + 25 = 45$

$C_B = 26 + 20 = 46$

$C_C = 50$

sendo $d = 25$ Km

$= 20 + 6,25 = 26,25$ reais

$= 26 + 5 = 31$ reais

sendo $d = 60$ Km

$C_A = 20 + 15 = 35$ reais

$C_B = 26 + 12 = 38$ reais

$C_C = 30$ reais

S 3_2

(2)

sendo $d = 80$ km

$C_A = 20 + 20 = 40$ reais

$C_B = 26 + 16 = 42$ reais

$C_C = 40$ reais

sendo $d = 120$ km

$C_A = 20 + 30 = 50$ reais

$C_B = 26 + 24 = 50$ reais

$C_C = 60$ reais

sendo $0 < d < 20$ km → opção A

sendo $20 < d < 80$ km → opção C

sendo $80 < d < 120$ km → opção A

sendo $d > 120$ km → opção B

$C = C_A$

$20 + 0,25d = 25$

$0,25d = 5$

$\boxed{d = 20}$

$26 + 0,20d = 25$

$0,20d = -1$

$d = -5$

$C_A \begin{cases} 20 + 0,25 \cdot d \\ -26 - 0,20 \cdot d \end{cases}$

$-6 + 0,5d$

$26 + 0,20d = 0$

$0,20d = -26$

$\boxed{d = -130 \text{ km}}$

$\frac{26d + 0,25}{d}$

$\frac{26d + 0,20}{d}$

Gruppo G3_3 Problema P1_Dia_Mi

Henrique, maria cândida, Daniel e Ana gabrielle (1)

G 3-3

tan. 50 l

↳ cilíndrica e graduada

3 torneiras de diâmetros diferentes no fundo

1ª torneira 10 m (5 l/min)

2ª torneira 15 m (3,$\overline{3}$ l/min)

3ª torn. 20 m (2,5 l/min)

Como Carlos poderá raciocinar quanto tempo levará para esvaziá-lo com as 3 torneiras abertas? Como poderá prosseguir o diálogo?

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x} \qquad \frac{50}{10} = 5$$

$$\frac{x}{y} = \frac{K}{T}$$

$$\frac{50}{10} = 5$$

5,0 +
3,3 +
2,5 =
10,8

$$\frac{50}{x} = 10,8$$

$$\frac{50\,l}{x\,min} = \frac{10,8}{1} \text{ l/min}$$

$$\frac{x}{50} = \frac{1}{10,8}$$

50

$$\frac{50}{x} = 10,8 \qquad \frac{50}{10,8} = x \qquad \frac{50}{10,8} = 4,62$$

G3_3 Henrique, maria cândida, Daniel e Anna Gabrielle (2)

Dati=

tam. 50 l.

↳ · cilindrica e graduada

3 torneiras de diametros diferentes no fundo

1ª torneira 10m (5 l/min)

2ª torneira 15m (3,3̄ l/min)

3ª torneira 20 m (2,5 l/min)

Obb =

Como Carlos poderá raciocinar quanto tempo levará para esvaziá-lo com as 3 torneiras abertas?

Como poderá prosseguir o diálogo?

R=

- Carlos= Podemos calcular esse resultado dentro de 5 passos.

- mario = quais?

- Carlos= o primeiro é calcular a velocidade que a água sai em cada torneira=

1ª T. = 10 m (5 l/min)

2ª T.= 15 m (3,3̄ l/min)

3ª T. = 20 m (2,5 l/min)

O segundo passo é somar as três informações = $5{,}0\frac{l}{m} + 3{,}3\frac{l}{m} + 2{,}5\frac{l}{m} =$ 10,8 l/m

O terceiro passo é descobrir a relação entre "x" a velocidade e o tamanho do recipiente, ou seja =

$\frac{\text{Tamanho}}{\text{tempo}} = \text{velocidade} = \frac{50\,l}{X\,min} = 10{,}8\ l/min$

G3-3 Henrique, maria cândida, Daniel e Anna Gabrielle (3)

Continuação

O quarto passo é usar a regra de 3 para descobrir o valor de x =

$$\frac{50\ l}{x\ min} = \frac{10{,}8\ l/min}{1}\ min$$

$$\frac{x}{50} = \frac{1}{10{,}8}$$

$$10{,}8x = 50$$

$$x = \frac{50}{10{,}8}$$

$$4{,}\overline{629} = \frac{50}{10{,}8}$$

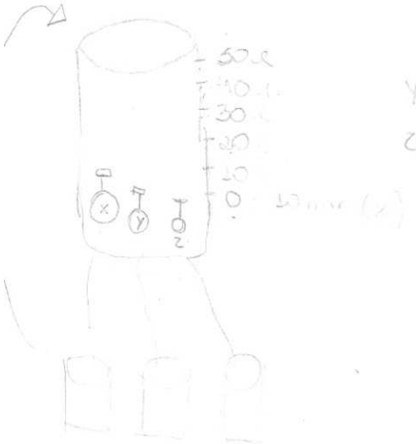
$$\boxed{4{,}\overline{629} = x}$$

- Carlos = E o resultado vai ser $4{,}\overline{629}$

- Mario = parabéns filho! Vamos testar agora, mas você acha que a velocidade vai ser sempre a mesma?

- Carlos = Eu calculei a velocidade média. pode ter alguma mudança mas não sei como calcular isso.

G3_4 (1)



x = 10 min
y = 15 min
z = 20 min

→ 50 l diviso il tempo di ogni "torneira"

X → 10 l → 5 l por minuto
Y → 15 l → $3,\overline{3}$... l por minuto
Z → 20 l → 2,5 l por minuto
X, Y, Z → 10,8 l por minuto → somma

l	minuto
10,8	1
50	x

proporzione

50 = 10,8 x

$\boxed{x = 4,6 \text{ minuti}}$

R: Podemos dividir os 50 l pelo tempo de cada torneira, e depois somá-los para ver quantos litros sairão em 1 minuto com a 3 torneiras abertas ao mesmo tempo.

Descobrimos que em 1 minuto saem 10,8 l, os 50 l levam 4,6 minutos, de acordo com a proporção.

M → Ma certo, con la pressione dell'acqua la velocità cambia, quindi non è costante.

C →

Quarto incontro 23/03/2012

Contesto e metodologia	**Contesto di classe**: 2° liceo scientifico della Fundaçao Torino, composta da 17 alunni. Il loro insegnante di matematica e fisica (Prof. Stefano Camerani) mi dice che questa è una classe buona con diversi alunni molto capaci. In questa scuola il liceo è organizzato, come le altre scuole superiori brasiliane, in quattro anni. Tuttavia il programma è uguale a quello del liceo italiano e quindi i tempi per gli apprendimenti sono velocizzati (le ore settimanali sono 4 di matematica e 4 di fisica). In questa classe l'insegnante curricolare ha già iniziato lo studio della geometria analitica, e dopo avere studiato la retta sta sviluppando lo studio della circonferenza. **Adattamenti necessari**: gli alunni sono praticamente tutti di madrelingua portoghese. L'offerta formativa della scuola prevede che alcune delle materie siano insegnate in italiano, fra le quali matematica e fisica. Gli alunni parlano tutti abbastanza bene l'italiano e lo capiscono. Per evitare problemi relativi alla comprensione del testo ho tradotto in portoghese i testi proposti. Il resto delle attività si è svolto, da parte mia, in italiano e da parte degli alunni sia in italiano (produzioni orali e scritte) che in portoghese. **Metodologia:** come previsto dal progetto di sperimentazione, la classe è stata suddivisa, con l'aiuto dell'insegnante, in tre gruppi omogenei.(vedere allegati). A ciascuno dei gruppi è stata consegnata una scheda con il problema da risolvere (allegati) e fogli con un codice di gruppo per le loro produzioni scritte. L'insegnante è rimasto in classe ed è intervenuto solo marginalmente nelle attività. L'accordo era che avrebbe potuto partecipare alle attività secondo modalità concordate (vedere progetto). Le attività sono state registrate con un registro scritto che viene riportato sotto, e con filmati.

REGISTRO ATTIVITA'
L'orario nel quale si è svolta la sessione andava dalle 14,00 alle 15,50.L'attività e cominciata con una mia breve presentazione e con la spiegazione del tipo di attività proposta. Ho chiarito che l'attività è una attività di sperimentazione di dottorato e che il mio obiettivo è osservare quello che accade durante il loro lavoro, specificando che: - La mia attività consisterà nell'osservarli, registrando ed eventualmente filmando quello che fanno - Il tipo di interazione dipende dal tipo di problema che stanno affrontando e non da altri fattori personali

- All’interno di ogni gruppo ci deve essere collaborazione ma non fra gruppi diversi, visto che questo potrebbe incidere sui risultati
- Ogni gruppo deve cercare di scrivere, spiegando e disegnando tutto quello che viene proposto, anche se non immediatamente utile per la soluzione del problema assegnato

Tempo	Gruppo	Evento	Azione Sperim.	Azione Insegn.
14,15		Consegna testi		
14,20	G4_2	Chiedono il significato di “graduada”	Spiego che significa che ci sono linee con numeri	
14,25	G4_4	Dicono di avere terminato (nel loro foglio non compaiono disegni)	Chiedo di scrivere la spiegazione di quanto hanno fatto	
14,26	G4_3	Dicono di avere terminato (nel loro foglio non compaiono disegni)	Chiedo di scrivere la spiegazione di quanto hanno fatto	
14,30	G4_1	Chiedono cosa debbano fare, cosa chiede il problema	Spiego che dovrebbero determinare un metodo generale per determinare, dato il numero di Km, l’opzione più conveniente	
14,32	G4_2	Dicono di avere terminato e scrivono alla fine che la pressione non verrà considerata.	Chiedo di spiegare meglio quello che hanno detto sulla pressione ed i passaggi fatti.	
14,35	G4_3	1-Dicono di avere terminato. 3-Chiedono se devono fare un dialogo	2-Il testo è semplicemente una trascrizione scritta di quello che hanno fatto. Chiedo che spieghino meglio perché hanno sommato le grandezze. 4-Dico che dovrebbero trasformare il lavoro fatto in un dialogo che prosegua il dialogo dato	
14,40	G4_1	Chiedono chiarimenti sull’opzione C. In particolare non è loro chiaro come	Spiego il significato della funzione. Io gesticolo nello spiegare la situazione come	Dice che nel punto corrispondente

		interpretare il termine additivo e la distanza. Una alunna chiede se è da interpretare come distanza dopo i 50 Km. (In realtà potrebbe essere una interpretazione alternativa ma equivalente)	se le mie mani si spostassero su di una linea.	ai 50Km le due funzioni “si congiungono”
14,43	G4_4		Chiedo cosa fanno e leggo il testo. Chiedo di spiegare perché hanno sommato le grandezze. Chiedo che tipo di grandezza è L/minuti	
14,45	G4_2	1-Mostrano quello che hanno scritto. Pare che giustifichino la somma dicendo che la pressione è trascurata. 3- Mi pare di capire che il loro ragionamento sia il seguente: se si aprono i tre rubinetti, la pressione che spinge l’acqua sarà minore rispetto a quando un solo rubinetto è aperto. Questo influisce sulla velocità, ma gli alunni dicono di trascurare questo effetto.	2-Chiedo di spiegare meglio 4-Chiedo di trasformare il loro lavoro in un dialogo che prosegua quello del testo	
14,47	G4_3	Mostrano il dialogo (parziale) dove in realtà la somma non viene giustificata	Chiedo di proseguire il dialogo	
14,50	G4_1	Rispondono che stanno provando diversi valori 5,10, 20 e si sono accorti che a 20 Km cambia qualcosa. La ragazza gesticola come se la mano si spostasse su di una linea	Chiedo cosa stiano facendo	
14,55	G4_4	Dicono di avere finito. Chiamano la grandezza L/tempo “vazao” ovvero		

		"portata" e cercano di giustificare l'operazione di somma		
15,00	G4_4	Dicono che la parola "juntas" ovvero "assieme"(riferito alle pompe quando funzionano contemporaneamente) è stata utile. Un alunno dice che la frase che a mio avviso doveva funzionare come metafora esplicita ("*Possiamo immaginare la capacità della vasca come una distanza da percorrere*") è stata notata sin dall'inizio ma non è servita per ragionare sul problema.	Chiedo quale parte del testo li ha maggiormente aiutati nella soluzione del problema	
15,05	G4_1	2-Dicono di non avere ancora trovato un metodo	1-Vedo che continuano ancora a procedere per tentativi. Li spingo a considerare che il problema è stabilire i valori (uso la parola punti), dove cambia la convenienza. Come si può fare a trovarli?	
15,07	G4_4	Un ragazzo dice che si potrebbe pensare ad associare 300 l a 300 Km, 10 l/min a 10 Km/h, ed analogamente per gli altri ma poi si chiede che senso avrebbe sommare queste velocità?	Chiedo di riflettere sulla frase (met.esplicita). Chiedo se c'è qualche somiglianza col problema posto.	
15,12	G4_2	2-Arrivano velocemente ad intuire che la velocità diminuisce mentre l'acqua scende. (Questo tipo di effetto è diverso da quello che hanno descritto in precedenza)	1-Pongo il problema della pressione durante la fuoriuscita di acqua. Siamo sicuri che la velocità sia costante (dal loro ragionamento traspare che la stanno considerando tale) 3-Propongo loro di pensare a	

			come possa cambiare la soluzione, se cambia	
15,15	G4_3		Leggo il dialogo che si sofferma molto sulla regola del tre . Chiedo che tipo di grandezza sia L/tempo	
15,20	G4_4	1-Leggo il testo e dicono che non riescono a pensare ad un problema simile perché non si riesce ad utilizzare la parola “contemporaneamente ” (juntas) in maniera sensata. Ovvero non riescono a capire a che tipo di situazione corrisponde il funzionamento contemporaneo delle pompe nel nuovo problema con velocità e macchina. 3-Un alunno dice allora che “*è lo stesso problema*”	2-Faccio vedere come si possa pensare ad una solo macchina dove la velocità si somma. 4-Propongo di “tradurre” il problema di partenza in un nuovo problema che tratti di velocità e distanze.	
15,25	G4_3	Dicono che la grandezza è una “concentrazione”, anche se un alunno dice che è come Km/h	Propongo di cercare una grandezza più comune, più facile da capire da parte di chiunque (anche da chi non conosce la fisica o la chimica)	
15,29	G4_1	1-Spiegano la loro soluzione, che pare esatta, alla quale sono arrivati per tentativi e “*scoprendo delle regolarità* “ 4-Una ragazza di dice che lei ha pensato sin dall’inizio ad una retta o ad un moto rettilineo uniforme	2-Chiedo di spiegare bene 3-Chiedo loro che cosa sia l’espressione y=….(eq. Di una retta)	
15,35	G4_4		Leggo il testo “tradotto” che pare sensato	
15,37	G4_3	Dicono che è la 2° frase (quella del papà) perché ci sono più dati	Chiedo quale frase/parola è stata più utile per la soluzione	

15,38	G4_1	1-Disegnano le rette 3-Una alunna dice che si devono mettere a sistema le rette 5-capiscono subito e si meravigliano di come si possa risolvere il problema in maniera più veloce con questo metodo	2-Chiedo come si possano sfruttare le rette disegnate per determinare i punti nei quali cambia la convenienza 4-spiego come sfruttare il grafico delle rette per ottenere la soluzione del problema	
15,39		Tutti i gruppi consegnano		

Osservazioni

G4_1 testo P3_Ipr_Mi

La maggior parte delle cose scritte sono calcoli. In sostanza tentano diversi valori e calcolano il costo di ogni opzione per poi vedere quale è la più conveniente. Procedono poi aumentando la quantità di chilometri in maniera regolare (con variazioni di 20Km) per dedurre quali sono i punti nei quali la convenienza cambia. Infine dicono di avere “scoperto” che se x è il numero di Km del viaggio:

se x< 20 allora conviene l’opzione A

se 20< x < 80 allora conviene l’opzione C

se 80< x < 120 allora conviene l’opzione A

se x> 120 allora conviene l’opzione B

Non è comunque evidente come arrivino a questo risultato.

Infine utilizzano il foglio del testo del problema per fare un grafico (in seguito ad una mia richiesta esplicita). Costruiscono un grafico qualitativamente corretto ma senza unità di misura e senza valori ma dove le caratteristiche delle rette sono sostanzialmente corrette.

G4_2 testo P1_Dia_NM

Nel testo gli alunni riportano i dati e fanno un disegno, scrivendo subito che la pressione sarà diversa se tutti i rubinetti vengono aperti. Calcolano poi per ogni rubinetto quanti litri al minuto vengono versati. Sommano le quantità ottenute ed impostano una proporzione per ricavare il tempo complessivo ricavando il tempo=4,63 minuti. Dicono che la presunta diminuzione di velocità dovuta alla diminuzione di pressione con tutti i rubinetti aperti non viene considerata. Non spiegano tuttavia come cambia la soluzione. Dicono che l'operazione di somma è giustificata dal fatto che non viene considerata la diminuzione di pressione dovuta a tutti i rubinetti aperti, ma non spiegano ulteriormente questa operazione. Nel dialogo finale che propongono ripercorrono le tappe che secondo loro sono state più significative per la soluzione del problema: il calcolo riferito all'unità di tempo di 1 minuto, la somma di tali grandezze (parlano di velocità ma anche di quantità di acqua per minuto), il fatto che (secondo loro) aprendo i rubinetti contemporaneamente la pressione e quindi la velocità sarebbe minore e quindi il tempo aumenterebbe ma questo fatto viene trascurato, nemmeno nel dialogo viene giustificata l'operazione di somma.

G4_3 testo P2_Dia_Mi

Il testo inizia con il calcolo della quantità di acqua per minuto con cui ciascuna pompa riempie la vasca che calcolano con la "regola del tre" , sommano le portate e, ancora con la regola del tre, ricavano il tempo necessario per riempire la vasca, ottenendo il tempo 5,45 minuti. Nel dialogo parlano esplicitamente di *velocità* di ogni pompa (in una maniera apparentemente incoerente visto che dicono "velocità di ogni pompa per minuto" ma probabilmente intendendo che stanno usando come unità di tempo il minuto). Nel dialogo viene riportata la mia domanda "*Perché voi sommate le velocità delle pompe*?" e la "spiegazione " sarebbe: "*Se la pompa rossa riempie la vasca con 15 litri in un minuto, la gialla con 10 e la verde con 30, possiamo concludere che se le facciamo funzionare contemporaneamente* per *riempire la vasca , la prima la riempirà con 15 litri, più i 10 litri della seconda e più i 30 litri della terza, avremo riempito la vasca con 55 litri*", si soffermano poi a spiegare la regola del tre.

G4_4 testo P2_Ipr_Me

Iniziano calcolando i litri per minuto di ciascuna pompa, sommano le grandezze ottenute ed infine dividono la capacità della vasca per tale totale ottenendo il valore del tempo che riescono a trasformare in 5 minuti e 27 secondi con una opportuna proporzione (la loro "regola del tre"). Giustificano l'operazione di somma delle grandezze dicendo che in ogni minuto le quantità di acqua con ogni pompa versa nella vasca vanno *unite*. Infine propongono, a seguito della mia richiesta, un possibile problema che "traduce " il problema dato un problema che tratta di velocità e distanze da percorrere: "*Dobbiamo percorrere uno spazio di 300m. In un primo esperimento la macchina usata ci mette 20 minuti. Nel secondo esperimento ci mette 30 minuti . E l'ultima misura ha dato un tempo di 10 minuti. Quanto tempo impiegherà la macchina per percorrere i 300 m se si sommano tutte le velocità?*"

G4_1 problema P3_Ipr_Mi

P3_Ipr_Mi

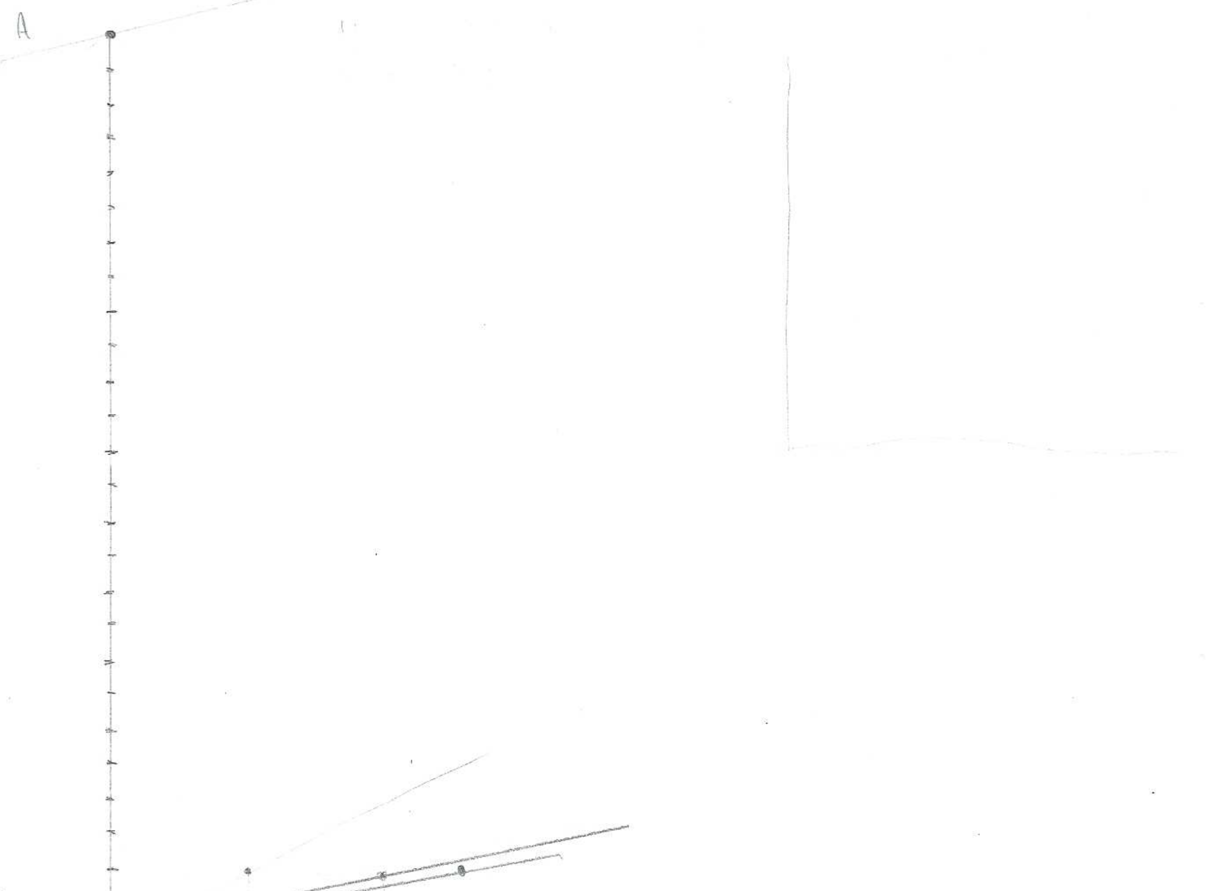
Querendo alugar um carro para viajar por um dia, imaginamos ter três possiveis opções:

A- Quota fixa de 20 reais mais 0.25 reais por Km percorrido
B- Quota fixa de 26 reais mais 0,20 reais por Km percorrido
C- Franquia de 50 Km (ou seja para distância percorrida inferiores a 50 Km serão de qualquer modo pagos 50 Km) mais 0,5 reais por Km percorrido.

Então podemos exprimir matematicamente o custo em função dos Km percorrídos das três opções como segue:

$A: y = 0{,}25x + 20$; $B: y = 0{,}20x + 26$; $C: y = \begin{cases} 25 & 0 < x \leq 50 \\ 0{,}5x & x > 50 \end{cases}$ *onde x è a distância percorrida em Km e y é o custo.*

Qual das três opções convem adotar em função do número de Km que pretendemos percorrer?



G4-1 P3_IPr_Mi

24h → 1 giorno

se $X = 51$ →

A: $y = 12{,}75 + 20$
$y = 32{,}75$

B: $y = 10{,}20 + 26$
$y = 36{,}20$

C: $y = 25{,}50$

0,25 · 51 = 025 + 1250 = 12,75

0,20 · 51 = 020 + 1000 = 10,20

0,5 · 51 = 05 + 250 = 25,5

1,25

2,5 | 2

102 · 0,5 =

se $X = 20$ →
$A = C = 25$
$B = 30$

se $X = 40$ →
$A = 30$
$B = 34$
$C = 25$

	60	80		100		110	120
A	35	40	42,5	45	47,5		50
B	38	42	44	46	48		50
C	30	40	45	50	55	55	60

140 160 180

se $X = 120$ →
$A = B = 50$
$C = 60$

$X < 20$ → A è più conveniente
$20 < X < 80$ → C è più conveniente
$80 < X < 120$ → A è più conveniente
$X > 120$ → B è più conveniente

85	180
41,25	65
43	62
42,5	90

$X = 20$ → $A = C$
$X = 80$ → $A = C$
$X = 120$ → $A = B$

	140	160	180	200	220	240
A	55	60	65	70	75	80
B	54	58	62	66	70	74
C	70	80	90	100	110	120

	101	102	103	105	107	108
A	45,25					
B	46,20					
C	50,50					

78	82	86	90	94	98	102
85	90	95	100	105	110	125

G4_1 P3_1tr_M:

101 ·
0,25
505+
2020+
00000=
025,25+

101 ·
0,20
000+
2020+
1000=
20,20+

(2)

0,20 ·
50
000+
1000=
10,00

101 ·
0,5
505+
+20,5×50 0000=
5,05

1 2
0,25 ·
50=
000+
1250=
12,50

se X = 0,50 B = 36
A = 12,50
C =

$\frac{120}{2} = 60$

85

25 L2
01 12

400 L4
100+
20
A 120

400 L5
0 80+
26
B 106

$\frac{400}{2} = 200$

C

200 L4
50+
20
A = 70

200 L5
40+
26
B = 66

$\frac{200}{2} = 100 = C$

100 L4
A = 25+
20
A 45

100 L5
20+
26
B = 46

$\frac{100}{2} = 50 = C$

A = 110 X
0,25 =
550+
2200+
00000

~~110 X~~
B = 48,20

C = 110 ·
110 L2
10 55

1 - 10 - 20 ⇒ descobriu

20 ⇒ 20 ⇒ 20
40 60 - 80

Parametri

di 20 in 20

A + 5

B + 4

e apartie di 60

C + 10

Fazendo isso ate x = 380
abbiamo descoberto che

20

In un primo tentativo abbiamo ugualato x a 1, 10 e 20. Quando abbiamo fatto i conti, siamo arrivati alla conclusione che A = C. Da questo punto in poi abbiamo ugualato x con valori con un intervalo 20 km. Così abbiamo scoperto i seguenti parametri (di 20 km in 20 km) - A aumentava di 5, B di 4 e a partire di 60 km C aumentava di 10. Cercavamo di trovare un valore in cui B = C e abbiamo continuato il processo (di 20 in 20) fino a 380 km. E in fine abbiamo scoperto che:

$20 < x < 80 \Rightarrow$ C è più conveniente

$80 < x < 120 \Rightarrow$ A è più conveniente

$x > 120 \Rightarrow$ B è più conveniente.

G4_2 problema P1_Dia_NM

G4-2 P1_DIA_NM

1

T1 = 10min   T2 = 15min   T3 = 20min   Tanque = 50l

- pressão será diferente se todas forem abertas contemporaneamente

T1 → 50l em 10min → 5l por min

T2 → 50l em 15min → 3,3l por min

T3 → 50 em 20min → 2,5l por min

A quantidade de água, que sairá por minuto do tanque se todas as torneiras forem abertas será igual à soma da quantidade de água em litros que sai de cada torneira por minuto.

10,8 L → 1 min $10{,}8X = 50$

50 L → X $x = 4{,}63$ min

Desconsiderando a pressão, porque esta seria menor com todas as torneiras abertas do que seria com somente uma dessas aberta. Quanto menor a pressão menor seria a velocidade da água ao sair da torneira.

→ Se pela torneira sairão 50 L em x tempo (min), para chegar à quantidade de água por minuto devemos dividir pelo x (min)

→ Desconsiderando a pressão, a quantidade de água que sairia das torneiras se abertas simultaneamente por minuto seria igual à soma das quantidades saídas por essas separadamente

À medida que a quantidade de água dentro do tanque for diminuindo menor será a pressão exercida sobre a quantidade restante, ou seja a velocidade não será constante, mas diminuirá gradualmente.

Se considerada a pressão o cálculo seria igual, porém sobre o resultado final teria de se considerado a influência desta. Pois nos cálculos iniciais ela é considerada (como, por exemplo, na quantidade de água saída de cada torneira por minuto), somente no total que ela foi ignorada

P1_Dia_NM

2

e você descobrir a quantidade em litro por minuto será mais fá-

depois se eu somar a quantidade de água por minuto das três
, poderei encontrar a quantidade equivalente àquela das três
juntas abertas.

você desconsiderar a pressão, porque se considerar o tempo vai ser
te.

e! Quanto maior a pressão maior a velocidade, se todas forem
o mesmo tempo a pressão de cada uma vai ser menor, o que
que o tempo aumente.

esconsidere. E depois é só você fazer a soma pra descobrir quantos
ão sair do tanque quando todas as torneiras estiverem abertas por
epois é só fazer a regra de três pra descobrir o tempo [illegible]

G4_3 problema P2_Dia_Mi

t-3 P2_Dia_Mi (1)

300 litros

BOMBA VERMELHA: 20 min → 15l/min
" AMARELA : 30 min → 10l/min
" VERDE . 10 min → 30l/min

20 — 300 $\quad 20x = 300 \quad x = \frac{30}{2} \quad x = 15$ l/min
1 — x

30 — 300 $\quad 30x = 300 \quad x = 10$ l/min
1 — x

10 — 300 $\quad 10x = 300 \quad x = \frac{30}{1} \quad x = 30$ l/min
1 — x

c/ as três:

1min — 55
x — 300

$55x = 300$

$x = \frac{300}{55}$

$X = 5,\overline{45}$ min

300 | 55
-275 | 5,4545
250
-220
300
-275
250
-220
300

55 × 5 = 275
55 × 4 = 220
55 × 6 = 33[illegible]

G 4_3 P2_Dia_Mi (2)

Primeiro descobrimos a velocidade de cada bomba por min, através da "regra de três". Depois somamos a quantidade de litros que cada bomba enche por minuto. Ximo, pegamos o resultado da soma e fizemos a regra de três comparando com a capacidade máxima de litros da banheira, que é de 300 litros, e o resultado da conta será 5,$\overline{45}$ minutos."

"Mas porque você somou as velocidades das bombas em l/min?"

:"Pois bem, se a bomba vermelha enche 15 litros por minuto, a Amarela 10 litros e a verde 30 litros, podemos concluir que se as ligarmos simultaneamente para encher a banheira, a primeira encherá 15 litros, mais os 10 litros da segunda e mais os 30 litros da terceira, teremos enchido então 55 litros."

:"Mas como você chegou a esse tempo final?"

1:"Já te falei menino! Basta fazer a regra de três, considerando: se em 1 minuto as 3 bombas enchem 55 litros, em quantos minutos essas mesmas encherão 300 litros."

G:"E como se calcula uma regra de três?"

4:"Você não vai para a escola não menino?! Bem, você deve montar o seguinte esquema: coloque determinado tipo de tempo no qual são enchidos tantos litros; escreva-o desta maneira:

1 min ——— 55 l

Agora, abaixo do tempo que você considerou 1 minuto, você vai colocar o tempo que você deseja descobrir, e como não conhecemos, o explicitaremos como uma incógnita. E debaixo da quantidade de litros, você colocará a quantidade de litros que a banheira suporta. Sendo assim, o esquema ficará desta maneira:

1 min ——— 55 l
x ——— 300 l

Agora, você multiplicará cruzado, ou seja, 1 vezes 300 e 55 vezes X. Assim você terá montado uma equação com cada multiplicação de um lado da mesma. O resultado será o tempo que leva para encher a banheira. Mais alguma pergunta?

G: "Sim, tenho mais uma. Qual tipo de grandeza?"

M: "Bem, litros por minuto é uma quantidade que nos diz quantos litros eu vou ter em 1 minuto. Não posso te explicar, pois as coisas mais simples são as mais difíceis de explicar."

G4_4 problema P2_Ipr_Me

G4-4 P2_lpr_Me (1)

$V_B = 300 L$

$\frac{300}{55} = \frac{60}{11}$ 5,45

$Bomb_A = 15 L/m$

$Bomb_B = 10 L/m$

$Bomb_C = 30 L/m$

$Bomb_{A+B+C} = 55 L/m$

= 2700

x = 27

$T_{A+B+C} = 5,45$ min

- O tempo empregado pelas 3 bombas juntas será de 5 minutos e 27 segundos

- Dividimos o volume da banheira pelo tempo gasto por cada bomba obtendo a quantidade de litros por minuto somando os três valores, descobrimos quantos litros as três bombas juntas podem bombear. Dividindo o volume da banheira pelo valor obtido, concluímos que as três bombas demoram 5 minutos e 27 segundos para encher a banheira.

- Consideramos o intervalo de 1 minuto. A bomba A bombeia 15 litros, a B 10 Litros e a C, 30 Litros. Como devemos unir os resultados obtidos optamos pela operação de soma

- A grandeza obtida (L/m) é chamada vazão

- Se transformamos os 300 litros em quilômetros, G4_4 P2_Irr_Me 2

-Transformando o problema em distância a ser percorrida
Precisamos percorrer um espaço de 300 m. Em um
rimeiro experimento, o automóvel usado gastou 20 minut
/o segundo experimento gastou 30 minutos. Em uma
tempo de 10 min.

Quinto incontro 28/04/2012

Contesto e metodologia	**Contesto di classe**: 3° liceo scientifico del Polo "Montessori-Da Vinci" di Porretta Terme, composta da 22 alunni. Il loro insegnante di matematica e fisica (Prof. Paladini) mi dice che questa è una classe in generale abbastanza buona ma con alcuni alunni con difficoltà. In questa classe l'insegnante curricolare ha già iniziato lo studio della geometria analitica ed ha terminato lo studio dell'ellisse, in fisica stanno studiando la dinamica. **Metodologia:** come previsto dal progetto di sperimentazione, la classe è stata suddivisa, con l'aiuto dell'insegnante, in tre gruppi omogenei. A ciascuno dei gruppi è stata consegnata una scheda con il problema da risolvere e fogli con un codice di gruppo per le loro produzioni scritte. L'insegnante è rimasto in classe ed è intervenuto solo marginalmente nelle attività. L'accordo era che avrebbe potuto partecipare alle attività secondo modalità concordate (vedere progetto). Le attività sono state registrate con un registro scritto che viene riportato sotto.

REGISTRO ATTIVITA'
L'orario nel quale si è svolta la sessione andava dalle 10,30 alle 12,30.L'attività e cominciata con una mia breve presentazione e con la spiegazione del tipo di attività proposta. Ho chiarito che l'attività è una attività di sperimentazione di dottorato e che il mio obiettivo è osservare quello che accade durante il loro lavoro, specificando che: - La mia attività consisterà nell'osservarli, registrando ed eventualmente filmando quello che

fanno

- Il tipo di interazione dipende dal tipo di problema che stanno affrontando e non da altri fattori personali
- All’interno di ogni gruppo ci deve essere collaborazione ma non fra gruppi diversi, visto che questo potrebbe incidere sui risultati
- Ogni gruppo deve cercare di scrivere, spiegando e disegnando tutto quello che viene proposto, anche se non immediatamente utile per la soluzione del problema assegnato

Tempo	Gruppo	Evento	Azione Sperim.	Azione Insegn.
10,43		Consegna testi		
10,54	G5_1	Iniziano facendo un disegno		
10,55	G5_3	Fanno un disegno		
10,55	G5_6	Si riorganizzano (un alunno si sposta) in modo da leggere tutti insieme il testo		
10,56	G5_4	Una ragazza chiede se può usare il quaderno degli appunti di matematica perché pensa che le possano servire le progressioni aritmetiche e geometriche	Chiedo perché	
10,58	G5_1	Dicono di avere finito		
11,00	G5_2	Iniziano a disegnare un grafico		
11,02	G5_6	Chiedono un chiarimento su come si interpreta la terza opzione	Spiego e confermo quello che avevano già capito	
11,06	G5_4	Dicono di avere terminato	Chiedo di spiegare come hanno ragionato, scrivendo i vari passaggi	
11,08	G5_6	Stanno cercando di capire quale sia più conveniente provando alcuni valori. Non fanno alcun disegno Un ragazzo dice che stanno	Chiedo cosa stiano facendo	

		provando per tentativi		
11,10	G5_2	Una alunna mi spiega che intendono usare il grafico (retta) per capire meglio cosa convenga fare	Chiedo cosa stiano facendo	
11,13	G5_5	Dicono di avere finito	Chiedo di spiegare bene quello che hanno fatto e di trasformarlo in un dialogo	
11,14	G5_3	Dicono di non sapere cosa fare	Chiedo cosa stiano facendo	
11,15	G5_3	1-Il primo tentativo, che poi scartano, è un sistema nel quale dicono di usare il tempo e lo spazio. 3-Dicono che lo spazio è quello che è sul cilindro graduato	2-Chiedo che cosa sia lo spazio	
11,17	G5_4	Dicono di avere terminato	Chiedo di giustificare l'uso della somma per le grandezze trovate	
11,19	G5_6	Dicono che devono trovare le diverse fasce e che devono fare molti calcoli. Un ragazzo dice che secondo lui potrebbe essere utile sfruttare il moto uniformemente accelerato. Si chiedono se ci sia un processo matematico diverso dai tentativi che stanno facendo (capiscono che non può essere questo il metodo migliore)	Chiedo in quale modo stiano procedendo.	
11,23	G5_1	Un alunno dice che è la velocità con cui si svuota , invece dello spazio ci sono i litri	Chiedo come definire la grandezza litri/minuto	

11,25	G5_1		Chiedo perché sommino le grandezze	
11,27	G5_3	2-Spiegano che calcolano il numero di litri che ogni foro lascia passare ogni minuto, poi sommano..ma non sono convinti	1-Chiedo cosa stiano facendo 3-Chiedo di scrivere queste cose spiegandole	
11,29	G5_4	2-Hanno risposto alla domanda che avevo fatto	1-Chiedo cosa stiano facendo 3-Chiedo di trasformare in dialogo quello che hanno scritto	
11,31	G5_6	Hanno iniziato a disegnare un grafico ma sembra (inizialmente) che sia solo un modo per verificare i risultati ottenuti a tentativi. Un alunno dice che ha sfruttato una frase del testo dove si dice di interpretare le equazioni come rette.		
11,37	G5_5	Un ragazzo chiede se il rapporto litri /tempo è una velocità e se la distanza può essere interpretabile come l'altezza della vasca (un altro alunno nota che tale dato non c'è)		
11,40	G5_1		La "spiegazione" che forniscono non è in realtà una spiegazione ed io chiedo nuovamente di spiegare perché sommino le grandezze	
11,41	G5_2	Una alunna spiega che il disegno serve per trovare le intersezioni dove avviene un cambiamento nella convenienza fra una opzione e l'altra		

11,43	G5_5	Chiedono se possono usare il libro di fisica per consultare la legge oraria del moto	Dico che possono ma che dovrebbero poi scrivere come lo hanno usato nel loro testo	
11,47	G5_2	Dicono che è chiaro dal problema e si trova anche nel testo (dopo che lo faccio notare)	Chiedo perché abbiano iniziato subito a sfruttare le rette	
11,49	G5_1	2-Un alunno dice subito che all'inizio sarà maggiore e poi minore. 4-Una alunna dice di si, un altro non è convinto	1-Chiedo se la velocità sia costante durante la caduta. 3-Chiedo se questo può influire sul risultato da loro ottenuto	
11,50	G5_4	1-Dicono di avere finito	2-Chiedo se ci sono relazioni fra il problema proposto ed il problema di una macchina che deve percorrere un certo tragitto.	
11,52	G5_6	Cercano di sfruttare il grafico per ottenere i risultati già ottenuti per tentativi	Chiedo cosa stiano facendo	
11,55	G5_5	2-Hanno cercato le formule relative al moto rettilineo uniforme ma dicono che non servono	1-Chiedo quali formule stiano cercando sul testo di fisica	
12,01	G5_2	Una alunna sta continuando con il metodo grafico. Gli altri hanno provato procedere per tentativi	Chiedo cosa stiano facendo	
12,02	G5_1	Dicono che il risultato non cambia perché si tratta di velocità medie		
12,04	G5_6	Hanno difficoltà nell'interpretazione del grafico. Una alunna inizia a trovare l'intersezione fra rette	Chiedo come possano sfruttare il grafico dopo che lo hanno disegnato bene	

12,12	G5_4	1-Trovano una corrispondenza fra i due domini	2-Propongo loro di inventare un problema simile a quello dato ma nel nuovo dominio (macchina e tragitto)	
12,14	G5_3		Faccio notare che la velocità di uscita non è costante nel tempo e chiedo se questo influisce sul risultato	
12,16	G5_5	Individuano una buona metafora che collega i due domini	Chiedo di trasformare in dialogo quello che hanno fatto	
12,18	G5_1		Chiedo se il risultato è esatto o è una approssimazione	
12,19	G5_2	I due metodi non sono completamente coerenti, risulta che sono in difficoltà su una particolare scelta	Spiego quello che dovrebbero fare e propongo di fare un buon grafico	
12,25	G5_3	Sono d'accordo sul fatto che la velocità cambia e dicono che quindi il tempo impiegato sarà maggiore		
12,26	G5_4	Propongono un problema	Chiedo di risolvere il problema inventato	
12,29	G5_6	Un alunni sintetizza quello che hanno fatto dicendo che sono partiti usando il metodo più semplice "da capire" per arrivare al metodo più semplice "da fare"	Spiego come sfruttare il grafico per risolvere il problema	
12,30		Consegna lavori		

Osservazioni

Descrivo alcuni dei momenti significativi che ho riscontrato dall'analisi dei protocolli scritti ed orali.

G5_1 testo P1_Ipr_NM

Nel procedimento che propongono parlano di velocità con la quale il tino si svuota. Dopo la mia osservazione sulla variazione della velocità propongono che le velocità da loro calcolate siano medie e che l'influenza sul risultato sia trascurabile.

G5_2 testo P3_Dia_Me

Nel foglio propongono un grafico con le rette che rappresentano le diverse opzioni, le equazioni che compaiono sul grafico sono corrette ed anche il grafico anche se non riescono a dimensionarlo correttamente e non si vede tutta la zona di interesse per il problema. In un altro foglio ci sono alcuni tentativi di calcolare le equazioni delle rette con alcuni errori, vengono messe a sistema due rette ma i calcoli non vengono sviluppati fino alla fine.In un secondo foglio si trova un metodo che consiste nel valutare la convenienza per alcuni valori (10,20,40,50,80,160,120). Commentano che questo è sufficiente per fare la scelta più conveniente.

G5_3 testo P1_Ipr_Me

Nel foglio che consegnano si vede che c'è un primo tentativo di impostare un sistema nel quale la velocità (v) viene rinominata y, lo spazio (s) rinominato x, ma poi si vede che l'algebra che usano non ha un chiaro significato, infatti arrivano ad un risultato che non ha senso (x=0)e cancellano tutto. Procedono quindi con il calcolo delle tre portate (anche se non le chiamano in questa maniera), sommano e poi raggiungono il risultato t=4,63 minuti.

G5_4 testo P2_Dia_Mi

Spiegano brevemente il risultato: calcolano per ogni pompa quanti litri immette al minuto, poi sommano i risultati ottenendo quanti litri al minuto vengono immessi nella vasca dalle tre pompe assieme, infine calcolano il tempo di riempimento della vasca. Nella "spiegazione" della somma in realtà dicono che devono "necessariamente " sommare perché le pompe funzionano assieme.

Alla mia domanda sulla eventuale relazione con un altro problema (macchina che percorre un percorso) dicono che effettivamente ci sono delle relazioni, scrivono :"*le auto corrispondono alle pompe, il volume alla distanza..e la velocità corrisponde alla quantità di litri immessi al minuto dalle pompe* ". Nel problema che propongono fanno corrispondere (e me ne accerto chiedendolo) alla capacità della vasca (300 l) una distanza di 30 Km da percorrere, poi associano a tre diverse macchine tre diverse potenze (120 , 150 e 170 cavalli) e tre diversi tempi di percorrenza, poi suppongono che ci sia una quarta macchina con potenza uguale alle potenze delle macchine precedenti. Nella soluzione, tuttavia, non sommano e non sfruttano le potenze ma invece calcolano le velocità di ogni singola macchina e poi le sommano, considerando implicitamente il risultato come la velocità con la quale la quarta macchina percorrerebbe il medesimo tragitto.

G5_5 testo P2_Dia_Me

Nel testo risolvono il problema correttamente parlando di *capacità* delle pompe. Nel testo che riscrivono parlano invece di volume (per quanto riguarda i litri) e di *velocità* delle pompe. Propongono poi un secondo ragionamento, cercando di proseguire il ragionamento del dialogo, nel quale viene proposto un *paragone* con un punto che sale di moto rettilineo uniforme lungo l'argine della vasca. La formula che viene usata è t=s/v e scrivono "*che s è rappresentata dalla capacità della vasca mentre v la consideriamo la capacità delle tre pompe unite di fare uscire l'acqua*". Il risultato ottenuto è confrontato con quello del primo metodo e gli alunni dicono che "*i conti corrispondono*". Nel breve dialogo che propongono come proseguimento del testo, dicono che dato che le pompe immettono acqua a velocità costante, allora l'acqua salirà lungo il bordo a velocità costante e quindi si possono usare le formule del moto rettilineo uniforme.

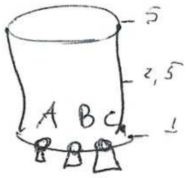
G5_6 testo P3_Ipr_Me

Gli alunni iniziano relativamente tardi a sfruttare un grafico per risolvere il problema, iniziano invece con una serie di tentativi che portano a risultati non completamente spiegati. Infine rifanno un grafico dove le rette sono disegnate bene anche se non si trovano tutti i calcoli relativi alle intersezioni.

G5_1 problema P1_Ipr_NM

G5-1 P1_1pr_NM

1



$V : 50\,l$

$A = 20\,min \longrightarrow \frac{50\,l}{20\,min} = 2{,}5\,\frac{l}{min}$

$B = 15\,min \longrightarrow \frac{50\,l}{15\,min} = 3{,}\bar{3}\,\frac{l}{min}$

$C = 10\,min \longrightarrow \frac{50\,l}{10\,min} = 5\,\frac{l}{min}$

$\left.\right\} 10{,}8\,\frac{l}{min}$

$$\frac{50\,l}{10{,}8\,\frac{l}{min}} = 4{,}6\,min \qquad \frac{\cancel{l}\cdot min}{\cancel{l}} \qquad 5\,min$$

INIZIALMENTE ABBIAMO PENSATO DI RICAVARE la VELOCITÀ CON cui si svuota il TINO UTILIZZANDO ogni SINGOLO RUBINETTO; SOMMANDO i 3 RISULTATI si trova la velocità complessiva di FUORIUSCITA dell' ACQUA, e DIVIDENDO i 50 litri per questo valore TROVIAMO IL TEMPO che il TINO IMPIEGA PER SVUOTARSI con tutti i rubinetti aperti.

La velocità di svuotamento del tino OVVIAMENTE VARIA NEL TEMPO, ma ciò non influisce nei CALCOLI perché noi abbiamo RICAVATO la velocità INDIRETTAMENTE (dal TEMPO e dal VOLUME) e quindi abbiamo ottenuto una velocità MEDIA.

Di conseguenza anche il risultato ottenuto dalla somma dei dati é una velocitá media che non si interessa della variazione di velocitá nel Tempo.

FATTORI CHE INFLUISCONO :

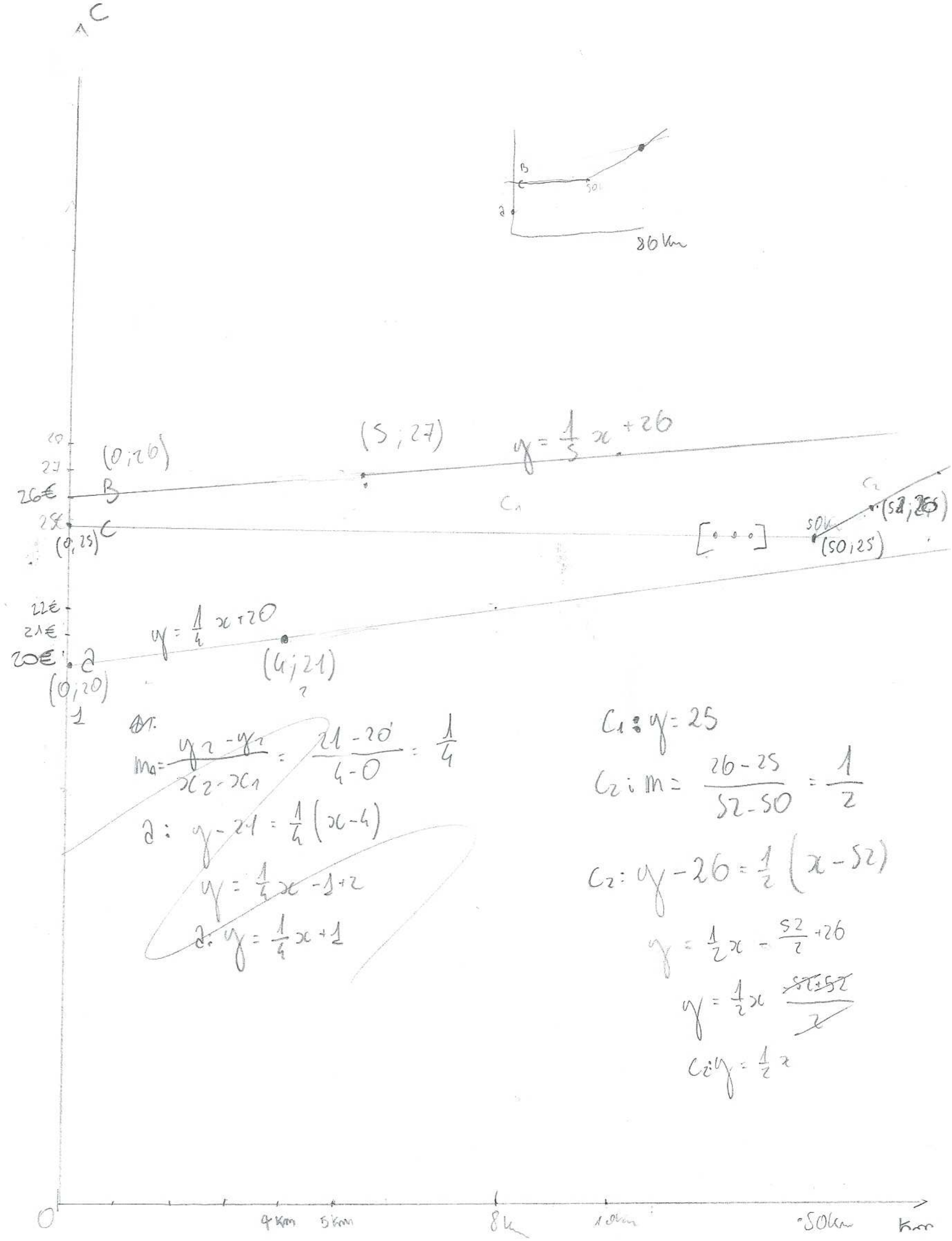
Il nostro calcolo Teorico rispecchia la realtá ma sicuramente ci sono altri fattori apparentemente ~~in~~ non influenti che possono modificare il risultato pratico.
Probabilmente le variazioni sarebbero Talmente minime che possono non essere

G5_2 problema P3_Dia_Me

P3_Dia_Me

①

1cm = 2 €



A1. $m_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{21-20}{4-0} = \frac{1}{4}$

$a:\ y-21 = \frac{1}{4}(x-4)$

$y = \frac{1}{4}x - 1 + 2$

$a:\ y = \frac{1}{4}x + 1$

$C_1:\ y = 25$

$C_2:\ m = \frac{26-25}{52-50} = \frac{1}{2}$

$C_2:\ y - 26 = \frac{1}{2}(x-52)$

$y = \frac{1}{2}x - \frac{52}{2} + 26$

$y = \frac{1}{2}x\ \cancel{\frac{52+52}{2}}$

$C_2:\ y = \frac{1}{2}x$

G 5_2 P3_Dia_Me

Auto più conveniente

$$\boxed{\begin{array}{c} 20 \leq C \leq 80 \\ 0 \leq A \leq 19 \\ 121 \leq B \leq \infty \end{array}}$$

10 km $\begin{cases} a = 20 + 0,25 \cdot 10 = 22,5€ \\ b = 26 + 0,20 \cdot 10 = 28€ \\ c = 25€ \end{cases}$

20 km $\begin{cases} a = 20 + 0,25 \cdot 20 = 25€ \\ b = 26 + 0,20 \cdot 20 = 30€ \\ c = 25€ \end{cases}$

40 km $\begin{cases} a = 20 + 0,25 \cdot 40 = 30€ \\ b = 26 + 0,20 \cdot 40 = 34€ \\ c = 25€ \end{cases}$

50 km $\begin{cases} a = 20 + 0,25 \cdot 50 = 32,5€ \\ b = 26 + 0,20 \cdot 50 = 36€ \\ c = 25€ \end{cases}$

80 km $\begin{cases} a = 20 + 0,25 \cdot 80 = 40€ \\ b = 26 + 0,20 \cdot 80 = 42€ \\ c = 25 + 0,5 \cdot 30 = 40€ \end{cases}$

86 Km : $\begin{cases} A = 20 + 0,25 \cdot 86 = 41,5 € \\ B = 26 + 0,20 \cdot 86 = 43,2 € \\ C = 25 + 0,50 \cdot 36 = 43 € \end{cases}$

100 km $\begin{cases} a = 60€ \\ b = 58€ \\ c = 80€ \end{cases}$

120 km $\begin{cases} A = 20 + 0,25 \cdot 120 = 50€ \\ B = 26 + 0,20 \cdot 120 = 50€ \\ C = 25 + 0,5 \cdot 70 = 60€ \end{cases}$

Prendendo vari valori di chilometraggio abbiamo trovato quando i prezzi delle varie auto coincidevano. In seguito logicamente possiamo dedurre quale auto sia più conveniente al variare del chilometraggio.
indi per cui

$(0;26)$ $(5;27)$

$$\frac{x-0}{26-0} = \frac{y-5}{27-5} \Rightarrow \frac{x}{26} = \frac{y-5}{22} \Rightarrow 22x = 26y - 130$$

$$22x - 26y + 130 = 0$$

$(0;20)$ $(4;21)$

$$\frac{x-0}{4-0} = \frac{y-20}{21-20} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y-20}{1} \Rightarrow x = 4y - 100$$

$$\begin{cases} x = 4y - 100 \\ 22x - 26y + 130 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} = \\ 22(4y-100) - 26y + 130 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} = \\ 88y - 2200 - 26y + 130 = 0 \end{cases} \qquad \left\{ \underset{31}{62y} = \underset{1035}{\cancel{2070}} \right.$$

G5_2 P3_Dia_Me ③

$4 \cdot \frac{1}{4}x = 24 \cdot 4$

$m_B = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{27-26}{5-0} = \frac{1}{5}$

$m_B = \frac{1}{5}$

$B: y - 27 = \frac{1}{5}(x-5)$

$y = \frac{1}{5} - 1 + 27$

$y = \frac{1}{5}x + 26$

$\cancel{C \begin{cases} y = \frac{1}{4}x + 1 \\ y = 25 \end{cases}}$ C_1

$\cancel{\begin{cases} 24 = \frac{1}{4}x \\ \frac{100}{4} = \frac{x+4}{4} \end{cases}}$

$\cancel{x = 100 - 4}$

$\cancel{x = 96}$

$\begin{cases} C_1: y = \frac{1}{2}x \\ B: y = \frac{1}{5}x + 26 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{2}x = \frac{1}{5}x + 26 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{5}x = 26 \end{cases}$

$\frac{5x - 2x}{\cancel{10}} = \frac{260}{\cancel{10}}$

$\cancel{3}x = \frac{260}{3}$

$x = 86$

$\begin{cases} x = \end{cases}$

$B < \underline{86} < C$

$\begin{cases} A: y = \frac{1}{4}x + 1 \\ B: y = \frac{1}{5}x + 26 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{4}x + 1 = \frac{1}{5}x + 26 \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{5}x = 25 \end{cases}$

$\frac{5x - 4x}{2\cancel{0}} = \frac{500}{2\cancel{0}}$

$x = 500$

A: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_2}$

$\frac{y - 20}{21 - 20} = \frac{x - 0}{4 - 0}$

$4\left(\frac{y - 20}{\cancel{1}}\right) = \frac{x}{\cancel{4}}$

$4y - 80 = x$

$4y = \frac{1}{4}x + \frac{\cancel{80}}{\cancel{4}}$

$4y = \frac{\cancel{80}^{20}}{\cancel{4}} + \frac{1}{4}x$

$y = \frac{1}{4}x + 20$

$\begin{cases} C \quad y = 25 \\ A \quad y = \frac{1}{4}x + 20 \end{cases}$

$25 = \frac{1}{4}x + 20$

$\frac{1}{4}x = 25 - 20$

$\cancel{4} \cdot \frac{1}{\cancel{4}}x = 5 \cdot 4$

$x = 20$

incrocio tra la retta a e la retta c

$C < 20km < a$

$B < 86km < C$

incrocio tra la retta B e C

Marco per fornire uno strumento di decisione al padre può aver costruito uno schema in cui ogni retta rappresenta l'aumento del prezzo all'aumento dei km percorsi. In questo modo l'incrocio tra le rette rappresenta il punto in cui una macchina comincia ad essere più conveniente dell'altra

G5_3 problema P1_Ipr_Me

Non scannerizzabile

G5_4 problema P2_Dia_Mi

P2_Dia_Mi

Guido vuole riempire una vasca di 300l di capienza con dell'acqua pompandola da un laghetto vicino e chiede informazioni a suo papà che di solito compie quell'operazione:

G:Papà vorrei riempire la vasca che è vuota, quale pompa posso usare per fare prima?
P:allora...noi abbiamo tre pompe, se vuoi fare prima puoi usarle tutte insieme...dunque..usando quella rossa l'acqua raggiunge il bordo della vasca in 20 minuti..usando quella gialla lo raggiunge in 30 minuti e con quella verde in 10 minuti.
G:E se le uso insieme quanto tempo impiega l'acqua ad arrivare fino al bordo?
P:.non ho mai provato...ci devo pensare..magari chiediamolo a Marta che è sempre brava in questo tipo di cose...sai io sono bravo con il giardino ma per i numeri è meglio lei

Guido spiega il problema alla sorella maggiore Marta che si mette a pensare....quanto tempo impiegherà Guido usando le tre pompe contemporaneamente? Provate a rispondere facendo continuare il dialogo fra Guido, Marta ed il papà.

G: Vorrei riempire la vasca usando le 3 pompe insieme. Sapendo che una ci impiega 20 min, l'altra 10 e l'ultima 30, mi sapresti dire quanto ci impiegherei?
M: Considerando che la vasca ha una capienza di 300 ~~ml~~ l dobbiamo considerare la quantità di acqua che ogni pompa immette nella vasca al minuto.
G: Perchè?
M: Poiché sommando le 3 grandezze che otteniamo troviamo quanto le 3 pompe insieme immettono nella vasca.
G: E quindi quanto otteniamo?
M: Otteniamo che ci impiegherai 5,45 min.
G: Grazie mille!
P: Ottimo lavoro Marta!

G 5-4 P2_Dia_Mi (1)

V = 300 L

Pr = 20 min → 1 min = 300/20 = 15 L

Pg = 30 min → 1 min = 300/30 = 10 L

Pv = 10 min → 1 min = 300/10 = 30 L

15 L + 10 L + 30 L = 55 L al min

300/55 = 5,45 min

Abbiamo trovato quanto ogni singola pompa metteva nella vasca in un minuto e abbiamo calcolato quanto mettevano nella vasca le 3 pompe insieme sommando i risultati ottenuti.
In seguito abbiamo calcolato quanto ci avrebbero messo le 3 pompe insie a riempire tutta la vasca.

Perché avete sommato le 3 grandezze?
Poiché [illegible] il problema richiedeva quanto ci avrebbero impiegato le tre pompe insieme, di conseguenza abbiamo sommato necessariamente i L immessi nella vasca di ogni singola pompa in un minuto in modo da trovare quanto ci avrebbero impiegare le 3 pompe insieme.

Ci sono delle relazioni con un problema in cui ci sono 2 macchine che vanno ad una certa velocita' in un certo tempo?
Si, infatti le auto corrispondono alle pompe, il volume alla distanza, il tempo ai minuti che ci impiegano le pompe e la velocita' corrisponde alla quantita' di litri immessa al minuto dalle pompe.

Inventa un problema corrispondente a questo ma che parli di auto.
~~-Ci sono 3 auto che devono percorrere 30 km. La prima ci impiega 10 min, la seconda 20 min e la terza 30 min. Supponendo che una~~

Ci sono 3 auto che devono percorrere 30 km. Quella rossa ha 120 cavalli e ci impiega 30 min. La gialla con 150 cavalli ci impiega 20 minuti e la verde con 170 cavalli ci impiega 10 minuti.
Supponendo che ci sia una quarta macchina con i cavalli pari alla somma delle altre 3 macchine quanto tempo impiegherebbe a percorrere la stessa distanza?

~~cavalli quarta macchina = 120 + 150 + 170 = 440~~

30/30 = 1 km rossa

30/10 = 3 km verde

30/20 = 1,5 km gialla

1 km + 3 km + 1.5 km = 5.5 km

30 km / 5.5 km = 5.45 min

ci impiega 5.45 min

G5_5 problema P2_Dia_Me

P2_Dia_Me

Guido vuole riempire una vasca di 300l di capienza con dell'acqua pompandola da un laghetto vicino e chiede informazioni a suo papà che di solito compie quell'operazione:

G:Papà vorrei riempire la vasca che è vuota, quale pompa posso usare per fare prima?
P:allora…noi abbiamo tre pompe, se vuoi fare prima puoi usarle tutte insieme…dunque..quella rossa ci mette 20 minuti..quella gialla 30 minuti e quella verde 10 minuti.
G:E se le uso insieme quanto tempo ci mettono?
P:.non ho mai provato…ci devo pensare..magari chiediamolo a Marta che è sempre brava in questo tipo di cose…sai io sono bravo con il giardino ma per i numeri è meglio lei

Guido spiega il problema alla sorella maggiore Marta che si mette a pensare e dopo poco dice a Guido:
M:mi pare che sia come se ci fosse una certa distanza da percorrere…
G: come?
M: si…se si usa una pompa più veloce l'acqua sale più velocemente e raggiunge prima il bordo della vasca, come se ci fosse una distanza da percorrere ad una certa velocità…

Quale è il ragionamento che ha in mente Marta? Provate a rispondere facendo continuare il dialogo fra Guido, Marta ed il papà

G: mi dispiace sorella ma non ho ancora capito, perciò spiegamelo meglio.

M: Ok fratellino; ora te lo spiego:
Le 3 pompe immettono acqua nella vasca a velocità costante; di conseguenza l'acqua segue le leggi di moto rettilineo uniforme. Così noi siamo in grado di calcolare il tempo sfruttando la formula $t = \frac{s}{v}$; con s (spazio) devi considerare la capacità della vasca (300 L) e la velocità (v) la capacità delle pompe di immettere l'acqua nella vasca. Se svolgi l'operazione saprai che a riempire la vasca con le 3 pompe unite, impiegherai circa 5,5 minuti.

G: Grazie sorellina, sei un vero genio.

G 5_5 P2_Dia_Me (1)

POMPA ROSSA

300 L in 20 min $\frac{300\,L}{20\,min} \rightarrow \frac{15\,L}{min}$

POMPA GIALLA

300L in 30 min $\frac{300\,L}{30\,min} \rightarrow \frac{10\,L}{min}$

POMPA VERDE

300L in 10 minuti $\frac{300\,L}{10\,min} \rightarrow \frac{30\,L}{min}$

Sommando la capacità delle tre pompe notiamo che in grado di pompare 55 L/min quindi:

$\frac{300\,L}{55\,\frac{L}{min}} = 5,5$ min le 3 pompe unite impiegano 5,5 m x riempire la vasca

PROCEDIMENTO ACCA ZAHAR!!!!!!!

G5_5 P2_Dia_Me ②

Sapendo che la pompa rossa riempie la vasca di 300 L in 20 minuti; per calcolare quanti litri pompa al minuto, basta che noi facciamo il rapporto tra il volume ed il tempo:

Se $\frac{\cancel{300}^{15} L}{\cancel{20} min}$ => 15 L/min (velocità della pompa rossa)

effettuiamo lo stesso calcolo con le pompe gialla e verde e perciò otteniamo rispettivamente

P. GIALLA: $\frac{\cancel{300}^{10} L}{\cancel{30} min}$ => 10 L/min (velocità della pompa gialla)

P. VERDE: $\frac{\cancel{300}^{30} L}{\cancel{10} min}$ => 30 L/min (velocità della pompa verde)

Ora sommiamo le velocità delle tre pompe

10 L/min + 15 L/min + 30 L/min = 55 L/min

- così sapiamo che se azionate tutte e 3 insieme sono in grado di pompare 55 L in un minuto.

Ora calcoliamo quanto ci mettono le 3 pompe a riempire la vasca:

$\frac{300 \cancel{L}}{55 \cancel{L}/min}$ = 5,5 minuti

- le tre pompe impiegano 5,5 minuti a riempire la vasca.

Marta però utilizza un ragionamento un po' diverso: infatti lei paragona l'acqua ad un punto che sale di moto rettilineo uniforme lungo l'argine della vasca. Di conseguenza utilizza la formula $t = \frac{s}{v}$, nel quale "s" è rappresentato dalla capacità delle vasca (300 L); mentre "v" la consideriamo la capacità delle 3 pompe unite di far uscire l'acqua (55 L/min) infatti svolgendo il calcolo i conti corrispondono a quelli noi precedentemente svolti con un metodo diverso

G5_6 problema P3_Ipr_Me

G 5_6 P3_ Ipr_ Me ①

Ipotizziamo che la distanza da percorrere sia 50 Km.

per A

	20	21	60	80
$20+(0{,}25\cdot 50\,Km)=32{,}5$€	25	,25	30	40

per B

$26+(0{,}20\cdot 50\,Km)=36$€	30	,20	36	42

per C

		25	40
25€	25		

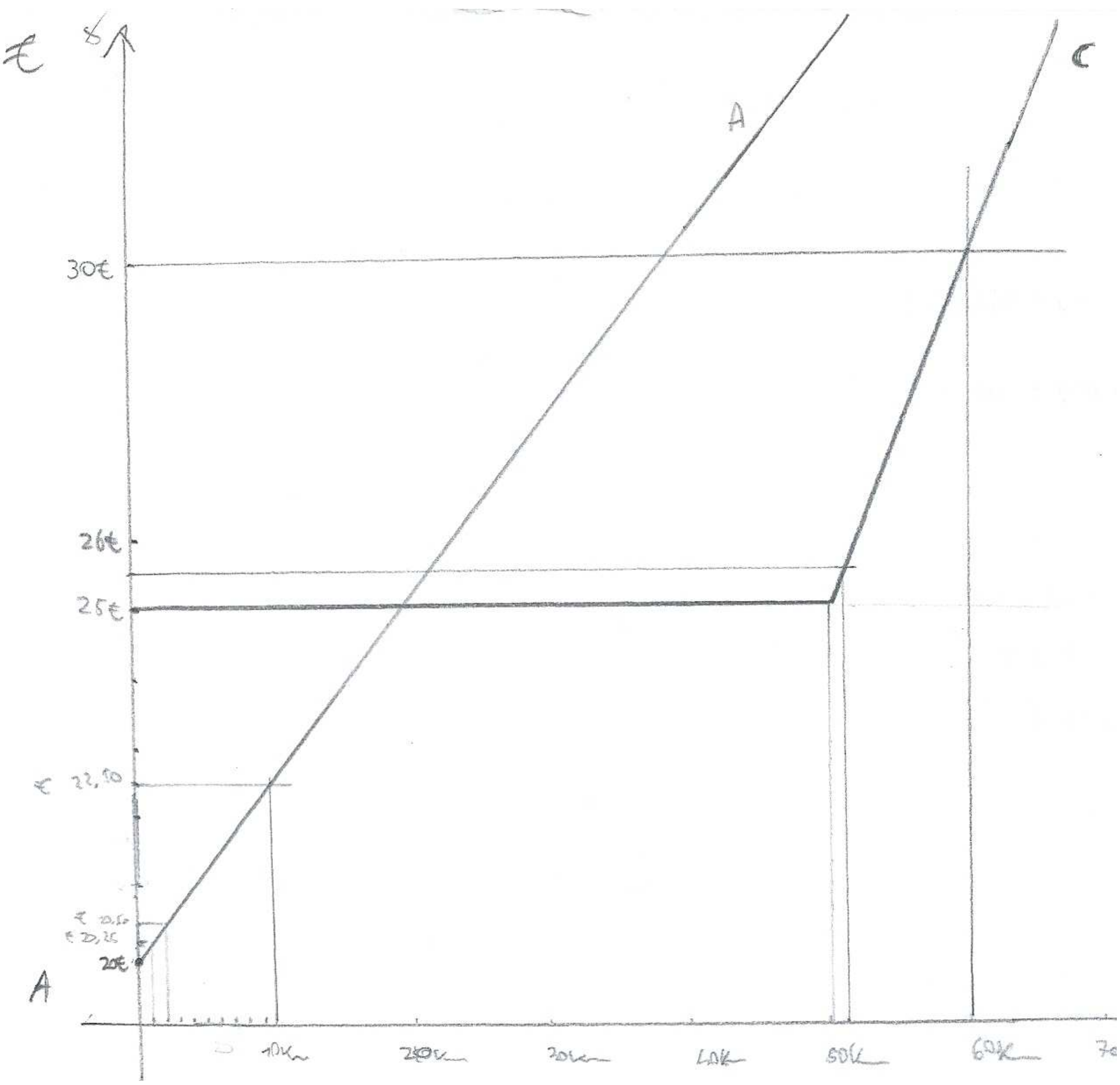
$0<d<20$ è + conveniente la A

$20<d\leq 80$ è + conveniente la C

per $d=20$ C e A sono convenienti uguali

$d=80$ C=A

per $80<d<120$ è + conveniente la A

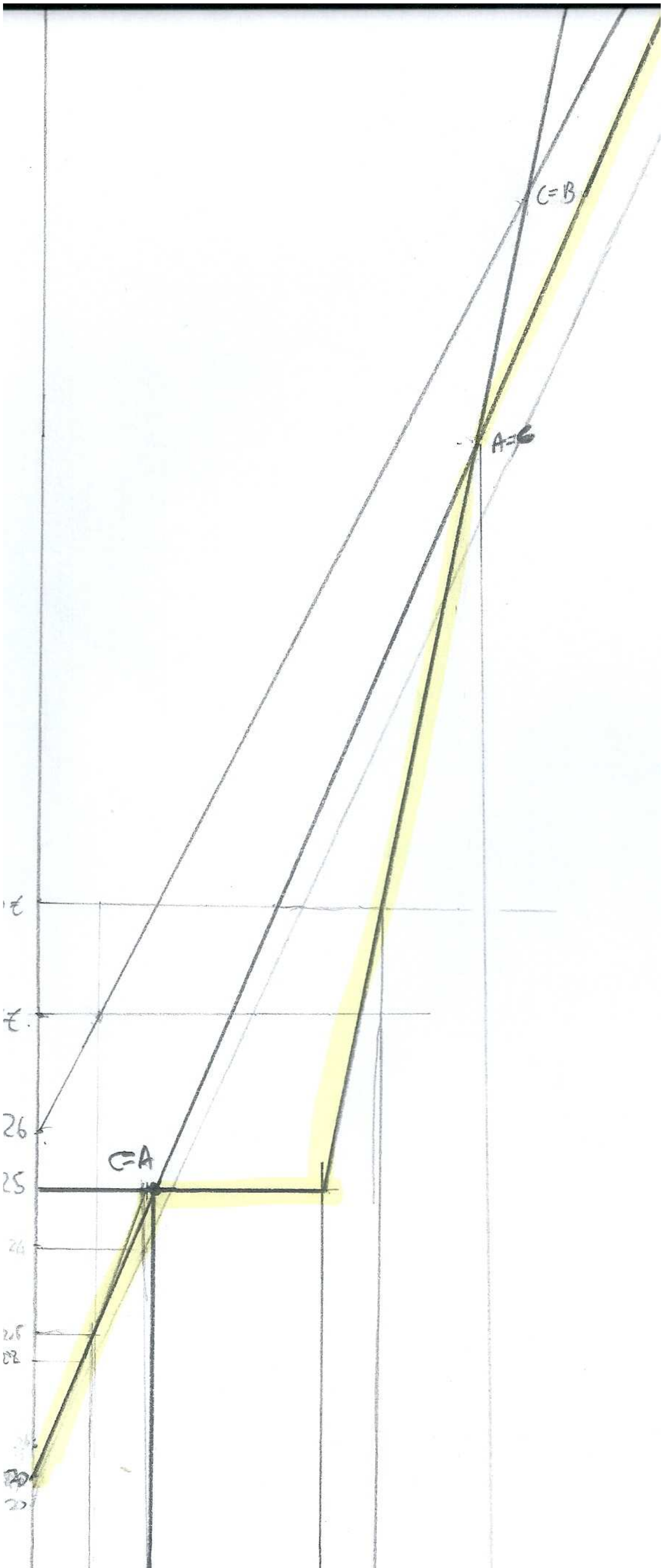


€
A
C
30€
26€
25€
€ 22,50
€ 20,50
€ 20,25
20€
A
10Km
20Km
30Km
40K
50K
60Km

G 5_6 P3_Ipr_Me

0<d<20 conviene A
d=20 conviene C e A
20<d<80 conviene C
d=80 conviene C=A
80<d<120 conviene A
d=120 conviene B e A
d>120 conviene B

80
42,5
44
45
85
41,25
43
42,5



C=B
A=C
C=A
26
25

Sesto incontro 02/05/2012

Contesto e metodologia	**Contesto di classe**: 2° liceo scientifico del Polo "Montessori-Da Vinci" di Porretta Terme, composta da 21 alunni. Il loro insegnante di matematica e fisica (Prof. Andrea Gualandi) mi dice che questa è una classe molto buona (e posso confermare questo visto che è stata la mia classe per metà anno scolastico lo scorso anno). **Metodologia:** come previsto dal progetto di sperimentazione, la classe è stata suddivisa, con l'aiuto dell'insegnante, in tre gruppi omogenei.(vedere allegati). A ciascuno dei gruppi è stata consegnata una scheda con il problema da risolvere (allegati) e fogli con un codice di gruppo per le loro produzioni scritte. L'insegnante era assente. Le attività sono state registrate con un registro scritto che viene riportato sotto.

REGISTRO ATTIVITA'

L'orario nel quale si è svolta la sessione andava dalle 8,30 alle 10,20.L'attività e cominciata con una mia breve presentazione e con la spiegazione del tipo di attività proposta. Ho chiarito che l'attività è una attività di sperimentazione di dottorato e che il mio obiettivo è osservare quello che accade durante il loro lavoro, specificando che:

- La mia attività consisterà nell'osservarli, registrando ed eventualmente filmando quello che fanno
- Il tipo di interazione dipende dal tipo di problema che stanno affrontando e non da altri fattori personali
- All'interno di ogni gruppo ci deve essere collaborazione ma non fra gruppi diversi, visto che questo potrebbe incidere sui risultati
- Ogni gruppo deve cercare di scrivere, spiegando e disegnando tutto quello che viene proposto, anche se non immediatamente utile per la soluzione del problema assegnato

Tempo	Gruppo	Evento	Azione Sperim.	Azione Insegn.
8,51		Consegna testi		
8,54	G6_1	Dicono di avere terminato		
8,58	G6_1		Chiedo di scrivere bene il procedimento e spiegare perché sommino le grandezze (portate)	

8,59	G6_3	Chiedono dove proseguire il dialogo	Dico che possono proseguirlo dove preferiscono	
9,01	G6_2	Iniziano a fare un disegno e rapidamente arrivano ad una soluzione	Chiedo di spiegare bene quello che fanno	
9,04	G6_4	Iniziano a fare un grafico su di un piano cartesiano		
9,05	G6_1	Giustificano la somma con il fatto che le pompe agiscono assieme		
9,06	G6_5	Stanno provando diversi valori per stabilire quale opzione è più conveniente	Chiedo cosa stiano facendo	
9,08	G6_2	Arrivano velocemente ad una soluzione	Chiedo di spiegare bene quello che hanno fatto e di giustificare la somma	
9,11	G6_6	2-Mi chiedono conferma su un procedimento che stanno seguendo (che pare corretto). 4-Hanno usato il libro per capire come trasformare i litri in centimetro cubi perché in questo modo arrivano ad una misura di spazio (ma non sono tutti convinti, alcuni dicono che "*in realtà è un volume*")	1-Chiedo cosa stiano facendo 3-vedo che hanno il teso di fisica e chiedo come lo stiano usando	
9,15	G6_3	Dicono di avere finito	Chiedo perché chiamino le grandezze *velocità* e perché le stiano sommando	
9,18	G6_4	2-Hanno disegnato il grafico (che non sta tutto nel foglio)ed hanno chiaramente individuato un procedimento corretto (trovano i punti di intersezione)	1-chiedo cosa stiano facendo 3-chiedo di continuare il dialogo utilizzando le idee che hanno avuto	
9,21	G6_5	Sono passati allo studio della	Chiedo cosa stiano facendo	

		convenienza tramite disequazioni		
9,24	G6_6	2-non sono convinti di quello che hanno fatto, in particolare della somma delle velocità	1-chiedo cosa stiano facendo 3-chiedo di scrivere tutto quello che hanno fatto e che hanno pensato nel dialogo	
9,29	G6_1	2-Nel riferirsi al rapporto litri/tempo alcuni alunni parlano di *peso* altri invece di *velocità*	1-Chiedo perché sommino le velocità. La cosa pare a loro intuitiva 3-chiedo a quale grandezza assomigli il rapporto che loro hanno calcolato fra litri e tempo e chiedo di giustificare tale somiglianza	
9,39	G6_2	Dalla giustificazione della della somma delle grandezze l/t (che chiamano velocità), emerge che inizialmente hanno interpretato tali grandezze come velocità ma non erano tutti d’accordo su come interpretare la somma (una alunna dice che bisogna tenere fisso il tempo e non la distanza)	Chiedo di spiegare bene quello che hanno detto	
9,44	G6_3	Utilizzano la media delle velocità come velocità delle tre pompe assieme (utilizzano la formula v=s/t)	Chiedo di giustificare questo nel dialogo	
9,47	G6_5	Dicono di avere problemi nella impostazione delle disequazioni per distanze maggiori di 50 Km	Chiedo cosa stiano facendo	
9,51	G6_2	Giustificano la somma delle grandezze con un esempio di tre persone che vanno a velocità diverse e la distanza		

		complessivamente percorsa che è la somma delle tre distanze (per un dato intervallo di tempo)		
9,54	G6_3	Non hanno giustificato l'uso della media delle velocità	Faccio loro notare che il tempo impiegato dovrebbe essere minore di quello impiegato da una qualunque delle singole pompe (una alunna se ne accorge dopo che li spingo a osservare bene i risultati)	
9,58	G6_6	Non sono sicuri di quello che devono scrivere ed hanno cancellato diverse cose che avevano scritto	1.chiedo cosa stiano facendo 2.chiedo di non cancellare quello che fanno	
9,59	G6_4	1-Vogliono consegnare 3-Dicono che è la prima cosa che hanno pensato. Risulta che hanno già affrontato problemi simili dove l'uso di grafici si era rivelato utile.	2-chiedo perché abbiano pensato subito ad un grafico	
10,05	G6_3	1-Capiscono che hanno sbagliato e decidono che le grandezze vanno sommate	2-Chiedo di giustificare la somma	
10,08	G6_1	1-Propongono una spiegazione della somiglianza fra portata e velocità	2-chiedo di giustificare l'uso della somma sfruttando questa somiglianza	
10,12	G6_2	2-una alunna dice che non lo è perché la pressione cambia	1-chiedo se la velocità di fuoriuscita dell'acqua sia costante 3-confermo che effettivamente non lo è chiedo come cambia il loro procedimento, se cambia	
10,19	G6_2	1-Un alunno si chiede se la pressione ad un certo istante	2-Dico che la pressione non dipende da questo ma	

		possa dipendere dal numero di rubinetti aperti	dall’altezza dell’acqua che sta sopra al rubinetto 3-ripropongo di pensare a come possa cambiare il loro ragionamento (se cambia)	
10,22	G6_5	1-sintetizzano i risultati in una maniera ridondante e (forse) non coerente	2-Chiedo di migliorare la loro sintesi	
10,27		Consegna lavori		

Osservazioni

Descrivo alcuni dei momenti significativi che ho riscontrato dall’analisi dei protocolli scritti ed orali.

G6_1 testo P2_Ipr_Mi

Il lavoro inizia con il disegno della situazione descritta dal testo. Calcolano per ogni pompa il rapporto litri/tempo (che è stato trasformato in secondi), poi sommano le grandezze trovate ed usano il risultato per calcolare il tempo, ottenendo 326 secondi. Chiamano *portata* il rapporto l/t di ogni pompa e giustificano l’uso della somma dicendo che le pompe agiscono insieme. Successivamente (in seguito alla mia domanda) scrivono che la portata assomiglia ad una velocità. Cercano poi di migliorare la spiegazione dicendo che “*La similitudine fra velocità e portata ci serve per svolgere questo problema perché sommando queste 3 portate differenti è come se sommassimo 3 forze diverse e quindi anche 3 velocità diverse per spostare un mobile utilizzate inizialmente in 3 diversi casi, ottenendo quindi 3 tempi differenti*”

G6_2 testo P1_Ipr_Mi

Calcolano i rapporti capacità/tempo per tutti i rubinetti e poi sommano queste grandezze. Per trovare il tempo richiesto impostano e risolvono una proporzione. Giustificano la somma dicendo che i rubinetti vengono aperti contemporaneamente. Spiegano poi (aiutandosi con un disegno) che il problema assomiglia a quello di tre persone che vanno a tre velocità diverse per uno stesso tempo, per le quali la distanza complessiva percorsa sarà la somma. In particolare propongono una corrispondenza fra le grandezze (portate) litri/minuti e le velocità. In seguito alle osservazioni sulla velocità di fuoriuscita non costante, propongono che le loro velocità siano velocità medie ma non fanno alcuna osservazione su come questo incida sul loro risultato.

G6_3 testo P2_Dia_NM

Calcolano i rapporti litri/tempo per ogni pompa chiamando *velocità* il risultato. Tuttavia per risolvere il problema iniziano a calcolare la media di tali velocità. Successivamente trovano il tempo dividendo la capacità della vasca per tale velocità media ottenendo 16,4 minuti. Dopo che faccio notare l'errore capiscono che le velocità vanno sommate e rifanno il calcolo . Non giustificano comunque l'uso della somma.

G6_4 testo P3_Dia_NM

Il gruppo definisce subito la strategia di risoluzione del problema che consiste nel metodo geometrico. Trasformano le equazioni proposte in equazioni di rette (rinominando le lettere). Il grafico è fatto bene ed i calcoli pure. Arrivano ad un risultato corretto, sfruttando senza problemi il significato del grafico in termini del problema da risolvere. (In realtà è principalmente un alunno a "dirigere i lavori del gruppo" che è particolarmente dotato anche in matematica)

G6_5 testo P3_Ipr_NM

Dopo alcuni tentativi capiscono che conviene impostare delle disequazioni. Tuttavia non riescono a sfruttarle completamente ed non riescono ad impostare in maniera coerente tutte le disequazioni che servirebbero. Inoltre non riescono sempre a capire il significato dei sistemi di disequazioni che impostano ed interpretano scorrettamente i risultati. (Dato che conosco la classe questa difficoltà non credo sia dovuta alla carenza dei componenti del gruppo, visto che è presente almeno una alunna che ha buoni risultati in matematica)

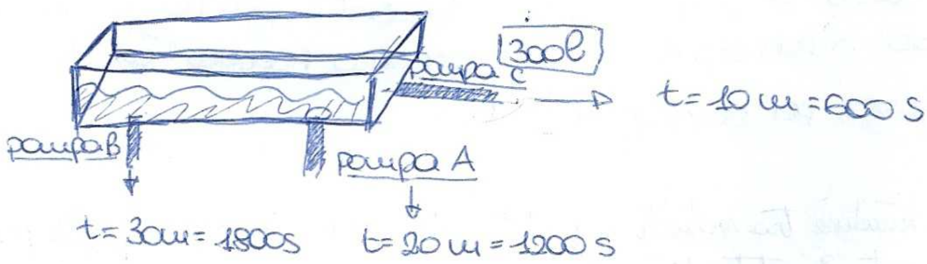
G6_6 testo P1_Dia_Me

Calcolano i diversi rapporti (chiamandoli velocità ed indicandoli con v), li sommano e poi trovano il tempo con t=s/v. Alcune delle cose che hanno scritto sono state cancellate. Il dialogo che propongono è veramente scarno e si limita a ricapitolare i calcoli svolti. Emerge che non sono sicuri della somma delle velocità ma non propongono alcuna giustificazione al suo uso.

G6_1 problema P2_Ipr_Mi

GG-1 P2_Ipr_Mi ①

P = portata



POMPA A

$$P = \frac{300\ l}{1200\ s} = 0,25\ l/s$$

POMPA B

$$P = \frac{300\ l}{1800\ s} = 0,17\ l/s$$

$$t\ P = \frac{l}{t}\ t$$

$$t = \frac{P}{l}\ \frac{l}{P}$$

POMPA C

$$P = \frac{300\ l}{600 s} = 0,5\ l/s$$

$$P_{tot} = 0,25\ l/s + 0,17\ l/s + 0,5\ l/s = 0,92\ l/s$$

$$t = \frac{300}{0,92} = 326\ s$$

Abbiamo ~~trova~~ calcolato la portata di ogni singola pompa: dividendo la capienza della vasca per ~~ogni~~ il tempo di pompaggio. Abbiamo sommato le tre portate per calcolare la portata totale delle 3 pompe insieme; perchè le 3 pompe agiscono contemporaneamente con portate diverse. Infine abbiamo calcolato il tempo dividendo la capienza per la portata ottenuta.

~~La portata è simile alla velocità perché nella portata~~

la portata è simile alla velocità perché in entrambe si mette in relazione uno spostamento ~~rispetto~~ e ~~al~~ un tempo impiegato per compierlo.

La similitudine tra velocità e portata ci serve per svolgere questo problema perché :
mendo queste 3 portate differenti è come se sommassimo 3 forze ~~diverse e~~ diverse e qu
anche 3 velocità diverse per spostare un mobile utilizzate inizialmente in ~~caso~~ 3 d
casi, ottenendo quindi 3 tempi differenti.

G6_2 problema P1_Ipr_Mi

P1_Ipr_Mi

Consideriamo un tino di forma cilindrica graduato e con tre rubinetti nel suo fondo, di diverso diametro e che servono a svuotare il tino. La capacità del tino è di 50 l ed il volume contenuto è leggibile osservando il livello del liquido sulla sua scala graduata.
Riempiendo il tino e lasciandolo svuotare, si impiegano 10 minuti col rubinetto *più largo, 15 minuti con quello medio e 20 minuti con quello più stretto. Quanto tempo si impiegherà aprendo tutti i rubinetti?*

10 MIN	15 MIN	20 MIN

11 l/min

50 l 10 MIN

$\frac{\cancel{50}\,l/s}{\cancel{600}\,MIN}$ 1/12

$\frac{1}{12}$ l/s

= 50

$\frac{50\,s}{1200}$ 900 18

$\frac{1}{18}$ s

50 s 1 / 1200 120 24

$\frac{1}{24}$ l/s

$50\,s = 10\,m$

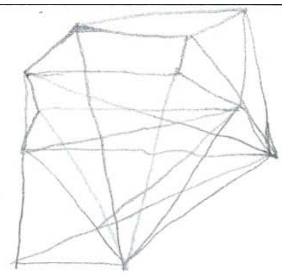
$50\,s = 15\,m$

$50\,s = 20\,m$

$10\,s = 50\,m$

$15\,s = 50\,m$

$20\,s = 50\,m$



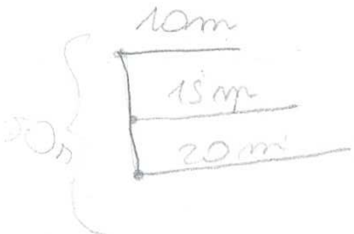
$\frac{10\,m}{50\,s} = 0{,}2$

$\frac{15\,m}{50\,s} = 0{,}3$

$\frac{20\,m}{50\,s} = 0{,}4$

$0{,}9\,\frac{m}{s}$

60



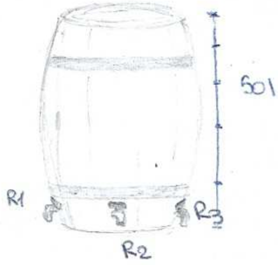
50

45m

$0{,}9\,m \cdot 1 = x \cdot 50$

$50 \cdot 0{,}9 = \boxed{45}\,m$

G6-2 P1_Ipr_Mi (1)



C (capacità) = 50l

$R_1 = 10\ min$ → tempo impiegato per svuotare il tino usando il primo rubinetto (R_1)

$R_2 = 15\ min$ → tempo impiegato per svuotare il tino usando il secondo rubinetto

$R_3 = 20\ min$ → tempo impiegato per svuotare il tino usando il terzo rubinetto

~~R1 = tempo impiegato per svuotare il tino dal primo rubinetto~~

$$R_1 = \frac{50\ l}{10\ min} = \frac{5\ l}{min} = 5\frac{l}{MIN} \to R$$

$$R_2 = \frac{50\ l}{15\ min} = \frac{10}{3}\frac{l}{min} = 3{,}3\frac{l}{MIN}$$

$$R_3 = \frac{50\ l}{20\ min} = \frac{5}{2}\frac{l}{min} = 2{,}5\frac{l}{MIN}$$

Rapporto tra litri svuotati e minuti impiegati per svuotare il tino con i tre diversi rubinetti aperti uno per volta ($R_1 . R_2 . R_3$)

$$R_1 + R_2 + R_3 = \frac{30 + 20 + 15}{60} = \frac{65}{6}\frac{l}{min} = 11\frac{l}{m}$$

Poiché il tino viene successivamente svuotato aprendo tutti e tre i rubinetti contemporaneamente abbiamo sommato i tre rapporti

$$66 : 6 = 50 : x$$

$$x = \frac{6 \cdot 50}{66} = 4{,}6\ min$$

Per trovare il tempo impiegato a svuotare il tino aprendo tutti i rubinetti abbiamo fatto una proporzione ~~con~~ ~~tra~~ tra il dato appena ottenuto e la capacità del tino

Innanzitutto, abbiamo trovato i litri scaricati da ogni rubinetto aperto singolarmente e in uno stesso intervallo di tempo, un minuto. Poiché 13 rubinetti vengono aperti congiuntamente, abbiamo pensato di poter eseguire la somma dei dati appena ottenuti, al fine di ricavare i litri scaricati da tutti i rubinetti. Per giustificare la somma eseguita, abbiamo cercato di rapportarla ad un'altra situazione, nello specifico ad una corsa effettuata da 3 corridori nello stesso intervallo di tempo da noi scelto e corrispondente a 50s.* La scelta da noi compiuta è ricaduta sulla suddetta circostanza poiché riteniamo che dati come 5l/min, 3,3l/min e 2,5l/min possano essere comparati a delle velocità, in questo caso quella dei 3 corridori. Infatti se noi sommiamo le ~~velocità~~ loro 3 velocità ed organizziamo le successive rapporto, riusciamo ad ottenere facilmente lo spazio da loro percorso. Dunque la somma avrebbe un criterio logico e sarebbe giustificata. A questo punto abbiamo dunque proseguito strutturando il rapporto che mette in relazione l'ultimo dato $\frac{65}{6}$ l/min con 50l, = per riuscire ad ottenere il tempo che il problema richiede.

* A ciascuno dei 3 corridori abbiamo attribuito uno spazio percorso nell'intervallo di tempo: 10m, 15m e 20m

---

** I rapporti da noi trovati sono realmente dei valori medi, in quanto la velocità di fuoriuscita del liquido al principio è più elevata e diminuisce progressivamente con la corrispettiva diminuzione dell'acqua. La pressione invece non cambia in base al numero di rubinetti aperti, poiché è determinata dalla quantità d'acqua presente nel tino. Di conseguenza esso non incide nei nostri dati poiché è già incluso nel tempo calcolato all'inizio

G6_3 problema P2_Dia_NM

G6_3 P2_Dia_NM (1)

capienza = 300 ℓ

P_1 = 20 minuti

P_2 = 30 minuti

P_3 = 10 minuti

$P_1 = \frac{300}{20} = 15 \frac{\ell}{min}$

$P_2 = \frac{300}{30} = 10 \frac{\ell}{min}$

$P_3 = \frac{300}{10} = 30 \frac{\ell}{min}$

$15 + 10 + 30 = 55$

$\cancel{\Delta t = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{300 \ell}{20 min} = 15 \frac{\ell}{m}}$

$\cancel{55}$

$\cancel{\Delta t = \frac{\Delta v}{\Delta S} = \frac{18,3 \frac{\ell}{min}}{300 \ell}}$ media delle velocità $= \frac{(15 + 10 + 30)\ \ell/min}{3} = 18,3 \frac{\ell}{min}$

$\Delta t = \frac{\Delta s}{\Delta v} = \frac{300 \ell}{18,3 \frac{\ell}{min}} = 16,4\ min$

dialogo

M: Allora, Guido, concedimi qualche minuto per riflettere... Innanzitutto troviamo la velocità di ogni singola pompa facendo la capienta diviso il tempo di ciascuna pompa. Per la pompa rossa la velocità è di $15 \frac{\ell}{min}$, nel secondo caso, ~~la velo~~ quello della pompa gialla, è di $10 \frac{\ell}{min}$; infine, ~~la~~ la velocità della pompa verde è $30 \frac{\ell}{min}$. Guido fino a qua ci sei?

G: Sì, ma non ho capito perché abbiamo trovato la velocità, quando io ho chiesto il tempo.

M: Aspetta Guido ora ti spiegherò tutto. Per trovare il tempo, devo ricavare la ~~velocità media~~ media delle velocità: si $\boxed{\text{sommano}}$ le velocità e si dividono per quante sono, in questo caso per 3. A questo punto trovo il tempo dividendo la capienta per la media delle velocità e il risultato ottenuto è 16,4 minuti. È questo che volevi sapere?

G: Sì, grazie mille

P: Brava marta! Per fortuna ti ho iscritto allo scientifico!

~~Qualche minuto dopo~~

~~G: Marta, Marta! Che cos'è la velocità media?~~

M: ~~Cercherò di spiegartelo nel modo più semplice possibile.~~
~~G: OK OK, grazie mille.~~
~~M: Dunque, la velocità media~~
* Qualche minuto dopo
G: Marta, perché bisogna trovare la media delle velocità?
M: La media della velocità serve perché grazie ad essa ~~sappiamo quanta acqua possiamo~~ con sapere ~~quantità~~ che velocità si riempie ~~in media~~ possiamo il laghetto in un minuto.
G: Grazie mille, Marta.

G6_3 P2_Dia_NM

~~VELOCITÀ MEDIA~~

$$V_{TOT}: 15\frac{l}{min} + 10\frac{l}{min} + 30\frac{l}{min} = 55\frac{l}{min}$$

$$t = \frac{S}{V_{TOT}} = \frac{300}{55} \cong 5,5\ min$$

DIALOGO
M: Scusa Guido, ho capito di avere commesso un e[rrore]: non dovevo fare la media delle velocità, ma dovevo sommarle perché agiscono tutte insiem[e]. ~~ecco~~ Dopo per trovare il tempo bisogna divid[ere] la capienza per la somma delle velocità. Il [tempo] che impiegherai sarà 5,5 minuti. Hai capito?
G: Sì, Marta, grazie.

G6_4 problema P3_Dia_NM

G6-4

P3_Dia_NM

Alfredo vuole noleggiare una macchina per viaggiare la prossima domenica, si reca all'agenzia dove conversa con Luisa, l'addetta ai noleggi di auto:

A: "Buongiorno, vorrei avere qualche informazione sui noleggi di auto, vorrei viaggiare la prossima domenica"
L:"Si, che tipo di macchina vuole noleggiare? Una utilitaria, una macchina di lusso o qualcosa di intermedio?"
A:"No, mi basta una utilitaria, non ho delle necessità particolari"
L:"Bene, allora per questo tipo di vettura possiamo offrirle tre diverse opzioni, la prima prevede una quota fissa di 20 euro più 0,25 euro per Km percorso, la seconda una quota fissa di 26 euro più 0,20 euro per Km percorso e la terza una franchigia di 50 Km per 25 euro più 0,5 euro per Km percorso"
A:"Dunque...che significa franchigia di 50 Km?"
L:"..è la prima volta che noleggia una macchina eh?.."
A:"eh si, ha ha"
L:"Significa che se domenica percorrerà una distanza inferiore a 50 Km, comunque dovrà pagare come se avesse fatto 50 Km"
A:"Ho capito, quindi per decidere l'opzione più conveniente dovrei avere un'idea di quanto Km percorrerò..giusto?"
L:"Esatto Signor Alfredo, è proprio così! Lei dovrebbe stimare, a seconda del percorso che vorrebbe fare, il numero di Km e quindi decidere l'opzione per lei più conveniente"
A:"..credo allora che chiederò a mio figlio Marco, lui studia ingegneria e capisce un po' più di me di matematica..poi torno e le dico"
L:"Va bene, allora arrivederci, se vuole può anche telefonare così le riserviamo la macchina,"

Alfredo spiega il problema al figlio che inizia a scrivere su un foglio e a ragionare ad alta voce col padre:

M:"..se ho ben capito possiamo esprimere matematicamente il costo delle tre opzioni come segue:

$$c_A = 20 + 0{,}25d \quad ; \; c_B = 26 + 0{,}20d \quad ; \; c_C = \begin{cases} 25 & 0 < d \le 50 \\ 0{,}5d & d > 50 \end{cases}$$

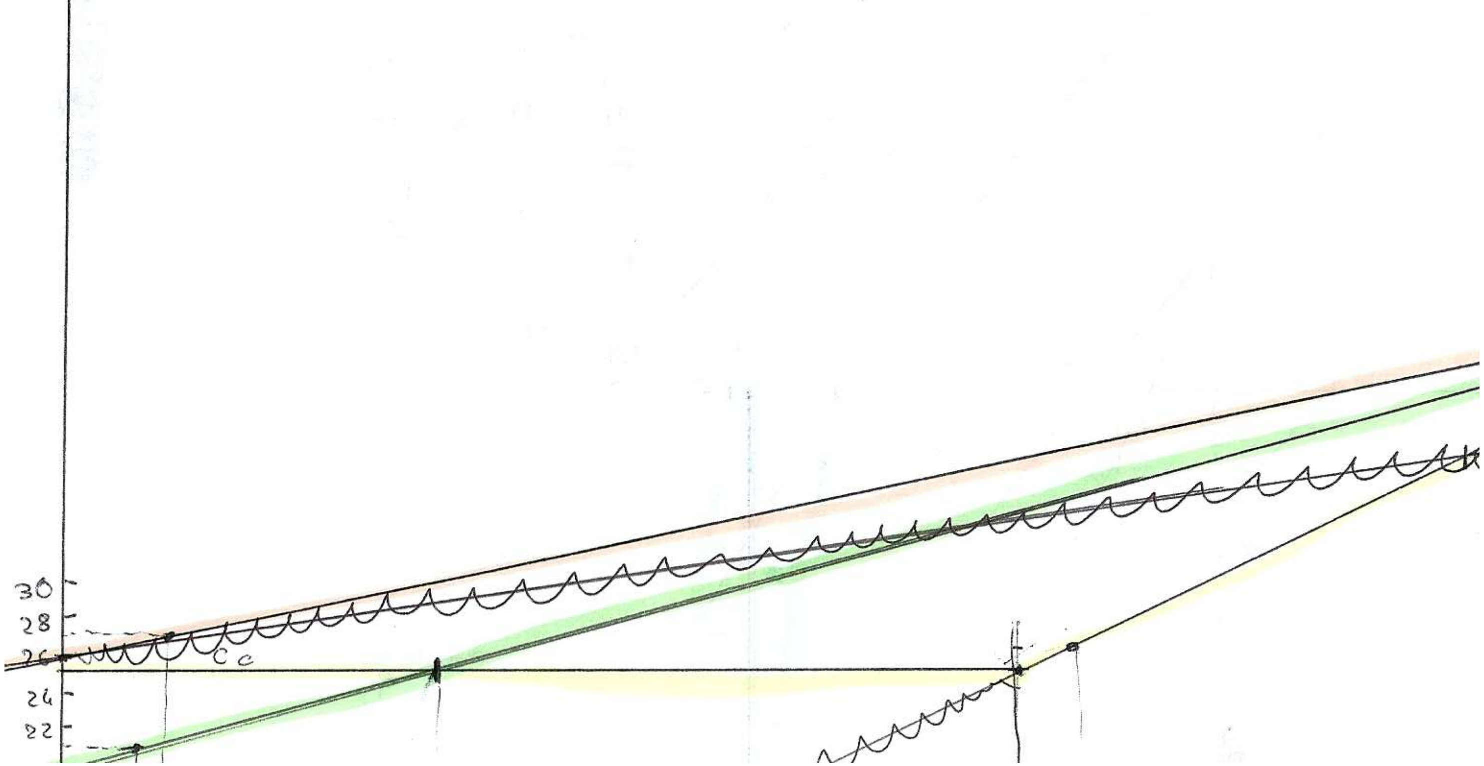
A:"Che cosa sono quei simboli?"
M:"In matematica si possono indicare le grandezze con dei simboli e delle lettere, qua le c indicano i diversi costi a seconda dell'opzione che si sceglie, e d è la distanza percorsa in Km"
A:"..capito...ma allora? Quale opzione devo scegliere?"
M:"Ma non lo so ancora..questo è solo un modo per rappresentare matematicamente i dati, ma la soluzione ottimale dipende da quanti Km tu intendi percorrere.."
A:"Quindi devo darti ora questo dato?"
M:"No, io adesso ci penso poi ti darò uno schema dal quale potremo scegliere la soluzione più conveniente a seconda dei Km che vuoi percorrere, così puoi pensare al tuo percorso con calma, poi mi dici quanti Km vorresti percorrere ed io ti dico quale opzione ti conviene, ok?"
A:"Ok, allora adesso studio il percorso..grazie e a più tardi allora"

Come potrà ragionare Marco per fornire uno strumento di decisione al padre? Quale delle tre opzioni conviene adottare in funzione del numero di Km che intendiamo percorrere?

Marco finisce i suoi calcoli e chiama il padre.
M: "Allora, papà... ho finito di elaborare i dati: dai risultati traspare che la tariffa A si rivela conveniente su distanze comprese tra 0 e 20 Km, mentre su una distanza compresa tra 20 e 80 Km conviene la tariffa C. Tra gli 80 e i 120, invece, conviene nuovamente la tariffa A.
Dopo i 120 Km, infine, conviene la tariffa B.
A: RIPENSANDOCI... CREDO CHE PRENDERÓ IL TRENO...

f

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA



G6_4 P3_Dia_NM ①

Ipotesi di Svolgimento

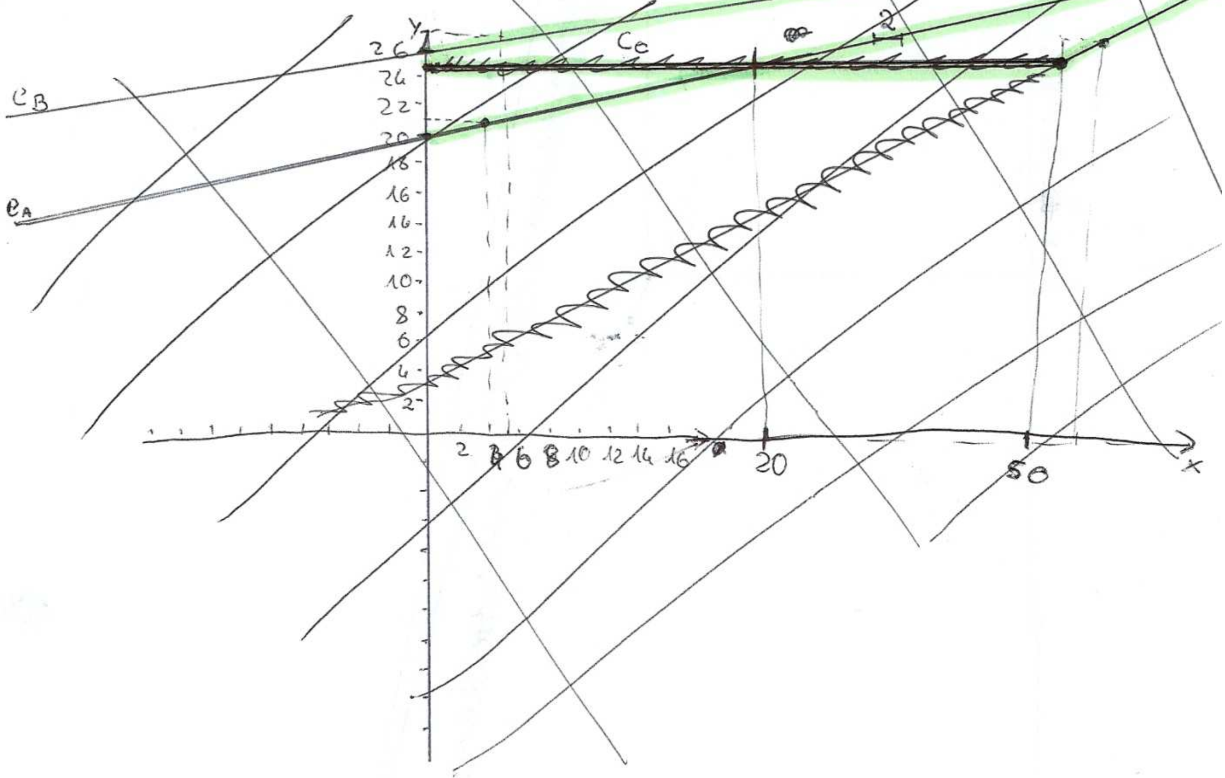
A) Diagramma cartesiano e calcolo dei punti d'intersezione fra le rette

A)

$C_A = 20 + 0{,}25\,d$ $\qquad y = 20 + 0{,}25\,x \qquad y = 20 + \frac{1}{4}x$

$C_B = 26 + 0{,}20\,d$ $\qquad y = 26 + 0{,}20\,x \qquad y = 26 + \frac{1}{5}x$

$$C_C = \begin{cases} 25 & 0 < d \leq 50 \\ 0{,}5\,d & d > 50 \end{cases} \qquad y = \begin{cases} 25 & 0 < x \leq 50 \\ 0{,}5\,x & x > 50 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y = 20 + \frac{1}{4}x \\ y = \begin{cases} 25 & 0 < x \leq 50 \\ 0,5\,x & x > 50 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 20 + \frac{1}{4}x \\ y = 25 \\ 0 < x \leq 50 \end{cases} \qquad \begin{cases} 20 + \frac{1}{4}x = 25 \\ 0 < x \leq 50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x = 5 \quad x = 20 \\ 0 < x \leq 50 \end{cases} \qquad \boxed{x = 20}$$

$$\begin{cases} y = 20 + \frac{1}{4}x \\ y = 25 + \frac{1}{2}x \\ x > 50 \end{cases} \qquad \begin{cases} 20 + \frac{1}{4}x = 25 + \frac{1}{2}x \\ x > 50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 80 + x = 100 + 2x \\ x > 50 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -20 \\ x > 50 \end{cases}$$

impossibile

$y = \frac{1}{2}x + q$ deve passare per $P(50;25)$

$25 = \frac{1}{2} 50 + q \qquad q = 0$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ y = 20 + \frac{1}{4}x \\ x > 50 \end{cases} \qquad \frac{1}{2}x = 20 + \frac{1}{4}x \qquad 2x = 80 + x \qquad \begin{cases} \boxed{x = 80} \\ x > 50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 20 + \frac{1}{4}x \\ y = 26 + \frac{1}{5}x \end{cases}$$

$$20 + \frac{1}{4}x = 26 + \frac{1}{5}x$$

$$400 + 5x = 520 + 4x$$

$$\boxed{x = 120}$$

Tra 0 e 20 km conviene la tariffa A. Tra 20 e 80 km conviene la tariffa C. Tra 80 e 120 km conviene nuovamente la tariffa A e dopo i 120 km coviene la tariffa B.

G6_5 problema P3_Ipr_NM

G6_5 P3_Ipr_NM (1)

• Supponiamo di percorrere 50 km

$CA = 20 + (0,25 \cdot 50) = 32,5€$

$CB = 26 + (0,20 \cdot 50) = 36€$ → Quindi conviene la tariffa C

$CC = 25€$

• Supponiamo di percorrere 100 km

$CA = 20 + (0,25 \cdot 100) = 45€$

$CB = 26 + (0,20 \cdot 100) = 46€$ → Quindi conviene la tariffa A

$CC = 25 + (0,5 \cdot 100) = 75€$

• Supponiamo di percorrere 7 km

$CA = 20 + (0,25 \cdot 7) = 21,75€$

$CB = 26 + (0,20 \cdot 7) = 27,4€$

$CC = 25€$ → Quindi conviene la tariffa A

(1) $20 + 0,25d > 25 \rightarrow 0,25d > 25 - 20 \rightarrow \cancel{0,25}d > \frac{5}{0,25} \rightarrow d > 20$

(2) $26 + 0,20d > 25 \rightarrow 0,20d > 25 - 26 \rightarrow 0,\cancel{20}d > \frac{-1}{0,20} \rightarrow d \cancel{>} -5$

impossibile

quindi

la tariffa C è conveniente per valori di d compresi tra 20 e 50 $(20 < d \leq 50)$

• per $d = 20$ km

$CA = 20 + (0,25 \cdot 20) = 25€$

$CB = 26 + (0,20 \cdot 20) = 30€$ → la tariffa A e la tariffa C sono equivalenti

$CC = 25€$

(3) $CB \rightarrow 26 + 0,20d < 25 \rightarrow 0,20d < 25 - 26 \rightarrow d < -5$

è impossibile che CB sia conveniente rispetto a Cc nella condizione $d \leq 50$.

(4) $CA \rightarrow 20 + 0,25d < 25 \rightarrow 0,25d < 25 - 20 \rightarrow 0,25d < \frac{5}{0,25} \rightarrow d < 20$

è conveniente rispetto a Cc se $d < 20$

⑤ $\begin{cases} d > 50 \\ C_A = 20 + 0{,}25d \end{cases}$ $\begin{cases} d > 50 \\ \cancel{0{,}25}d = \frac{-20}{0{,}25} \end{cases}$?

$\begin{cases} d > 50 \\ 20 + 0{,}25d \leq 25 \end{cases}$ $\begin{cases} d > 50 \\ 0{,}25d \leq 25 - 20 \end{cases}$ $\begin{cases} d > 50 \\ d \leq \frac{5}{0{,}25} \end{cases}$

$\begin{cases} d > 50 \\ d \leq 20 \end{cases}$ $\rightarrow$ la tariffa A è conveniente con $d > 50$ e $d \leq 20$

$\downarrow$

Per $d > 50$ C_A è sempre conveniente rispetto C_C.

⑥ $\begin{cases} d > 50 \\ C_B = 26 + 0{,}20d \leq 25 \end{cases}$ $\begin{cases} d > 50 \\ 0{,}20d \leq 25 - 26 \end{cases}$ $\begin{cases} d > 50 \\ d \leq \frac{-1}{0{,}20} \end{cases}$

$\downarrow$

Per $d > 50$ C_B è sempre conveniente rispetto a C_C

Quindi C_C non è mai conveniente con $d > 50$.

⑦ $20 + 0{,}25d > 26 + 0{,}20d$

$0{,}25d - 0{,}20d > 26 - 20$

$\cancel{0{,}05}d > \frac{6}{0{,}05} \rightarrow d > 120$

Per $d > 120$ la tariffa B è più conveniente ~~con~~ rispetto alla tariffa A

Per $d = 120$, C_A e C_B sono equivalenti.

G6_5 P3_1pr_NM ②

In conclusione:

- con $20 < d \leq 50$, è conveniente la tariffa C.
- × con $d \leq 50$, è impossibile che C_B sia conveniente rispetto a C_C.
- con $d < 20$, C_A è conveniente rispetto a C_C.
- con $d = 20$, la tariffa A e la ~~tra~~ tariffa C sono equivalenti.
- × con $d > 50$, C_A è sempre conveniente rispetto a C_C.
- × con $d > 50$, C_B è sempre conveniente rispetto a C_C.
- con $d > 50$, C_C non è mai conveniente.
- con $d > 120$, la tariffa B e' più conveniente rispetto alla tariffa A.
- con $d = 120$, C_A e C_B sono equivalenti

- Con $20 < d \leq 50$, e' conveniente la tariffa C
- con $d = 20$, la tariffa A e la tariffa C sono equivalenti
- con $d > 50$, C_C non e' mai conveniente
- con $d > 120$, la tariffa B e' più conveniente rispetto alla tariffa A
- con $d = 120$, C_A e C_B sono equivalenti

G6_6 problema P1_Dia_Me

Non scannerizzabile

Settimo incontro 05/05/2012

Contesto e metodologia	**Contesto di classe**: 4° liceo scientifico del Polo "Montessori-Da Vinci" di Porretta Terme, composta da 18 alunni. Il loro insegnante di matematica e fisica (Prof. Andrea Gualandi) mi dice la classe è composta da una buona parte di alunni che si impegnano molto e che alcuni alunni sono migliorati rispetto allo scorso anno (questa è stata la mia classe per metà anno scolastico lo scorso anno). **Adattamenti necessari**: l'insegnante curricolare non era presente **Metodologia:** come previsto dal progetto di sperimentazione, la classe è stata suddivisa, con l'aiuto dell'insegnante, in tre gruppi omogenei.(vedere allegati). A ciascuno dei gruppi è stata consegnata una scheda con il problema da risolvere (allegati) e fogli con un codice di gruppo per le loro produzioni scritte. L'insegnante era assente. Le attività sono state registrate con un registro scritto che viene riportato sotto.

REGISTRO ATTIVITA'

L'orario nel quale si è svolta la sessione andava dalle 10,30 alle 12,30.L'attività e cominciata con una mia breve presentazione e con la spiegazione del tipo di attività proposta. Ho chiarito che l'attività è una attività di sperimentazione di dottorato e che il mio obiettivo è osservare quello che accade durante il loro lavoro, specificando che:

- La mia attività consisterà nell'osservarli, registrando ed eventualmente filmando quello che fanno
- Il tipo di interazione dipende dal tipo di problema che stanno affrontando e non da altri fattori personali
- All'interno di ogni gruppo ci deve essere collaborazione ma non fra gruppi diversi, visto che questo potrebbe incidere sui risultati
- Ogni gruppo deve cercare di scrivere, spiegando e disegnando tutto quello che viene proposto, anche se non immediatamente utile per la soluzione del problema assegnato

Tempo	Gruppo	Evento	Azione Sperim.	Azione Insegn.
10,53		Consegna testi		
10,59		Tutti i gruppi hanno cominciato senza fare alcun disegno o grafico		
11,00	G7_1	Chiede, riferendosi alla frase del testo che io ho considerato come	Dico che possono seguire il procedimento che	

		metafora esplicita ("*Si può pensare che il livello dell'acqua letto sulla scala graduata si muova verso il basso ad una certa velocità*") se devono per forza usare il suggerimento oppure possono fare in un altro modo	preferiscono	
11,01	G7_1 G7_6	Dicono di avere finito		
11,03	G7_1		Chiedo si spiegare perché usino la somma	
11,04	G7_6		Chiedo si giustificare la somma	
11,08	G7_2	2-Hanno terminato	1-Chiedo cosa stiano facendo 3-chiedo di giustificare la somma e spiegare che tipo di grandezza sia litri/tempo (che comunque scricono con l'unità di misura errata l, inoltre parlano di tale grandezza come di volume)	
11,09	G7_1	Non giustificano la somma ma si limitano a scrivere quello che hanno fatto	Chiedo si spiegare il motivo per cui hanno sommato	
11,12	G7_6	1-la somma viene giustificata facendo appello alla forza delle pompe che si sommerebbe. 3-dicono prima che è uno spostamento, poi una alunna parla di volume diviso tempo ed un altro alunno dice che è una velocità	2-chiedo che tipo di grandezza sia litri/minuti 4-chiedo agli alunni di pensare assieme a come rispondere alle due domande (giustificazione della somma e tipo di grandezza)	

11,16	G7_5	Chiedono se può andare bene usare una tabella nella quale stanno organizzando i dati in fasce chilometriche	Dico di continuare e di scrivere tutto quello che fanno sui fogli consegnati, visto che stanno usando anche altri fogli	
11,19	G7_3	Dicono di avere finito	Chiedo di esplicitare le operazioni fatte e di spiegare l'uso della somma	
11,21	G7_4	2-stanno costruendo un grafico tracciando i punti per le diverse opzioni ad intervalli di 10 Km	1-chiedo cosa stiano facendo 3-dico di procedere col loro metodo	
11,23	G7_2	2-lo chiamano inizialmente volume e poi correggono in volume estratto in un minuto, anche se nell'unità di misura indicano solo L	1-chiedo che tipo di grandezza sia litri/minuti	
11,28	G7_6	1-Parlano di gittata riferendosi alla capacità della pompa di spostare acqua (si riferiscono alle nozioni apprese in scienze dove il professore ha parlato di gittata relativamente al cuore) 3-dicono che il rapporto litri/minuti non è una velocità perché non è spazio/tempo ma volume/tempo.	2-Dico che in fisica si parla di portata 4-chiedo di spiegare il fatto che queste portate vengono sommate	
11,33	G7_5	1-mostrano una tabella nella quale hanno organizzato i dati in fasce chilometriche con intervalli di 50 Km 3-osservano che per arrivare alla soluzione esatta dovrebbero *calcolare tutti i valori*	2-chiedo come possano essere sicure che i valori per i quali cambia la convenienza siano proprio quelli indicati e faccio un esempio usando la loro tabella	
11,36	G7_2	1-Mostrano il dialogo nel quale, in realtà, non viene data la giustificazione della somma 3- una alunna dice che è intuitivo	2-Insisto sulla spiegazione della somma 4-chiedo perché fanno proprio una somma e non	

		e logico come 2+2 fa 4	altre operazioni	
11,39	G7_1	Mostrano la loro spiegazione	Propongo di risolvere il problema provando a seguire il suggerimento del testo (la metafora)	
11,42	G7_4	1-mostrano un grafico composto da insiemi di punti che sembrano allineati (ma loro non parlano mai di rette) dove vedono che si possono dividere le distanze in fasce. Sfruttano le caratteristiche geometriche per trovare rapidamente una soluzione che è abbastanza corretta (solo un punto a 100 Km non è corretto)	2-Chiedo si spiegare come ottengono i valori dove si ha un cambiamento di convenienza. In effetti non riconoscono esplicitamente nelle equazioni delle rette e non impostano sistemi per ottenere i punti di intersezione. Il loro ragionamento è tutto grafico, per questo si sbagliano con il punto a 100 K, perché il loro grafico suggeriva una intersezione in realtà inesistente	
11,48	G7_3	2-dicono che è la parte dove ci sono i dati senza individuarne altre 4- Un alunno dice subito velocità, poi si blocca a pensarci ed una alunna dice di no che è un volume	1-chiedo quale parte del testo li abbia particolarmente aiutati 3-chiedo che tipo di grandezza sia litri/minuti 5-propongo di discuterne insieme e scriverlo	
11,51	G7_6	Spiegano che va fatta una somma perché le pompe agiscono contemporaneamente (un alunno dice anche che i lavori delle pompe si sommano)		
11,53	G7_1	Dicono che i rapporti litri/minuto rappresenterebbero le velocità e poi userebbero la formula velocità=spazio/tempo	Dico di scriverlo	
11,56	G7_5	1-chiedono aiuto perché non sanno come proseguire	2-chiedo che tipo di equazione sia y=0,25*x+20	

		3- non sanno cosa rispondere 5- una alunna dice subito che è "*tipo una retta*", e propongono di fare un grafico	4- faccio scrivere l'equazione y=m*x+q	
11,59	G7_3	Scrivono che la quantità litri/minuti è una velocità ma non ne sono sicuri	Propongo di sfruttare questa idea per giustificare la somma	
12,02	G7_4	Da quello che scrivono si vede che i valori di intersezione (che comunque *non chiamano intersezioni*) sono stati trovati a tentativi, non hanno imposto alcun sistema anche perché non sono convinti che i grafici siano rette. Un alunno dice che sembrano o dovrebbero essere rette. Hanno comunque sfruttato le proprietà geometriche per trovare la soluzione del problema.	Chiedo cosa stiano facendo	
12,06	G7_6		Chiedo di pensare ad un problema che somigli a quello dato ma nel quale le grandezze litri/minuto diventino delle velocità	
12,08	G7_1	Hanno scritto una frase molto sintetica su come usare la velocità	Li spingo ad elaborare l'idea più in profondità, a pensare di dovere risolvere di nuovo il problema ma sfruttando quel suggerimento	
12,12	G7_5	Mi mostrano il grafico nel quale non hanno rappresentato correttamente l'opzione C	Spiego come interpretare tale opzione e capiscono che è una retta spezzata. Chiedo di spiegare bene come costruiscono il grafico	
12,15	G7_2		Propongo di inventarsi un problema simile nel quale si tratti di velocità. Faccio notare l'errore sull'unità di	

			misura e lo correggono	
12,17	G7_6	Propongono un primo problema (che tuttavia non li soddisfa) dove ci sono tre persone che devono percorrere uno stesso tragitto e lo fanno in tre tempi diversi. Ciò che non li convince è che le persone dovrebbero "*fondersi*" per poter tradurre il problema del testo e la velocità non sarebbe la stessa	Dico di scrivere bene quello che hanno pensato (visto che non è del tutto chiaro) e di continuare a pensare anche ad altri problemi	
12,24	G7_4	2-dicono di non saperlo 4-provano alcune espressioni (anche di secondo grado) ma non sono convinti di nessuna 6-riconoscono la corrispondenza fra il costo e la y, la distanza e la x e gli altri due parametri. 8-dicono che le equazioni vanno messe a sistema	1-chiedo come si faccia a capire se sono o meno delle rette 3-chiedo quale è l'equazione della retta 5- ricordo loro l'equazione y=m*x+q e li spingo a vedere come sfruttare questa equazione nel problema 7-chiedo come si possano trovare i punti di intersezione con queste equazioni	
12,29	G7_1	2-una alunna dice di si ma un secondo alunno dice che potrebbe invece dipendere dalla pressione	1-chiedo se la portata dell'acqua durante la fuoriuscita è costante 3-confermo l'idea dell'alunno e chiedo come cambia, se cambia, la loro soluzione	
12,33	G7_5		Spiego il metodo geometrico basato sulle rette al gruppo	
12,36		Consegna dei lavori		

Osservazioni

Descrivo alcuni dei momenti significativi che ho riscontrato dall'analisi dei protocolli scritti ed orali.

G7_1 testo P1_Ipr_Me

Cominciano, senza fare disegni, calcolando con quanti litri al minuto ciascun rubinetto permette di svuotare il tino, poi sommano le quantità ottenute, infine dividono la capacità del tino per il totale ed ottengono il risultato 4,62 minuti. Nella spiegazione della somma scrivono che devono sommare perché è come se ci fosse un solo rubinetto. In seguito alla mia richiesta di sfruttare il suggerimento del testo, scrivono che considerando i litri che escono come velocità ed i litri totali che escono come la velocità totale per trovare il tempo devono dividere il volume del tino per la velocità totale.

G7_2 testo P2_Dia_NM

Non fanno disegni ed iniziano calcolando il rapporto fra il volume della vasca ed i tempi impiegati con ciascuna delle pompe. L'unità di misura è inizialmente scorretta (l) e la correggono solo in seguito ad una mia osservazione. Poi sommano tali rapporti ed impostano una proporzione per ricavare il tempo totale per riempire la vasca. La loro giustificazione della somma non è del tutto chiara, dicono infatti che : (la somma dei volumi pompati in un minuto da ciascuna pompa) *è un passaggio fondamentale perché trovando il volume totale pompato in un minuto rimane una sola incognita nella proporzione V1:T1=Vf:T2,* sembra quasi che la ragione stia in una maggiore agibilità matematica (non so fino a che punto ne fossero consapevoli ed io non sono riuscito ad approfondire).

Il problema che propongono è il seguente:"*Marco e Luca partono all'istante t e Luca parte 100 m avanti rispetto a Marco e procede con una velocità di 10Km/h. Dopo 20 secondi Marco lo raggiunge e procedono entrambi alla velocità di Marco. In un minuto hanno percorso 40 metri. Quale è la velocità di Marco?*"

G7_3 testo P1_Dia_Mi

Non fanno alcun disegno ed iniziano a calcolare per ogni rubinetto il rapporto fra il volume del tino ed il tempo impiegato, esplicitando che si tratta di litri al minuto. Sommano le grandezze e poi dividono il volume per il risultato ottenendo il tempo 4,63 minuti.

Nella giustificazione della somma dicono che "*l'unica operazione possibile è la somma, in quanto sarebbe come sommare i litri che escono al minuto aprendo un rubinetto dopo l'altro.*"

Alla domanda sul tipo di grandezza che è litri /minuti dicono che è una velocità ma non ne sono sicuri.

G7_4 testo P3_Ipr_NM

Iniziano con la costruzione di un grafico. Fissano due assi cartesiani, quello orizzontale dei Km e quello verticale dei costi (non usano x ed y), poi calcolano i costi delle tre opzioni ad intervalli di 10 Km e segnano punti di tre colori diversi. Dal grafico quindi ricavano la soluzione che inizialmente non è completamente corretta dato che individuano uno dei punti di cambiamento di convenienza a 100 Km osservando le caratteristiche del loro grafico. In effetti non sfruttano il concetto e l'equazione di retta né per disegnare i grafici (che sono costruiti a partire dai punti) né per determinare le intersezioni (che vengono stabilite graficamente)

G7_5 testo P3_Dia_Mi

Costruiscono una tabella nella quale suddividono in intervalli di 50 Km le distanze da percorrere e per ogni fascia calcolano il costo di ciascuna opzione e scrivono quale opzione è più conveniente. Il problema è che in ciascuna fascia dovrebbero stabilire in quali punti calcolare il costo visto che la convenienza può cambiare (come mostro loro con un esempio). Inizialmente interpretano in maniera scorretta l'opzione C, aggiungendo 25 euro, dopo che spiego come va interpretata rifanno i calcoli. Questo errore è visibile anche nel grafico, nel quale inizialmente rappresentano l'opzione C come una retta. Infine, in seguito alle mie osservazioni, propongono un grafico dove, almeno qualitativamente, le rette sono rappresentate bene anche se non riescono a sfruttare il grafico per trovare la soluzione del problema.

G7_6 testo P2_Ipr_NM

Calcolano la quantità di acqua spostata in un minuto, sommano le quantità trovate ed infine dividono la capacità per la quantità trovata ottenendo un tempo di 5,45 minuti. Nella spiegazione della operazione di somma dicono che con la somma riescono a trovare la *gittata* (ma prima scrivono e poi cancellano il termine *forza*) di una pompa equivalente alle tre date. La somma è giustificata dal fatto che le pompe agiscono contemporaneamente. Poi spiegano cosa intendono per gittata : quantità di acqua portata in un minuto e ribadiscono il fatto che la somma deriva dal fatto che le pompe agiscono contemporaneamente. Come problema simile a quello dato propongono il seguente: "*Arturo, Claudio e Andrea stanno facendo una corsa sulla stessa strada rettilinea e partendo ciascuno dalla propria casa. Andrea, il più lento, mantiene per l'intera durata della corsa una velcità di 10Km/h, Claudio mantiene la velocità di 20Km/h, Arturo, il più veloce, mantiene i 40Km/h. Sapendo che la corsa è durata 3 ore ed arrivano contemporaneamente, quanto distano le loro case dall'arrivo?*"

G7_1 problema P1_Ipr_Me

G 7_1 P1_ Ipr. Me (1)

DATI:

capacità tino: 50 L

r largo: 10 minuti

r medio: 15 minuti

r piccolo: 20 minuti

L al minuto = rubinetto largo $= \frac{50}{10} = 5 \frac{l}{m}$

rubinetto medio $= \frac{50}{15} = 3{,}33 \frac{l}{m}$

rubinetto piccolo $= \frac{50}{20} = 2{,}5 \frac{l}{m}$

L TOTALI AL MINUTO APRENDO TUTTI I RUBINETTI =

$5 + 2{,}5 + 3{,}33 = 10{,}83$

$T = \frac{50}{10{,}83} = 4{,}62$ min

Spiegazione: abbiamo trovato i L al minuto che escono da ogni rubinetto. Poi sommando questi risultati il numero di litri che escono in un minuto.
Per trovare il tempo per svuotare completamente il tino abbiamo fatto il rapporto tra la capacità del tino e il valore dei litri totale uscente in un minuto.
ABBIAMO FATTO QUESTO RAGIONAMENTO PERCHE' DOBBIAMO TROVARE IL TEMPO TOTALE IN CUI IL TINO SI SVUOTA. DATO CHE IL TINO HA TRE RUBINETTI DOBBIAMO SOMMARE I LITRI AL MIN DI OGNUNO COME SE IL RUBINETTO FOSSE UNO SOLO.

SE CONSIDERIAMO I LITRI CHE ESCONO AL MINUTO COME VELOCITÀ, E I LITRI TOTALI AL MINUTO LA VELOCITÀ TOTALE, PER TROVARE IL TEMPO IMPIEGATO DOBBIAMO FARE IL RAPPORTO TRA VOLUME TOTALE DEL TINO E LA VELOCITÀ TOTALE TROVATA.

POICHÉ LA VELOCITÀ NON È COSTANTE NEL TEMPO:

$F_{PESO} = 9,8 \cdot massa$

$P = \frac{F_P}{\ } \cdot S_{TINO}$

G7_2 problema P2_Dia_NM

G7_2 P2_Dia_NM (1)

$V = 300\,l$ $PR = 20\,min$ $PG = 30\,min$ $PV = 10\,min$

VOLUME PR estratto in 1 minuto $= \frac{300}{20} = 15\,l/min$ $V_{TOT\ in\ un\ minuto} = 55\,l/min$

" PG $= \frac{300}{30} = 10\,l/min$

" PV $= \frac{300}{10} = 30\,l/min$ $55 : 1 = 300 : x$

$x = \frac{300}{55} = 5{,}5\,min.$

FATTO!

M: Dividendo il volume totale per i rispettivi tempi impiegati da ogni pompa si ottengono le quantità estratte in un minuto. Sommando i volumi ottenuti si trova il volume totale pompato in un minuto utilizzando tutti e tre gli oggetti. Infine tramite una proporzione otteniamo il tempo impiegato da tutte e tre le pompe contemporaneamente

G: Ah ho capito. ~~Perché~~ Ma che tipo di grandezze si tratta?

M: Per quanto riguarda il volume esso è una grandezza derivata ~~della~~ quale si può risalire alla grandezza fondamentale della lunghezza (m) poiché $1\,dm^3 = 1\,l$. Il tempo invece è una grandezza fondamentale la cui unità di misura standard è il secondo. ~~Noi~~ Io ho utilizzato per comodità il minuto, considerando che quest'ultimo è formato da 60 secondi.

G: C'è un passaggio che non mi è chiaro, cioè quello in cui hai sommato i volumi ottenuti da ogni pompa in un minuto. Perché?

G 7_2 P2_Dia_NM

Marco e Lucas partono all' istante To
Luca parte 100 m avanti di Marco e procede
con una velocità di 10 Km/h. Dopo 20 s Marco
raggiunge e procedono entrambi alla velocità
Marco. In un minuto ~~Marco~~ hanno compiuto
40 metri. Velocità Marco?

M: Si tratta di un passaggio fondamentale perché trovando il volume totale pompato in un minuto ~~in questo modo~~ rimane una sola incognita nella proporzione $V_i : T_i = V_F : T_{ii}$

B: Ah ok...

P: Brava Marta, chiederò al prof. Max Salvi di metterti un 8 in pagella!

G7_3 problema P1_Dia_Mi

G 7_3   P1_Dia_Mi   1

$V = 50\,l$ $t_1 = 10$ min. → rubinetto più grande
$t_2 = 15$ min. → rubinetto medio
$t_3 = 20$ min. → rubinetto più piccolo $50:10=5$

Usando la calcolatrice troviamo che: *2 retro

· col rubinetto di diametro maggiore escono 5 l al minuto
$50:15=3{,}3$
· col rubinetto di diametro medio escono 3,3 l al minuto
$50:20=2{,}5$
· col rubinetto di diametro minore escono 2,5 l al minuto

~~Qfi~~ Tenendo tutti e tre i rubinetti aperti
$5+3{,}3+2{,}5=10{,}8\,l$ al min.
~~abbiamo~~ escono 10,8 l al minuto. *vedi retro

~~Pe~~ Per trovare il tempo impiegato dal tino e svuotarsi facciamo la divisione tra il ~~V~~ totale e il V che esce in un minuto: $50:10{,}8=4{,}63$ l/min

Con calcolatrice

M: "~~Posso~~ Puoi sempre utilizzare la calcolatrice facendo qualche piccolo calcolo semplice, ma ingegnoso".

C: "E se non ho la calcolatrice?"

M: "~~Facendo~~ Fai i calcoli a mente!!"

C: "Ma io non sono bravo in matematica... uffa!" Mi dici come si fa per piacere?"

M: "Allora... devi calcolare quanti litri escono in un minuto da ogni rubinetto..."

C: "E poi??"

M: "Sommo questi valori per ottenere quanti litri escono in tutto in un minuto e..."

C: "Non ~~ho~~ siamo ancora alla fine?!?"

M: "Divido il volume totale per il volume che esce in un minuto e il gioco è fatto! Siamo diventati piccoli scienziati!!"

C: Bravo papà! Sei grandissimo!!!"

* Abbiamo eseguito questa somma:

$5+3,3+2,5 = 10,8$ l.

perchè ~~se dovessimo~~ dovendo ottenere quanti litri ~~[illegible]~~ escono al minuto tenendo tutti i rubinetti aperti l'unica operazione possibile è l'addizione, in quanto sarebbe come sommare i litri che escono al minuto aprendo un rubinetto dopo l'altro.

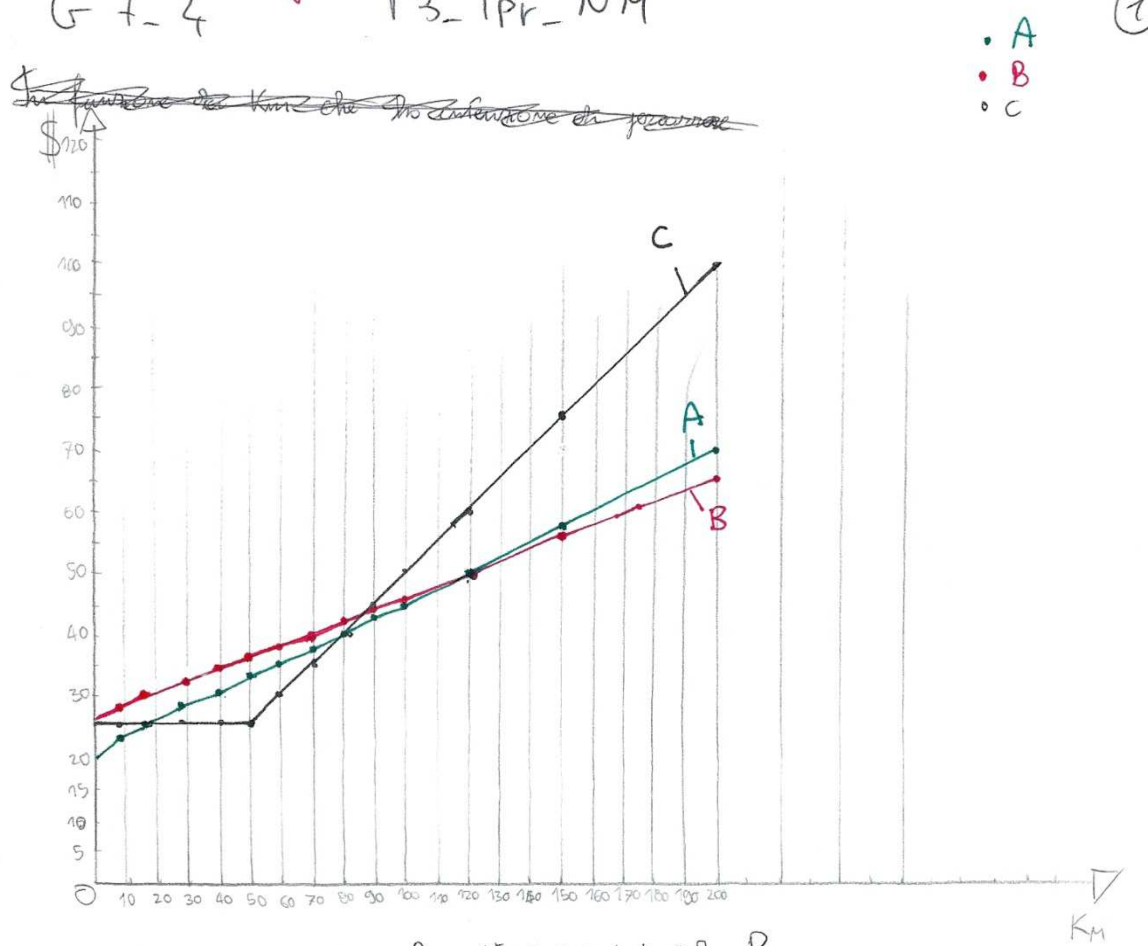
*2 Secondo noi, i litri che escono al minuto rappresentano una velocità, ma non ne siamo sicuri.

~~Supponendo che la grandezza ottenuta dalla somma sia una velocità noi [illegible] facciamo una somma di varie velocità. Abbiamo però [illegible] che [illegible] [illegible]~~

La somma citata sopra è data dall'unione ~~di tutte~~ delle tre velocità per ottenere la velocità totale in un ~~[illegible]~~ minuto.

G7_4 problema P3_Ipr_NM

G7_4 P3_Ipr_NM (1)



- PER LE DISTANZE > 120 Km la più conveniente è la B
- PER DISTANZA 80 < Km < 120 la più conveniente è la A
- PER DISTANZE TRA 20 < Km < 80 la più conveniente è la C
- PER DISTANZE < 20 Km la più conveniente è la A

In base ai Km percorsi siamo giunti alla conclusione che ~~[illegible]~~ le diverse tipologie ~~[illegible]~~ sono più convenienti nelle differenti fasce chilometriche. Adottando un metodo statistico siamo riusciti a inserire i dati in un grafico €/Km valutando come al variare dei Km percorsi le 3 varie tipologie crescono in modo differente.
Abbiamo ottenuto i valori in base ai Km percorsi seguendo le caratteristiche delle tre possibili opzioni. Per individuare l'offerta più economica in base ai Km da percorrere abbiamo osservato ~~[illegible]~~ il grafico in particolare la fascia meno dispendiosa per un costo più ridotto in base alle proprie esigenze.

G7_5 problema P3_Dia_Mi

G7_5 P3_Dia_Mi (1

: $y = 0{,}25x + 20$

: $y = 0{,}20x + 26$

: $y = \begin{cases} 25 & 0 < x \leq 50 \\ 0{,}5x & x > 50 \end{cases}$

$x \longrightarrow$ distanza percorsa in

$y \longrightarrow$ diversi costi

Km	A	B	C	+ conve
$0 < x \leq 50$	* $20 < y \leq 32{,}5$	$26 < y \leq 36$	$y = 25$	C
$50 < x \leq 100$	$32{,}5 < y \leq 45$	$36 < y \leq 46$	$25 < y \leq 75$	A
$100 < x \leq 150$	$45 < y \leq 57{,}5$	$46 < y \leq 56$	$75 < y \leq 100$	B
$150 < x \leq 200$	$57{,}5 < y \leq 70$	$56 < y \leq 66$	$100 < y \leq 125$	B
$200 < x \leq 250$	$70 < y \leq 82{,}5$	$66 < y \leq 76$	$125 < y \leq 150$	B
$250 < x \leq 300$	$82{,}5 < y \leq 95$	$76 < y \leq 86$	$150 < y \leq 175$	B

A: $y = 0{,}25 \cdot 0 + 20 = 20$

$y = 0{,}25 \cdot 50 + 20 = 32{,}5$

$y = 0{,}25 \cdot 100 + 20 = 45$

$y = 0{,}25 \cdot 150 + 20 = 57{,}5$

$y = 0{,}25 \cdot 200 + 20 = 70$

$y = 0{,}25 \cdot 250 + 20 = 82{,}5$

$y = 0{,}25 \cdot 300 + 20 = 95$

calcolatrice

G 7_5 P3_Dia_Mi ②

B: $y = 0,20 \cdot 0 + 26 = 26$

$y = 0,20 \cdot 50 + 26 = 36$

$y = 0,20 \cdot 100 + 26 = 46$

$y = 0,20 \cdot 150 + 26 = 56$

$y = 0,20 \cdot 200 + 26 = 66$

$y = 0,20 \cdot 250 + 26 = 76$

$y = 0,20 \cdot 300 + 26 = 86$

calcolatrice

C: già il testo considera $25€ \rightarrow 0 < x \leq 50$

$y = 0,5 \cdot 100 + 25 = 75$

$y = 0,5 \cdot 150 + 25 = 100$

$y = 0,5 \cdot 200 + 25 = 125$

$y = 0,5 \cdot 250 + 25 = 150$

$y = 0,5 \cdot 300 + 25 = 175$

calcolatrice

Sbagliati perchè non bisogna aggiungere 25.

$y = 0,5 \cdot 100 = 50$

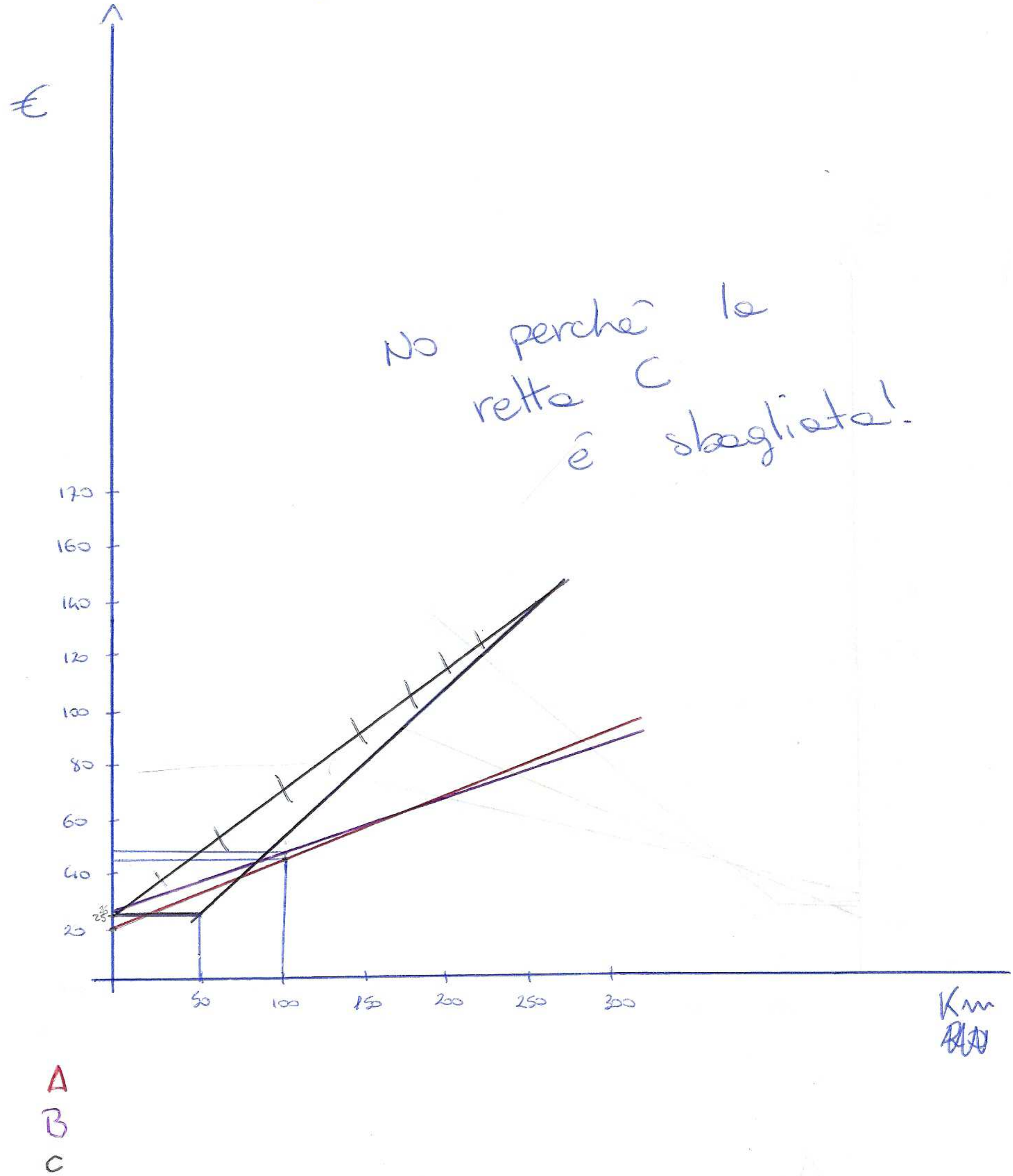
$y = 0,5 \cdot 150 = 75$

$y = 0,5 \cdot 200 = 100$

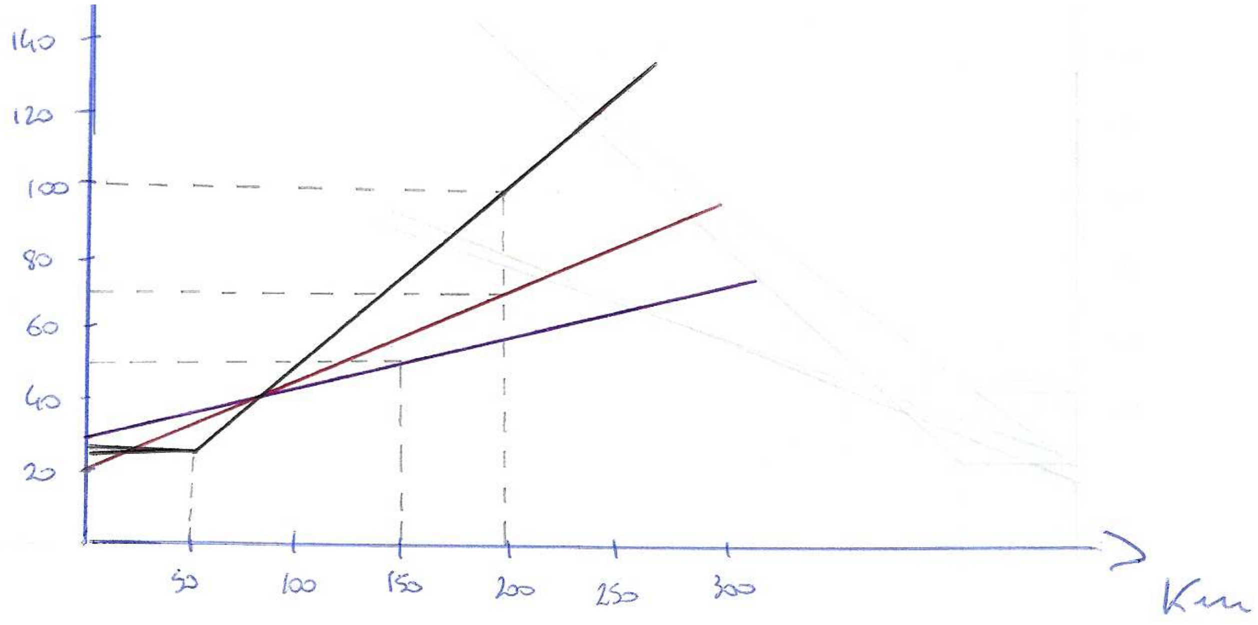
$y = 0,5 \cdot 250 = 125$

$y = 0,5 \cdot 300 = 150$

7 - 5 P3 - Dia - Mi (3)



No perché la retta C é sbagliata!



A

B

C

G7_6 problema P2_Ipr_NM

G7_6 P2_Ipr_NM ①

TROVIAMO L'ACQUA SPOSTATA ~~DALLE~~ DA OGNI SINGOLA POMPA IN UN MINUTO.

POMPA A = 300L : 20 min = 15 L/min
POMPA B = 300L : 30 min = 10L/min
POMPA C = 300L : 10 min = 30 L/min

SOMMIAMO I DATI OTTENUTI PER CAPIRE L'ACQUA SPOSTATA IN UN MINUTO DALLE 3 POMPE.

15 + 10 + 30 = 55 L/min

TROVIAMO COSÌ IL RISULTATO DEL PROBLEMA

$$\frac{300\ L}{55\ L/min} = 5{,}45\ min$$

↑ UTILIZZATA LA CALCOLATRICE

SOMMANDO LO SPOSTAMENTO D'ACQUA DELLE POMPE ~~POSSIAM~~ IN UN DETERMINATO LASSO DI TEMPO RIUSCIAMO A CAPIRE ~~QUANTO~~ LA ~~QUALE~~ ~~DAT OTTENERE LA~~ QUANTITÀ D'ACQUA CHE SPOSTEREBBE UNA POMPA CAPACE DI GENERARE UNA ~~FORZA~~ GITTATA EQUIVALENTE ALLA SOMMA DELLE 3 RAGGIUNGENDO COSÌ IL RISULTATO DESIDERATO.

UTILIZZIAMO LA SOMMA IN QUANTO LE TRE POMPE AGISCONO CONTEMPORANEAMENTE E RIVERSANO IL CONTENUTO NELLO STESSO LUOGO. QUINDI LA GITTATA (QUANTITÀ DI ACQUA POMPATA IN UN MINUTO) DELLE 3 SINGOLE POMPE COINCIDE CON LA SOMMA DELLE 3 GITTATE POICHÉ LAVORANO CONTEMPORANEAMENTE QUINDI SI SOMMANO I 3 DATI PER OTTENERE UN DATO UNICO DELLE 3 GITTATE.

~~RA~~ ARTURO, CLAUDIO E ~~ROBERTO~~ ANDREA STANNO FACENDO UNA * ~~GARA~~ ~~CORSA~~ PARTENDO E ~~IN PUNTI DIFFERENTI~~
~~SU UN RETILINEO~~. ANDREA, IL PIÙ LENTO, MANTIENE PER L'INTERA DURATA DELLA ~~GARA~~ CORSA UNA VELOCITÀ DI 10 Km/h; CLAUDIO, MANTIENE LA VELOCITÀ DI 20 Km/h, ARTURO, IL PIÙ VELOCE, MANTIENE I 40 km/h SAPENDO CHE LA CORSA È DURATA 3 ORE ~~QUANTO~~ ~~DIST~~ E SONO ARRIVATI CONTEMPORANEAMENTE. QUANTO DISTANO LE LORO CASE DALL'ARRIVO?

* CORSA SULLA STESSA STRADA PARTENDO DA ~~ALLE PUNTI DIFFERENTI~~ LORO CASE (LA STRADA È RETILINEA)

Ottavo incontro 16/05/2012

Contesto e metodologia	**Contesto di classe**: 4° itis (indirizzo meccanica) del Polo “Montessori-Da Vinci” di Porretta Terme, composta da 19 alunni. In questo incontro erano assenti 3 alunni. La loro insegnante di matematica (Prof.ssa Maria Agostini) mi dice la classe non è di grande qualità ma ci sono alcuni alunni che si distinguono. Gli studenti, seguendo il programma dell’itis, hanno già iniziato lo studio dell’analisi matematica ed hanno già studiato le derivate. **Adattamenti necessari**: l’insegnante curricolare non era presente **Metodologia:** come previsto dal progetto di sperimentazione, la classe è stata suddivisa, con l’aiuto dell’insegnante, in sei gruppi omogenei.(vedere allegati). A ciascuno dei gruppi è stata consegnata una scheda con il problema da risolvere (allegati) e fogli con un codice di gruppo per le loro produzioni scritte. L’insegnante era assente. Le attività sono state registrate con un registro scritto che viene riportato sotto.

REGISTRO ATTIVITA’

L’orario nel quale si è svolta la sessione andava dalle 10,30 alle 12,30.L’attività e cominciata con una mia breve presentazione e con la spiegazione del tipo di attività proposta. Ho chiarito che l’attività è una attività di sperimentazione di dottorato e che il mio obiettivo è osservare quello che accade durante il loro lavoro, specificando che:

- La mia attività consisterà nell’osservarli, registrando ed eventualmente filmando quello che fanno
- Il tipo di interazione dipende dal tipo di problema che stanno affrontando e non da altri fattori personali
- All’interno di ogni gruppo ci deve essere collaborazione ma non fra gruppi diversi, visto che questo potrebbe incidere sui risultati
- Ogni gruppo deve cercare di scrivere, spiegando e disegnando tutto quello che viene proposto, anche se non immediatamente utile per la soluzione del problema assegnato
-

Tempo	Gruppo	Evento	Azione Sperim.	Azione Insegn.
10,56		Consegna testi		
11,06	G8_1	Iniziano facendo un disegno che rappresenta la situazione del problema		

11,08	G8_1	Iniziano a calcolare quanto tempo ci mette ogni pompa per versare un litro ma non riescono poi a procedere perché (dice un alunni) “non possiamo sommare i tempi”		
11,10	G8_2	Dicono di avere finito. Hanno calcolato per ogni pompa la velocità di riempimento , sommano e poi dividono la capacità della vasca per la velocità complessiva		
11,10	G8_3	Stanno procedendo per tentativi, senza disegni		
11,11	G8_4	Stanno calcolando la velocità ma poi utilizzano un metodo differente, non sommano le velocità ma considerano quanti litri svuotano singolarmente i rubinetti per arrivare a 50, quindi procedono per tentativi. Chiedono se può andare	Dico di procedere spiegando bene quello che fanno	
11,13	G8_5	Non sanno ancora come procedere. Un alunno propone di fare la media dei tempi ma un altro non è d’accordo	Dico di procedere	
11,15	G8_6	Stanno ancora analizzando i dati. Si chiariscono (con me) che l’obiettivo è trovare l’opzione migliore in generale, indipendentemente dal numero specifico di chilometri		
11,17	G8_2		Chiedo di spiegare bene l’uso della somma, perché sommano le grandezze	
11,19	G8_5	1-Un alunno chiede se può andare bene una velocità di 4 m/s. 3-Non sanno spiegarlo bene ma l’alunno che ha proposto tale valore dice che hanno trovato la	2-Chiedo come hanno trovato quel valore. 4-dico che stiamo supponendo che la vasca sia vuota e che venga riempita,	

		media dei tempi, trasformata in secondi e poi diviso il risultato per la capacità della vasca. Un alunno dice che dovrebbero sapere la quantità complessiva di acqua che viene portata dalle pompe 5-si ferma a riflettere ma non sa darmi una risposta	quindi la quantità di acqua è proprio 300 litri. Chiedo perché abbiano usato l'unità di misura metri/secondi e stia usando il termine velocità	
11,24	G8_1	Dicono che stanno procedendo per tentativi, trovano che in 5 minuti ogni pompa versa un certo numero di litri, sommano questi litri ottenendo un numero minore di 50 (hanno detto che hanno provato fino ad arrivare al numero che si avvicinava di più a 50)	Chiedo cosa stiano facendo	
11,30	G8_4	Mi chiedono se va bene il procedimento che stanno usando, nel calcolo che fanno sono sbagliate le unità di misura	Faccio notare l'errore e chiedo di chiarirsi il senso di quello che stanno facendo (dai calcoli infatti ho l'impressione che non abbiano chiaro quello che hanno fatto)	
11,32	G8_5	Sono ancora fermi e non sanno come procedere		
11,35	G8_6	Stanno procedendo per tentativi ed hanno provato con i valori di 80, 100, 150 che hanno scelto guardando i numeri delle equazioni ed i calcoli che facevano ma non sono molto convinti		
11,37	G8_1	Arrivano ad impostare una proporzione, capiscono che sapendo quanti litri vengono versati in 5 minuti (il valore che hanno determinato in precedenza), tramite una		

		proporzione possono ricavare il tempo esatto.		
11,38	G8_2	In realtà non hanno spiegato il motivo della somma	Chiedo perché facciano proprio una somma	
11,41	G8_3	Stanno procedendo per tentativi ed ancora senza grafici o disegni		
11,43	G8_4	Hanno alcuni dubbi su come procedere con i 6,8 litri che devono essere svuotati "contemporaneamente" (hanno tolto ai 50 litri iniziali quelli che le pompe versano in 5 minuti).Un alunno fa un disegno schematico e si capisce che non sa come mettere insieme i diversi dati relativi ai singoli rubinetti . Il problema risiede nel fatto che hanno cominciato con un tipo di ragionamento che non riescono più ad applicare per i litri che mancano perché nel primo caso hanno considerato come dato di partenza il tempo e si sono ricavati per i litri versati per ogni rubinetto senza pensare al numero di litri per unità di tempo, quindi ora sono in difficoltà	Dico di procedere	
11,45	G8_5	Non sanno come procedere	Propongo di considerare la frase del testo (quella che considero come metafora) (*M:mi pare che sia come se ci fosse una certa distanza da percorrere…* *G: come?* *M: si…se si usa una pompa più veloce l'acqua sale più velocemente e raggiunge prima il bordo della vasca, come se ci fosse una distanza da percorrere ad*	

			una certa velocità…) relativa alla distanza ed alla velocità, propongo inoltre di fare un disegno.	
11,48	G8_4	Dicono di avere capito come fare. Calcolano le portate in secondi (quanti litri vengono versati da ogni rubinetto in un secondo) poi sommano e dividono la quantità di litri mancanti 6,8 per la somma, ottenendo quanti secondi si impiegano per svuotare anche questa quantità. (in sostanza superano il problema precedente riducendo l'unità di misura ma utilizzando anche la divisione , non si accorgono tuttavia che potevano fare questo sin dal principio)	Chiedo di scrivere bene quello che hanno fatto	
11,50	G8_6	Sono ancora fermi ai tentativi (senza fare grafici)		
11,53	G8_5	Non hanno ancora capito come fare	Faccio un grafico (un segmento orizzontale) proponendo di pensare al segmento come rappresentazione della quantità di acqua nella vasca, e quindi all'estremo di sinistra sarà associata la vasca vuota, a quello di destra la vasca piena con 300 litri. Chiedo cosa possano essere le pompe in tale rappresentazione e chiedo di inventare un problema seguendo questa idea.	
11,57	G8_1	2-un alunno dice che potrebbero essere delle macchine	1-Chiedo di pensare al volume come ad una	

			distanza. Faccio il disegno di un segmento orizzontale che rappresenta la quantità di acqua nella vasca. Se il volume è rappresentato da una distanza cosa potrebbe ro essere le pompe? 3-chiedo di inventarsi un problema simile a quello dato partendo da questa idea	
12,00	G8_2	2-dicono che è costante 4-un alunno capisce che la velocità non sarà costante ma dipenderà dalla pressione e quindi da quanta acqua è presente nel tino	1-Chiedo che tipo di grandezza sia litri/minuti e dicono che somiglia a metri /secondo. Chiedo se la velocità di uscita dell'acqua è costante o no. 3-faccio notare la situazione del problema descrivendo con le mani un ideale tino cilindrico e descrivendo con le mani il livello dell'acqua che scende. 5-chiedo di pensare a come cambia (se cambia) la soluzione che loro hanno proposto	
12,04	G8_1	Hanno pensato a tre tartarughe che percorrono una distanza in tre tempi diversi ma dicono che c'è un problema perché quando la più veloce arriva le altre sono ancora indietro e quindi non "*sono assieme*" . Aggiungono che nel caso delle pompe le quantità di acqua si potevano sommare invece nel caso delle tartarughe si dovrebbe cambiare qualcosa nel problema..ad esempio trovare la somma complessiva della		

		distanza percorsa.		
12,08	G8_3	2-dicono di non averla notata	1-Chiedo se avevano notato la frase relativa all'interpretazione delle equazioni come rette (la metafora esplicita) 3-propongo di provare a sfruttarla	
12,10	G8_5	1-Non stanno riuscendo a sfruttare l'idea che ho proposto. 3-un alunno dice che si devono usare le formule inverse	2-Propongo una trasformazione del problema nella quale una distanza di 300 Km viene percorsa da 3 macchine in tre tempi diversi. Quanto tempo impiegherà una quarta macchina che viaggia ad una velocità pari alla somma delle velocità delle altre?	
12,12	G8_6	2-un ragazzo dice che è una proporzione mentre un altro dice che è una retta (prima dice che è qualcosa che si rappresenta sul piano cartesiano e poco dopo dice che è una retta)	1-Chiedo che cosa sia l'equazione y=0,25x+20 3-propongo che le rappresentino graficamente	
12,14	G8_5	Propongono di sommare i tempi, per avere il tempo complessivo	Faccio notare che allora la macchina sarebbe più lenta, ed è la velocità che va sommata	
12,19	G8_4	2-un alunno dice che la velocità dipende dalla sezione dei rubinetti. 4-capiscono che deve dipendere dalla pressione ed un alunno dice che il risultato cambia perché gli ultimo 6,8 litri (riferendosi al loro procedimento) escono con una velocità minore. Un alunno comincia a pensare a come calcolare la pressione n fondo al	1-chiedo se la velocità dell'acqua è costante o cambia durante lo svuotamento 3-chiedo se, fissato il rubinetto, la velocità dell'acqua durante lo svuotamento cambia oppure no 5-dico di scrivere bene quello che pensano e che	

		tino	fanno	
12,26	G8_5	Capiscono rapidamente e velocemente calcolano il risultato	1-spiego come poter risolvere il problema partendo dal problema analogo (ovvero faccio vedere come il metodo usato in uno possa essere usato anche nell'altro)	
12,28	G8_6	Stanno rappresentando le rette in modo errato (pare che confondano l'asse x con l'asse y)	Faccio notare l'errore e chiedo di rifare il grafico	
12,31	G8_1	2-un alunno dice che forse si potrebbero sommare le velocità	1-chiedo di pensare ad un problema simile nel quale una grandezza va sommata, e cosa andrebbe sommato? 3-propongo di modificare il problema pensando ad una quarta tartaruga che viaggia con una velocità pari alla somma delle velocità delle altre tre. Quanto tempo impiegherebbe?	
12,32	G8_3	Dicono di avere capito come fare e un alunno mi descrive la strategia: disegnare le rette, vedere la loro posizione (quelle più in alto sono le meno convenienti), e trovare le intersezioni ..ma non hanno più tempo		
12,33		Consegna lavori		

Osservazioni

Descrivo alcuni dei momenti significativi che ho riscontrato dall'analisi dei protocolli scritti ed orali.

G8_1 testo P2_Ipr_Me

Nel testo fanno un disegno che rappresenta la vasca, poi calcolano i minuti che ciascuna pompa impiega per versare 1 litro tramite proporzioni del tipo 300:20=1:x. Successivamente provano quanti litri vengono versati dalle tre pompe contemporaneamente per 7 minuti, 6 minuti e 5 minuti, vedono che l'unico caso in cui la somma è minore a 300 (vicina a 300) è col tempo di 5 minuti. Successivamente seguono diversi tentativi fino quando impostano la proporzione 5 (minuti): 275 (i litri versati in 5 minuti)=x:300 che li porta al valore di 5,45 minuti. (Non si accorgono che potevano utilizzare questa proporzione con il numero di litri versati in 1 minuto). Propongono poi un problema simile a quello dato nel quale tre tartarughe percorrono una distanza di 300 metri rispettivamente in 10, 20, 30 minuti dicendo che il problema sarebbe simile al precedente se la domanda fosse trovare quanto tempo impiegano le tre tartarughe a coprire una distanza complessiva (la somma delle tre distanze percorse) di 300 metri.

G8_2 testo P1_Ipr_Mi

Iniziano calcolando per ogni rubinetto quanti litri al minuto svuota, poi sommano le quantità (10,8 l/min) ottenute ed infine dividono la capacità (50l) per il risultato ed ottengono 4,62 minuti.

Come giustificazione all'operazione di somma delle portate dicono che vanno sommate perché l'acqua esce contemporaneamente. In seguito alla mia osservazione sulla velocità non costante di svuotamento scrivono che il tempo calcolato è giusto se la velocità è costante, ma in realtà per calcolare il valore esatto avrebbero bisogno di altri dati come : altezza del tino, diametro, peso specifico del liquido.

G8_3 testo P3_Dia_Me

Non fanno alcun disegno o grafico e provano a calcolare il costo per alcuni valori della distanza percorsa in chilometri: 100, 105, 112, 120. Poi scrivono alcune prime conclusioni parziali (sopra 120 Km conviene la B, fino a 20 Km conviene la A) poi tentano altri valori per capire cosa succede nei valori intermedi (80, 86, 87 Km) arrivando a concludere che partendo da poco più di 86 Km conviene la B rispetto la C. In ogni caso non ottengono risultati completi e coerenti. In seguito alla mia richiesta di sfruttare la rappresentazione grafica (facendo notare la frase del testo) disegnano un grafico ma non hanno tempo per procedere anche se un alunno mi dice che sapeva come fare e me lo sintetizza a voce.

G8_4 testo P1_Ipr_NM

Iniziano calcolando il rapporto capacità/tempo per ognuno dei rubinetto , sommano il risultato trovando che in un minuto escono 10,8 litri da tutti i rubinetti assieme. Quindi dicono che in 4 minuti escono 43,2 litri e restano nel tino 6,8 litri. A questo punto tentano alcune vie che tuttavia cancellano (in maniera che fossero comunque ancora leggibili come da mia richiesta): il primo tentativo è quello di trovare il rapporto 6,8/portata per ciascuno dei rubinetti, ottenendo (anche se sbagliano inizialmente l'unità di misura) il tempo che ciascun rubinetto impiega per versare i litri rimanenti..poi si fermano visto che non sanno come usare i tre tempi ottenuti. Tentano poi un altro calcolo nel quale i tempi vengono trasformati in secondi ed impostate alcune proporzioni del tipo: 50 (litri): 600 (secondi)= x:1,36 (tempo che impiegherebbe il rubinetto a versare 6,8 litri)..ma anche qua non sanno come procedere e cancellano i calcoli. Infine tornano a calcolare le portate di ciascun rubinetto ma mettendo i tempi in secondi (un calcolo tuttavia è sbagliato visto che mettono 60 invece che 600) , sommano le portate ottenendo 0,93048 l/s , dividono poi i litri restanti 6,8 per tale valore ed ottengono 7,3 secondi, sommano questo valore ai 4 minuti iniziali e concludono che il tempo impiegato sarà di 4 minuti e 7 secondi (scrivono anche i decimali ma in maniera diversa..non ho indagato sul motivo).

In seguito alla mia domanda sulla velocità di svuotamento dicono che dato che la velocità di svuotamento non è costante non possono dire che il tempo calcolato sia corretto, e dicono che servirebbero altri dati (altezza del tino, diametro, peso specifico del liquido).Un alunno dice il tempo impiegato sarà minore di quello calcolato perché gli ultimi 6,8 litri usciranno con una velocità minore.

G8_5 testo P2_Dia_Me

Nei fogli hanno scritto pochissimo, inoltre alcuni calcoli fatti a matita sono stati cancellati (anche se avevo chiesto esplicitamente di non cancellare niente). Di fianco ai tempi impiegati si trova V=55 come se avessero sommato i tempi e considerassero il risultato come una velocità..ma non ho indagato. In realtà sui fogli non c'è niente di tutto quello che mi hanno chiesto durante l'attività ed anche dei tentativi che hanno fatto, credo che ci fosse il timore di valutazioni negative da porte mia (anche se avevo chiarito il tipo e gli obiettivi del lavoro proposto). Dopo che ho proposto l'interpretazione del volume come distanza ed ho spiegato come poter risolvere un problema analogo sulle macchine, un alunno mi dice di avere capito e calcola il risultato di 5,45 minuti ma senza scrivere i calcoli fatti (ho visto che lavorava direttamente sulla calcolatrice) nonostante la mia richiesta esplicita e ripetuta di scrivere tutto sui fogli consegnati.

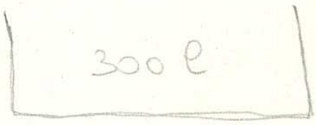
G8_6 testo P3_Dia_Mi

Nei fogli cominciano riscrivendo le diverse opzioni in una forma diversa, più verbale. Poi provano a calcolare i costi per alcuni valori della distanza (100, 150 Km) ma non arrivano ad alcuna conclusione definitiva e completa. Dopo che li spingo a disegnare le rette calcolano correttamente le coordinate di alcuni punti ma le rappresentano in maniera errata sul piano. E' presente una discussione sulla continuità della terza opzione nel punto a 50 Km con uso dei limiti destro e sinistro (che hanno già affrontato in matematica).

G8_1 testo P2_Ipr_Me

P2_Ipr_Me

Si vuole riempire una vasca di 300l di capienza con dell'acqua pompata da un laghetto vicino. Usando la pompa A la vasca si riempie in 20 minuti, usando la pompa B in 30 minuti ed usando la pompa C in 10 minuti. Si può immaginare il volume della vasca come una distanza da percorrere. Quanto tempo si impiegherà utilizzando le tre pompe assieme?



A
300 : 20 = 1 : x

75 $\frac{20}{300}$ 0,06

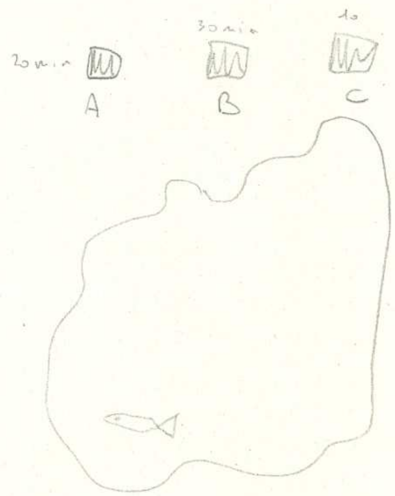
B
300 : 30 = 1 : x

50 $\frac{30}{300}$ 0,1

C
300 : 10 = 1 : x

150 $\frac{10}{300}$ = 0,03

MINUTI CHE LE POMPE IMPIEGANO PER RIEMPIRE 1 l



LITRI X 5 min

0,19 TOT

X 7 min
105
70
210

$3 : 0,19 = 300\ l : x$

$x = \frac{0,19 \cdot 300}{3} = 19$ min

LITRI X 6 min
90
60
180

LITRI X 5,5 min
82,5
165 55

>4

$5,4 : 297 = \ : 300$

$5,\overline{45}$

54.5
81.75

163,5

TROVIAMO QUANTI LITRI RIEMPONO LE VARIE POMPE IN 5 min

A $300 l : 20 \text{ min} = X l : 5 \text{ min}$

$$X = \frac{300 \cdot 5}{20} = 75 \, l$$

B $300 : 30 = X : 5$

$$X = \frac{300 \cdot 5}{30} = 50 \, l$$

C $300 : 10 = X : 5$

$$X = \frac{300 \cdot 5}{10} = 150 \, l$$

275

PER CUI

$$5 \text{ min} : 275 l = X \text{ min} : 300 l \rightarrow X = \frac{5 \cdot 300}{275}$$

~~[illegible]~~ G 8-1 P2_Ipr_Me (1)

ARTARUGA
A = 20 min

ARTARUGA
B = 30 min

ARTARUGA
C = 10 min

IL PROBLEMA SAREBBE SIMILE A QUELLO PRECEDEN
SE LA RICHIESTA FOSSE: QUANTO TEMPO CI IMPIEGANO
LE 3 TARTARUGHE A COPRIRE UNA DISTANZA DI 300
METRI SOMMANDO LE DISTANZE PERCORSE IN TALE TEMP

$V_A = \frac{300}{20}$

G8_2 testo P1_Ipr_Mi

G 8_2 P1_Ipr_Mi ①

RUBINETTO LARGO $\frac{50 l}{10 min} = 5\ l/min$

RUBINETTO MEDIO $\frac{50 l}{15 min} = 3,\bar{3}\ l/min$

RUBINETTO PICCOLO $\frac{50 l}{20 min} = 2,5\ l/min$

$5 + 3,\bar{3} + 2,5 = 10,8\ l/min$

QUINDI PER SVUOTARE 50L IMPIEGHERÀ:

$\frac{50 l}{10,8\ l/min} = 4,62\ min$

CHE SAREBBERO:
4 minuti e $0,62 = \frac{60\ secondi}{100} \cdot 62 =$

$= 37,20$ secondi

4 minuti 37 secondi e 2 decimi

Dato che il rubinetto largo svuotava $5\frac{l}{min}$, il rubinetto medio $3,\bar{3}\ l/min$ e il rubinetto piccolo $2,5\frac{l}{min}$, ~~sommando~~ abbiamo sommato i litri che uscivano da ogni rubinetto in un minuto, ~~da ciò~~ si è quindi calcolato che ogni minuto uscivano 10,8 l.

Abbiamo sommato i litri uscenti da ogni rubinetto perchè escono contemporaneamente, nello stesso lasso di tempo.

Impiegherebbe 4 min 37 secondi in caso che il liquido esce dai rubinetti con una velocità costante, ma la pressione dell'acqua rende la velocità non costante, per calcolare il tempo ideale o reale avremmo bisogno di conoscere altri dati, fra cui: altezza del tino, diametro, peso specifico del liquido

G8_3 testo P3_Dia_Me

G8_3 P3_Dia_Me (1)

C_A CONVIENE RISPETTO A C_B

$100\ Km = 26 + (0{,}20 \cdot 100) = 46$ €

$100\ Km = 20 + (0{,}25 \cdot 100) = 45$€

$105\ Km = 47$ €

$112\ Km = 26 + (0{,}20 \cdot 112) = 48{,}40$ €

$105\ Km = 20 + (0{,}25 \cdot 105) = 46{,}25$ €

$112\ Km = 20 + (0{,}25 \cdot 112) = 48$ €

A 120 Km IL COSTO È IDENTICO, SOTTO I 120 Km CONVIENE C_A, SOPRA i 120 Km CONVIENE C_B

C_A CONVIENE RISPETTO A C_C FINO A 20 Km POI DA 20 Km IN POI CONVIENE C_C

C_B CONVIENE RISPETTO A C_C PARTENDO DA POCO PIU' DI 86 Km

$80\ Km = 80 \cdot 0{,}5 = 40$ €

$80\ Km = 26 + (80 \cdot 0{,}20) = 42$ €

$86\ Km = 86 \cdot 0{,}5 = 43$

$86\ Km = 26 + (86 \cdot 0{,}20) = 43{,}2$ €

$87\ Km = 87 \cdot 0{,}5 = 43{,}5$ €

$87\ Km = 26 + (87 \cdot 0{,}20) = 43{,}4$ €

G 8-4 P1_Ipr-NM ①

AL MINUTO ESCONO RISPETTIVAMENTE I° $\frac{50}{10} = 5$ l/min IN UN MINUTO ESCONO

II° $\frac{50}{15} = 3,\overline{3}$ l/min 10,8 l DA TUTTI I RUBINETTI

III° $\frac{50}{20} = 2,5$ l/min

- APRENDO TUTTI E TRE I RUBINETTI (CHE SVUOTANO TOTALMENTE 10,8 l AL MINUTO) CALCOLIAMO CHE IN QUATRO MINUTI RIUSCIAMO A SVUOTARE 43,2 l DAL TINO E CI RIMANGONO 6,8 l, ABBIAMO SCELTO DI MOLTIPLICARE PER QUATRO PERCHÉ 10,8 È UNA COSTANTE STABILITA DAL GRUPPO CHE DETERMINA L'USCITÀ D'ACQUA AL MINUTO DA TUTTI E TRE I RUBINETTI E QUINDI QUESTA COSTANTE È EFFETTIVA FINO A 43,2 l.
- DUNQUE CI RIMANGONO 6,8 l DA SVUOTARE E QUINDI TROVIAMO I LITRI CHE PASSANO ATTRAVERSO OGNI SINGOLO RUBINETTO PER SVUOTARE L'ACQUA RIMASTA DIVIDENDO 6,8 l PER LA CAPACITÀ DI USCITÀ DI OGNI RUBINETTO.

I° $\frac{6,8}{5} = 1,36$ min

II° $\frac{6,8}{3,\overline{3}} = 2,06$ min

III° $\frac{6,8}{2,5} = 2,72$ min

- ORA DETERMINIAMO IL TEMPO CHE CI IMPIEGA OGNI SINGOLO RUBINETTO A SVUOTARE L'ACQUA RIMASTA "6,8 l"

0,68 / 0,453 / 0,34

I° $50 : 600 = x : 1,36$ $x = \frac{50}{600} \cdot 1,36 = 0,136$ l 0,34

II° $50 : 900 = x : 2,06$ $x = \frac{50}{900} \cdot 2,06 =$ 6,8

III° $50 : 1200 = x : 2,72$ $x = \frac{50}{1200} \cdot 2,72 =$

6,8 ℓ DA SVUOTARE È QUINDI TROVIAMO I LITRI CHE PASSANO ATTRAVERSO OGNI SINGOLO RUBINETTO PER SVUOTARE L'ACQUA RIMASTA DIVIDENDO 6,8 ℓ PER LA CAPACITÀ DI USCITÀ DI OGNI RUBINETTO.

I° $\frac{6,8}{5} = 1,36$ min

II° $\frac{6,8}{3,3} = 2,06$ min

III° $\frac{6,8}{2,5} = 2,72$ min

– ORA DETERMINIAMO IL TEMPO CHE CI IMPIEGA OGNI SINGOLO RUBINETTO A SVUOTARE L'ACQUA RIMASTA "6,8 ℓ"

0,68 / 0,453 / 0,34

I° $50 : 600 = x : 1,36$ $\quad x = \frac{50}{600} \cdot 1,36 = \cancel{16,32}$ 0,136 ℓ 0,34

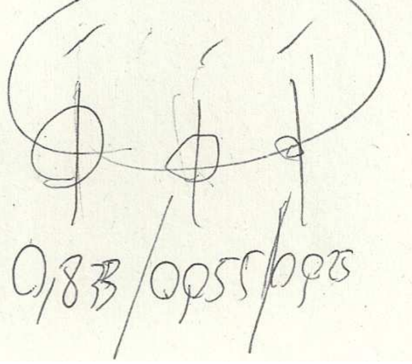
II° $50 : 900 = x : 2,06$ $\quad x = \frac{50}{900} \cdot 2,06 = \cancel{37,08}$ 6,8

III° $50 : 1200 = x : 2,72$ $\quad x = \frac{50}{1200} \cdot 2,72 = \cancel{65,28}$

$\frac{6,8}{1,36} =$ $\cancel{43,2}$

6,8

$\frac{6,8}{0,913} = 7,44$ s



0,833 / 0,055 / 0,025 $= t = 0,913$

– ALLA FINE TROVIAMO IL TEMPO CHE IMPIEGANO I TRE RUBINETTI CHE È DI 1' 6"
DATO CHE LA VELOCITÀ DEL LIQUIDO NON È COSTANTE NON POSSIAMO AFFERMARE CHE IL TEMPO TROVATO SIA GIUSTO, QUESTO PERCHÈ NON ABBIAMO TUTTI I DATI; OVVERO L'ALTEZZA DEL TINO, IL PESO SPECIFICO DEL LIQUIDO E IL DIAMETRO DEL CONTENITORE SE È CIRCOLARE.

G 8_4 P1_Ipr_NM ②

$t = 4\ min + 7{,}44\ s = \cancel{4{,}7\ s}$

$4\ min \rightarrow 240\ s$

$247{,}44\ s = 4{,}124\ min$

$I°\ l/s \rightarrow \frac{50}{60} = 0{,}8\bar{3}\ l/s$

$II°\ l/s \rightarrow \frac{50}{900} = 0{,}0\bar{5}\ l/s$

$III°\ l/s \rightarrow \frac{50}{1200} = 0{,}0416\ l/s$

$t_{OTALE} = 0{,}93048\ l/s$

tempo impiegato per svuotare 6,8 $= \frac{6{,}8}{0{,}93048} = 7{,}308\ s$

tempo totale $= 4\ min + 0{,}1218 = 4{,}1218\ min$

G8_5 testo P2_Dia_Me

P2_Dia_Me

Guido vuole riempire una vasca di 300l di capienza con dell'acqua pompandola da un laghetto vicino e chiede informazioni a suo papà che di solito compie quell'operazione:

G:Papà vorrei riempire la vasca che è vuota, quale pompa posso usare per fare prima?
P:allora…noi abbiamo tre pompe, se vuoi fare prima puoi usarle tutte insieme…dunque..quella rossa ci mette 20 minuti..quella gialla 30 minuti e quella verde 10 minuti.
G:E se le uso insieme quanto tempo ci mettono?
P:.non ho mai provato…ci devo pensare..magari chiediamolo a Marta che è sempre brava in questo tipo di cose…sai io sono bravo con il giardino ma per i numeri è meglio lei

Guido spiega il problema alla sorella maggiore Marta che si mette a pensare e dopo poco dice a Guido:
M:mi pare che sia come se ci fosse una certa distanza da percorrere…
G: come?
M: si…se si usa una pompa più veloce l'acqua sale più velocemente e raggiunge prima il bordo della vasca, come se ci fosse una distanza da percorrere ad una certa velocità…

Quale è il ragionamento che ha in mente Marta? Provate a rispondere facendo continuare il dialogo fra Guido, Marta ed il papà

G: ANCORA NON RIESCO A CAPIRE SPIEGATI MEGLIO MARTA!
M: OK, MMMM SAI CHE ORA COME ORA NON SAPREI!
G: DAI MARTA PENSACI SU SO CHE PUOI FARCELA....
M: SI LO SO GUIDO, MA HO MAL DI TESTA, NON RIESCO A RAGIONARE
G: PRENDI UN MOMENT ACT
M: OK, SPERO CHE CONTI
G: FIDATI!
M: MI É PASSATO IN UN ACT.
G: TE LO AVEVO DETTO CARA!
M: C'HO PENSATO, E HO CAPITO CHE UTILIZZANDO LA POMPA PIÙ VELOCE, IL TEMPO

G 8_5 P2_Dia_Me (1)

P1 = 20 minuti = 15

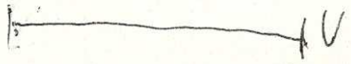
P2 = 30 minuti = 10 V=55

P3 = 10 minuti = 30

V = 300 l

Pveloce = 10 minuti

5 minuti
150 l = 30 minuti



300 km

20 m/n

30 m

10 m,

t = 5,45 minuti

G8_6 testo P3_Dia_Mi

G8_6 P3_Dia_Mi ②

3 OPZIONI:

1 OP:

$Q_{F_1} = 20$ €
\+
0,25€ PER OGNI Km PERCORSO

2 OPZ:

$Q_{F_2} = 26$ €
\+
0,20 € PER OGNI Km PERCORSO

3 OPZ:

Q_{F_3} = 50 Km PER 25 €
\+
0,5 € PER Km PERCORSO.

IPOTESI:

100 Km in TOT

1 OPZ: → PER DISTANZE MEDIE
PER FINO A 80 Km

20 + 25 = 45 €

2 OPZ: → PER DISTANZE LUNGHE

26 + 20 = 46 €

3 OPZ → PER DISTANZE BREVI
↓
PER FINO A 80 Km

25 + 25 = 50 €

1) 57,5 2) 56 3) 75 K 150

1 OPZ
2 OPZ > PER A 80 Km

1 OPZ > PER 100 Km

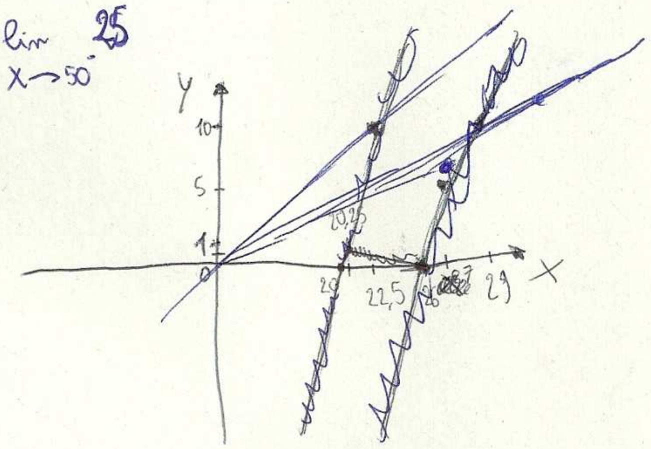
2 OP > PER 150 Km

$$y = \begin{cases} 25 & \text{se } 0 < x \leq 50 \\ 0{,}5x & \text{se } x > 50 \end{cases} \qquad y = f(0) = 50$$

Funzione continua

$\lim_{x \to 0^-} 25 \qquad \lim_{x \to 50^+} 0{,}5x = \lim_{x \to 50^+} 25$

$\lim_{x \to 50^-} 25$



$y = 0{,}25x + 20$

$y = 0{,}20x + 26$

↓

x	y
0	20
1	20,25
10	22,5

x	y
0	26
5	27
10	29

Allegato1_ProblemiItaliano

P1_Dia_Me

Carlo sta giocando con un tino che suo papà Mario usa per fare il vino. Tale tino è di forma cilindrica ed è graduato ed ha tre rubinetti nel suo fondo, di diverso diametro e che servono a svuotare il tino quando si deve imbottigliare il vino.

Mario:"Carlo, cosa stai combinando con il mio tino?"

Carlo: "Niente, mi diverto a riempirlo di acqua fino a questo segno..e poi faccio uscire l'acqua dal rubinetto…ma cos' è questo segno?"

M: "indica il volume che occupa il vino quando lo raggiunge…vedi c'è scritto 50 l..significa 50 litri..quando il livello del vino arriva qua vuol dire che ci sono 50 litri di vino, se poi il livello è diverso basta leggere in questa linea graduata, vedi che assomiglia ad un metro..solo che qua leggi il volume …capito?"

C:" capito….adesso lo riempio d'acqua e misuro il tempo che ci mette a svuotarsi quando apro i rubinetti.. "

M:"…e come fai con l'acqua che esce?"

C:"riempio questi secchi e poi alla fine la uso per riempire di nuovo il tino.."

M:"..ingegnoso..bene..bene..magari prova a calcolare i tempi per ognuno dei rubinetti..vedi che hanno diametri diversi…magari i tempi sono diversi…"

Carlo misura i tre tempi, e trova che per svuotare il tino impiega 10 minuti col rubinetto *più largo, 15 minuti con quello medio e 20 minuti con quello più stretto. A quel punto torna il papà che gli propone a un problema, sapendo a Carlo la matematica piace e se la cava bene:*

M:".vediamo se riesci a capire, senza fare la prova, quanto tempo ci mette il tino a svuotarsi se apriamo tutti i rubinetti insieme..."

C:"..ma è difficile..sicuramente fa ancora prima…ma come faccio a dire esattamente quanto?"

M:"puoi pensare che mentre il tino si svuota il livello dell'acqua che vedi sulla scala graduata si muove verso il basso ad una certa velocità…."

Come può ragionare Carlo? Come prosegue il dialogo*?*

P1_Dia_NM

Carlo sta giocando con un tino che suo papà Mario usa per fare il vino. Tale tino è di forma cilindrica ed è graduato, ha una capacità di 50 l ed ha tre rubinetti nel suo fondo, di diverso diametro e che servono a svuotare il tino quando si deve imbottigliare il vino.

Mario:"Carlo, cosa stai combinando con il mio tino?"

Carlo: "Niente, mi diverto a riempirlo di acqua fino a questo segno..e poi faccio uscire l'acqua dal rubinetto…. lo riempio d'acqua e misuro il tempo che ci mette a svuotarsi quando apro i rubinetti.. "

M:"…e come fai con l'acqua che esce?"

C:"riempio questi secchi e poi alla fine la uso per riempire di nuovo il tino.."

M:"..ingegnoso..bene..bene..magari prova a calcolare i tempi per ognuno dei rubinetti..vedi che hanno diametri diversi…magari i tempi sono diversi…"

Carlo misura i tre tempi, e trova che per svuotare il tino impiega 10 minuti col rubinetto *più largo, 15 minuti con quello medio e 20 minuti con quello più stretto. A quel punto torna il papà che gli propone a un problema, sapendo a Carlo la matematica piace e se la cava bene:*

M:".vediamo se riesci a capire, senza fare la prova, quanto tempo ci mette il tino a svuotarsi se apriamo tutti i rubinetti insieme..."

C:"..ma è difficile..sicuramente fa ancora prima…ma come faccio a dire esattamente quanto?"

Come può ragionare Carlo? Come prosegue il dialogo*?*

P1_Dia_Mi

Carlo sta giocando con un tino che suo papà Mario usa per fare il vino. Tale tino è di forma cilindrica ed è graduato ed ha tre rubinetti nel suo fondo, di diverso diametro e che servono a svuotare il tino quando si deve imbottigliare il vino.

Mario:"Carlo, cosa stai combinando con il mio tino?"

Carlo: "Niente, mi diverto a riempirlo di acqua fino a questo segno..e poi faccio uscire l'acqua dal rubinetto…ma cos' è questo segno?"

M: "indica il volume che occupa il vino quando lo raggiunge…vedi c'è scritto 50 l..significa 50 litri..quando il livello del vino arriva qua vuol dire che ci sono 50 litri di vino, se poi il livello è diverso basta leggere in questa linea graduata."

C:" capito….adesso lo riempio d'acqua e misuro il tempo che ci mette a svuotarsi quando apro i rubinetti.. "

M:"…e come fai con l'acqua che esce?"

C:"riempio questi secchi e poi alla fine la uso per riempire di nuovo il tino.."

M:"..ingegnoso..bene..bene..magari prova a calcolare i tempi per ognuno dei rubinetti..vedi che hanno diametri diversi…magari i tempi sono diversi…"

Carlo misura i tre tempi, e trova che per svuotare il tino impiega 10 minuti col rubinetto più largo, 15 minuti con quello medio e 20 minuti con quello più stretto. A quel punto torna il papà che gli propone a un problema, sapendo a Carlo la matematica piace e se la cava bene:

M:".vediamo se riesci a capire, senza fare la prova, quanto tempo ci mette il tino a svuotarsi se apriamo tutti i rubinetti insieme..."

C:"..ma è difficile..sicuramente fa ancora prima…ma come faccio a dire esattamente quanto?"

Come può ragionare Carlo? Come prosegue il dialogo*?*

P1_Ipr_NM

Consideriamo un tino di forma cilindrica graduato e con tre rubinetti nel suo fondo, di diverso diametro che servono a svuotare il tino. La capacità del tino è di 50 l.

Riempiendo il tino e lasciandolo svuotare, si impiegano 10 minuti col rubinetto *più largo, 15 minuti con quello medio e 20 minuti con quello più stretto. Quanto tempo si impiegherà aprendo tutti i rubinetti?*

P1_Ipr_Mi

Consideriamo un tino di forma cilindrica graduato e con tre rubinetti nel suo fondo, di diverso diametro e che servono a svuotare il tino. La capacità del tino è di 50 l ed il volume contenuto è leggibile osservando il livello del liquido sulla sua scala graduata.

Riempiendo il tino e lasciandolo svuotare, si impiegano 10 minuti col rubinetto più largo, 15 minuti con quello medio e 20 minuti con quello più stretto. Quanto tempo si impiegherà aprendo tutti i rubinetti?

P1_Ipr_Me

Consideriamo un tino di forma cilindrica graduato e con tre rubinetti nel suo fondo, di diverso diametro e che servono a svuotare il tino. La capacità del tino è di 50 l ed il volume contenuto è leggibile osservando il livello del liquido sulla sua scala graduata.

Riempiendo il tino e lasciandolo svuotare aprendo solo il rubinetto più largo, il livello del liquido impiega 10 minuti per scendere fino al fondo del tino, impiega invece 15 minuti aprendo solo quello medio e 20 minuti con quello più stretto. Quanto tempo serve per svuotare il tino se si aprono tutti i rubinetti?Si può pensare che il livello dell'acqua letto sulla scala graduata si muova verso il basso ad una certa velocità.

P2_Ipr_NM

Si vuole riempire una vasca di 300l di capienza con dell'acqua pompandola da un laghetto vicino. Usando la pompa A la vasca si riempie in 20 minuti, usando la pompa B in 30 minuti ed usando la pompa C in 10 minuti. Quanto tempo si impiegherà utilizzando le tre pompe assieme?

P2_Ipr_Me

Si vuole riempire una vasca di 300l di capienza con dell'acqua pompata da un laghetto vicino. Usando la pompa A la vasca si riempie in 20 minuti, usando la pompa B in 30 minuti ed usando la pompa C in 10 minuti. Si può immaginare il volume della vasca come una distanza da percorrere. Quanto tempo si impiegherà utilizzando le tre pompe assieme?

P2_Ipr_Mi

Si vuole riempire una vasca di 300l di capienza con dell'acqua pompata da un laghetto vicino. Usando la pompa A l'acqua raggiunge il bordo della vasca in 20 minuti, usando la pompa B lo raggiunge in 30 minuti ed usando la pompa C in 10 minuti. Quanto tempo si impiegherà per riempire la vasca utilizzando le tre pompe assieme?

P2_Dia_NM

Guido vuole riempire una vasca di 300l di capienza con dell'acqua pompandola da un laghetto vicino e chiede informazioni a suo papà che di solito compie quell'operazione:

G:Papà vorrei riempire la vasca che è vuota, quale pompa posso usare per fare prima?

P:allora…noi abbiamo tre pompe, se vuoi fare prima puoi usarle tutte insieme…dunque..quella rossa ci mette 20 minuti..quella gialla 30 minuti e quella verde 10 minuti.

G:E se le uso insieme quanto tempo ci mettono?

P:.non ho mai provato…ci devo pensare..magari chiediamolo a Marta che è sempre brava in questo tipo di cose…sai io sono bravo con il giardino ma per i numeri è meglio lei

Guido spiega il problema alla sorella maggiore Marta che si mette a pensare….quanto tempo impiegherà Guido usando le tre pompe contemporaneamente? Provate a rispondere facendo continuare il dialogo fra Guido, Marta ed il papà.

P2_Dia_Mi

Guido vuole riempire una vasca di 300l di capienza con dell'acqua pompandola da un laghetto vicino e chiede informazioni a suo papà che di solito compie quell'operazione:

G:Papà vorrei riempire la vasca che è vuota, quale pompa posso usare per fare prima?

P:allora…noi abbiamo tre pompe, se vuoi fare prima puoi usarle tutte insieme…dunque..usando quella rossa l'acqua raggiunge il bordo della vasca in 20 minuti..usando quella gialla lo raggiunge in 30 minuti e con quella verde in 10 minuti.

G:E se le uso insieme quanto tempo impiega l'acqua ad arrivare fino al bordo?

P:.non ho mai provato…ci devo pensare..magari chiediamolo a Marta che è sempre brava in questo tipo di cose…sai io sono bravo con il giardino ma per i numeri è meglio lei

Guido spiega il problema alla sorella maggiore Marta che si mette a pensare….quanto tempo impiegherà Guido usando le tre pompe contemporaneamente? Provate a rispondere facendo continuare il dialogo fra Guido, Marta ed il papà.

P2_Dia_Me

Guido vuole riempire una vasca di 300l di capienza con dell'acqua pompandola da un laghetto vicino e chiede informazioni a suo papà che di solito compie quell'operazione:

G:Papà vorrei riempire la vasca che è vuota, quale pompa posso usare per fare prima?

P:allora…noi abbiamo tre pompe, se vuoi fare prima puoi usarle tutte insieme…dunque..quella rossa ci mette 20 minuti..quella gialla 30 minuti e quella verde 10 minuti.

G:E se le uso insieme quanto tempo ci mettono?

P:.non ho mai provato…ci devo pensare..magari chiediamolo a Marta che è sempre brava in questo tipo di cose…sai io sono bravo con il giardino ma per i numeri è meglio lei

Guido spiega il problema alla sorella maggiore Marta che si mette a pensare e dopo poco dice a Guido:

M:mi pare che sia come se ci fosse una certa distanza da percorrere…

G: come?

M: si…se si usa una pompa più veloce l'acqua sale più velocemente e raggiunge prima il bordo della vasca, come se ci fosse una distanza da percorrere ad una certa velocità…

Quale è il ragionamento che ha in mente Marta? Provate a rispondere facendo continuare il dialogo fra Guido, Marta ed il papà

P3_Ipr_NM

Volendo noleggiare una macchina per viaggiare per un giorno, immaginiamo di avere le tre possibili opzioni:

- *G- quota fissa di 20 euro più 0,25 euro per Km percorso*
- *H- quota fissa di 26 euro più 0,20 euro per Km percorso*
- *I- franchigia di 50 Km (ovvero per distanze percorse giornalmente inferiore a 50 Km vengono comunque pagati 50 Km) più 0,5 euro per Km percorso*

Quindi possiamo esprimere matematicamente il costo delle tre opzioni come segue:

$c_A = 20 + 0{,}25d$; $c_B = 26 + 0{,}20d$; $c_A = \begin{cases} 25 & 0 < d \le 50 \\ 0{,}5d & d > 50 \end{cases}$ *dove d è la distanza percorsa in Km*

Quale delle tre opzioni conviene adottare in funzione del numero di Km che intendiamo percorrere?

P3_Ipr_Mi

Volendo noleggiare una macchina per viaggiare per un giorno, immaginiamo di avere le tre possibili opzioni:

D- quota fissa di 20 euro più 0,25 euro per Km percorso
E- quota fissa di 26 euro più 0,20 euro per Km percorso
F- franchigia di 50 Km (ovvero per distanze percorse giornalmente inferiore a 50 Km vengono comunque pagati 50 Km) più 0,5 euro per Km percorso

Quindi possiamo esprimere matematicamente il costo in funzione dei Km percorsi delle tre opzioni come segue:

$A: y = 0{,}25x + 20$; $B: y = 0{,}20x + 26$; $C: y = \begin{cases} 25 & 0 < x \le 50 \\ 0{,}5x & x > 50 \end{cases}$ *dove x è la distanza percorsa in Km ed y è il costo*

Quale delle tre opzioni conviene adottare in funzione del numero di Km che intendiamo percorrere?

P3_Ipr_Me

Volendo noleggiare una macchina per viaggiare per un giorno, immaginiamo di avere le tre possibili opzioni:

D- quota fissa di 20 euro più 0,25 euro per Km percorso
E- quota fissa di 26 euro più 0,20 euro per Km percorso
F- franchigia di 50 Km (ovvero per distanze percorse giornalmente inferiore a 50 Km vengono comunque pagati come 50 Km) più 0,5 euro per Km percorso

Quindi possiamo esprimere matematicamente il costo delle tre opzioni come segue:

$c_A = 20 + 0{,}25d$; $c_B = 26 + 0{,}20d$; $c_A = \begin{cases} 25 & 0 < d \le 50 \\ 0{,}5d & d > 50 \end{cases}$ *dove d è la distanza percorsa in Km*

Tali equazioni possono essere interpretate come rette. Quale delle tre opzioni conviene adottare in funzione del numero di Km che intendiamo percorrere?

P3_Dia_NM

Alfredo vuole noleggiare una macchina per viaggiare la prossima domenica, si reca all'agenzia dove conversa con Luisa, l'addetta ai noleggi di auto:

A: "Buongiorno, vorrei avere qualche informazione sui noleggi di auto, vorrei viaggiare la prossima domenica"

L:"Si, che tipo di macchina vuole noleggiare? Una utilitaria, una macchina di lusso o qualcosa di intermedio?"

A:"No, mi basta una utilitaria, non ho delle necessità particolari"

L:"Bene, allora per questo tipo di vettura possiamo offrirle tre diverse opzioni, la prima prevede una quota fissa di 20 euro più 0,25 euro per Km percorso, la seconda una quota fissa di 26 euro più 0,20 euro per Km percorso e la terza una franchigia di 50 Km per 25 euro più 0,5 euro per Km percorso"

A:"Dunque…che significa franchigia di 50 Km?"

L:"..è la prima volta che noleggia una macchina eh?.."

A:"eh si, ha ha"

L:"Significa che se domenica percorrerà una distanza inferiore a 50 Km, comunque dovrà pagare come se avesse fatto 50 Km"

A:"Ho capito, quindi per decidere l'opzione più conveniente dovrei avere un'idea di quanto Km percorrerò..giusto?"

L:"Esatto Signor Alfredo, è proprio così! Lei dovrebbe stimare, a seconda del percorso che vorrebbe fare, il numero di Km e quindi decidere l'opzione per lei più conveniente"

A:"..credo allora che chiederò a mio figlio Marco, lui studia ingegneria e capisce un po' più di me di matematica..poi torno e le dico"

L:"Va bene, allora arrivederci, se vuole può anche telefonare così le riserviamo la macchina,"

Alfredo spiega il problema al figlio che inizia a scrivere su un foglio e a ragionare ad alta voce col padre:

M:"..se ho ben capito possiamo esprimere matematicamente il costo delle tre opzioni come segue:

$$c_A = 20 + 0{,}25d \;\; ; \; c_B = 26 + 0{,}20d \;\; ; \; c_A = \begin{cases} 25 & 0 < d \le 50 \\ 0{,}5d & d > 50 \end{cases}$$

A:"Che cosa sono quei simboli?"

M:"In matematica si possono indicare le grandezze con dei simboli e delle lettere, qua le c indicano i diversi costi a seconda dell'opzione che si sceglie, e d è la distanza percorsa in Km"

A:"..capito…ma allora? Quale opzione devo scegliere?"

M:"Ma non lo so ancora..questo è solo un modo per rappresentare matematicamente i dati, ma la soluzione ottimale dipende da quanti Km tu intendi percorrere.."

A:"Quindi devo darti ora questo dato?"

M:"No, io adesso ci penso poi ti darò uno schema dal quale potremo scegliere la soluzione più conveniente a seconda dei Km che vuoi percorrere, così puoi pensare al tuo percorso con calma , poi mi dici quanti Km vorresti percorrere ed io ti dico quale opzione ti conviene, ok?"

A:"Ok, allora adesso studio il percorso..grazie e a più tardi allora"

Come potrà ragionare Marco per fornire uno strumento di decisione al padre?Quale delle tre opzioni conviene adottare in funzione del numero di Km che intendiamo percorrere?

P3_Dia_Mi

Alfredo vuole noleggiare una macchina per viaggiare la prossima domenica, si reca all'agenzia dove conversa con Luisa, l'addetta ai noleggi di auto:

A: "Buongiorno, vorrei avere qualche informazione sui noleggi di auto, vorrei viaggiare la prossima domenica"

L:"Si, che tipo di macchina vuole noleggiare? Una utilitaria, una macchina di lusso o qualcosa di intermedio?"

A:"No, mi basta una utilitaria, non ho delle necessità particolari"

L:"Bene, allora per questo tipo di vettura possiamo offrirle tre diverse opzioni, la prima prevede una quota fissa di 20 euro più 0,25 euro per Km percorso, la seconda una quota fissa di 26 euro più 0,20 euro per Km percorso e la terza una franchigia di 50 Km per 25 euro più 0,5 euro per Km percorso"

A:"Dunque…che significa franchigia di 50 Km?"

L:"..è la prima volta che noleggia una macchina eh?.."

A:"eh si, ha ha"

L:"Significa che se domenica percorrerà una distanza inferiore a 50 Km, comunque dovrà pagare come se avesse fatto 50 Km"

A:"Ho capito, quindi per decidere l'opzione più conveniente dovrei avere un'idea di quanto Km percorrerò..giusto?"

L:"Esatto Signor Alfredo, è proprio così! Lei dovrebbe stimare, a seconda del percorso che vorrebbe fare, il numero di Km e quindi decidere l'opzione per lei più conveniente"

A:"..credo allora che chiederò a mio figlio Marco, lui studia ingegneria e capisce un po' più di me di matematica..poi torno e le dico"

L:"Va bene, allora arrivederci, se vuole può anche telefonare così le riserviamo la macchina," *Alfredo spiega il problema al figlio che inizia a scrivere su un foglio e a ragionare ad alta voce col padre:*

M:"..se ho ben capito possiamo esprimere matematicamente il costo delle tre opzioni come segue:

$$A: y = 0{,}25x + 20 \ ; \ B: y = 0{,}20x + 26 \ ; \ C: y = \begin{cases} 25 & 0 < x \leq 50 \\ 0{,}5x & x > 50 \end{cases}$$

A:"Che cosa sono quei simboli?"

M:"In matematica si possono indicare le grandezze con dei simboli e delle lettere, qua la y indica i diversi costi a seconda dell'opzione che si sceglie, ed x è la distanza percorsa in Km"

A:"..capito…ma allora? Quale opzione devo scegliere?"

M:"Ma non lo so ancora..questo è solo un modo per rappresentare matematicamente i dati, ma la soluzione ottimale dipende da quanti Km tu intendi percorrere.."

A:"Quindi devo darti ora questo dato?"

M:"No, io adesso ci penso poi ti darò uno schema dal quale potremo scegliere la soluzione più conveniente a seconda dei Km che vuoi percorrere, così puoi pensare al tuo percorso con calma , poi mi dici quanti Km vorresti percorrere ed io ti dico quale opzione ti conviene, ok?"

A:"Ok, allora adesso studio il percorso..grazie e a più tardi allora"

Come potrà ragionare Marco per fornire uno strumento di decisione al padre?Quale delle tre opzioni conviene adottare in funzione del numero di Km che intendiamo percorrere?

P3_Dia_Me

Alfredo vuole noleggiare una macchina per viaggiare la prossima domenica, si reca all'agenzia dove conversa con Luisa, l'addetta ai noleggi di auto:

A: "Buongiorno, vorrei avere qualche informazione sui noleggi di auto, vorrei viaggiare la prossima domenica"

L:"Si, che tipo di macchina vuole noleggiare? Una utilitaria, una macchina di lusso o qualcosa di intermedio?"

A:"No, mi basta una utilitaria, non ho delle necessità particolari"

L:"Bene, allora per questo tipo di vettura possiamo offrirle tre diverse opzioni, la prima prevede una quota fissa di 20 euro più 0,25 euro per Km percorso, la seconda una quota fissa di 26 euro più 0,20 euro per Km percorso e la terza una franchigia di 50 Km per 25 euro più 0,5 euro per Km percorso"

A:"Dunque…che significa franchigia di 50 Km?"

L:"..è la prima volta che noleggia una macchina eh?.."

A:"eh si, ha ha"

L:"Significa che se domenica percorrerà una distanza inferiore a 50 Km, comunque dovrà pagare come se avesse fatto 50 Km"

A:"Ho capito, quindi per decidere l'opzione più conveniente dovrei avere un'idea di quanto Km percorrerò..giusto?"

L:"Esatto Signor Alfredo, è proprio così! Lei dovrebbe stimare, a seconda del percorso che vorrebbe fare, il numero di Km e quindi decidere l'opzione per lei più conveniente"

A:"..credo allora che chiederò a mio figlio Marco, lui studia ingegneria e capisce un po' più di me di matematica..poi torno e le dico"

L:"Va bene, allora arrivederci, se vuole può anche telefonare così le riserviamo la macchina,"

Alfredo spiega il problema al figlio che inizia a scrivere su un foglio e a ragionare ad alta voce col padre:

M:"..se ho ben capito possiamo esprimere matematicamente il costo delle tre opzioni come segue:

$$c_A = 20 + 0{,}25d \;\; ; \; c_B = 26 + 0{,}20d \;\; ; \; c_A = \begin{cases} 25 & 0 < d \le 50 \\ 0{,}5d & d > 50 \end{cases}$$

A:"Che cosa sono quei simboli?"

M:"In matematica si possono indicare le grandezze con dei simboli e delle lettere, qua le c indicano i diversi costi a seconda dell'opzione che si sceglie, e d è la distanza percorsa in Km. Quelle scritte si chiamano equazioni e in questo caso si possono anche rappresentare geometricamente come rette."

A:"..capito…ma allora? Quale opzione devo scegliere?"

M:"Ma non lo so ancora..questo è solo un modo per rappresentare matematicamente i dati, ma la soluzione ottimale dipende da quanti Km tu intendi percorrere.."

A:"Quindi devo darti ora questo dato?"

M:"No, io adesso ci penso poi ti darò uno schema dal quale potremo scegliere la soluzione più conveniente a seconda dei Km che vuoi percorrere, così puoi pensare al tuo percorso con calma , poi mi dici quanti Km vorresti percorrere ed io ti dico quale opzione ti conviene, ok?"

A:"Ok, allora adesso studio il percorso..grazie e a più tardi allora"

Come potrà ragionare Marco per fornire uno strumento di decisione al padre?Quale delle tre opzioni conviene adottare in funzione del numero di Km che intendiamo percorrere?

Allegato2_ProblemiPortoghese

P1_Dia_NM

Carlos está brincando com um tanque de 50 litros que seu pai usa para fazer vinho. Este vasilhame possui forma cilindrica e graduada, tem três torneiras no fundo de diferentes diametros que servem para esvazia-lo quando se deve engarrafar o vinho.

Mario: "Carlos, o que você *está fazendo com o meu tanque?"*

*Carlos: "Nada, estou me divertindo enchendo-o de água at*é *este sinal e depois faço sair a água da torneira… e vou medir o tempo que este leva para esvaziar quando abro as torneiras?"*

*M: E o que voc*ê *faz com a água que sai?*

C: Encho estes vasos e no final a uso para encher novamente o tanque.

M: Engenhoso…bom..bom,.. tente calcular o tempo para cada uma das torneiras..veja que elas tem diametros diferentes …talvez os tempos sejam diferentes.

Carlos mede os três tempos, e vê que para esvaziar o vasilhame leva 10 minutos com a torneira mais larga, 15 minutos com a média e 20 minutos com a mais estreita. Naquele momento chega seu pai que lhe propõe um problema sabendo que Carlos gosta de matemática e que se dá muito bem:

M: Vejamos se consegue entender sem fazer a prova, quanto tempo leva o tanque para esvaziar se nos abrirmos todas as torneiras juntas.

C: Mas é dificíl, com certeza será mais rápido..mas como faço para dizer exatamente quanto?

Como Carlos poderá raciocinar? Como poderá prosseguir o diálogo?

P1_Dia_Mi

Carlos está brincando com um tanque de 50 litros que seu pai usa para fazer vinho. Este vasilhame possui forma cilindrica e graduada, tem três torneiras no fundo de diferentes diametros que servem para esvazia-lo quando se deve engarrafar o vinho.

Mario: "Carlos, o que você *está fazendo com o meu tanque?"*

*Carlos: "Nada, estou me divertindo enchendo-o de água at*é *este sinal e depois faço sair a água da torneira…mas o que* é *este sinal?"*

M: Indica o volume que o vinho ocupa quando o atinge…veja tem escrito 50L… significa 50 litros, se depois o nível é *diferente, basta ler nessa escala graduada*

C: Entendi…agora o encho de água e vou medir o tempo que este leva para esvaziar quando abro as torneiras

M: E o que você faz com a água que sai?

C: Encho estes vasos e no final a uso para encher novamente o tanque.

M: Engenhoso…bom..bom,.. tente calcular o tempo para cada uma das torneiras..veja que elas tem diametros diferentes …talvez os tempos sejam diferentes.

Carlos mede os três tempos, e vê que para esvaziar o vasilhame leva 10 minutos com a torneira mais larga, 15 minutos com a média e 20 minutos com a mais estreita. Naquele momento chega seu pai que lhe propõe um problema sabendo que Carlos gosta de matemática e que se dá muito bem:

M: Vejamos se consegue entender sem fazer a prova, quanto tempo leva o tanque para esvaziar se nos abrirmos todas as torneiras juntas.

C: Mas é dificíl, com certeza será mais rápido..mas como faço para dizer exatamente quanto?

Como Carlos poderá raciocinar? Como poderá prosseguir o diálogo?

P1_Dia_Me

Carlos está brincando com um tanque de 50 litros que seu pai usa para fazer vinho. Este vasilhame possui forma cilindrica e graduada, tem três torneiras no fundo de diferentes diametros que servem para esvazia-lo quando se deve engarrafar o vinho.

Mario: "Carlos, o que você está fazendo com o meu tanque?"

Carlos: "Nada, estou me divertindo enchendo-o de água até este sinal e depois faço sair a água da torneira…mas o que é este sinal?"

M: Indica o volume que o vinho ocupa quando o atinge…veja tem escrito 50L… significa 50 litros, se depois o nível é diferente, basta ler nessa escala graduada ,veja que se assemelha a um metro… so que aqui se lê o volume…entendeu?

C: Entendi…agora o encho de água e vou medir o tempo que este leva para esvaziar quando abro as torneiras.

M: E o que você faz com a água que sai?

C: Encho estes vasos e no final a uso para encher novamente o tanque.

M: Engenhoso…bom..bom,.. tente calcular o tempo para cada uma das torneiras..veja que elas tem diametros diferentes …talvez os tempos sejam diferentes.

Carlos mede os três tempos, e vê que para esvaziar o vasilhame leva 10 minutos com a torneira mais larga, 15 minutos com a média e 20 minutos com a mais estreita. Naquele momento chega seu pai que lhe propõe um problema sabendo que Carlos gosta de matemática e que se dá muito bem:

M: Vejamos se consegue entender sem fazer a prova, quanto tempo leva o tanque para esvaziar se nos abrirmos todas as torneiras juntas.

C: Mas é dificíl, com certeza será mais rápido..mas como faço para dizer exatamente quanto?

M:"Pode pensar que enquanto o vasilhame se esvazia, o nível da água que se vê na escala graduada se move para baixo com uma certa velocidade".

Como Carlos poderá raciocinar? Como poderá prosseguir o diálogo?

P2_Ipr_NM

Temos que encher de água uma banheira com capacidade de 300 litros, bombando-a de um lago próximo. Usando a bomba "A" a banheira enche em 20 minutos, usando a bomba "B" em 30 minutos e usando a bomba "C" em 10 minutos. Quanto tempo levará usando as três bombas juntas?

P2_Ipr_Mi

Temos que encher de água uma banheira com capacidade de 300 litros, bombando-a de um lago próximo. Usando a bomba "A" a água atinge a borda da banheira em 20 minutos, usando a bomba "B" em 30 minutos e usando a bomba "C" em 10 minutos. Quanto tempo levará usando as três bombas juntas?

P2_Ipr_Me

Temos que encher de água uma banheira com capacidade de 300 litros, bombando-a de um lago próximo. Usando a bomba "A" a água atinge a borda da banheira em 20 minutos, usando a bomba "B" em 30 minutos e usando a bomba "C" em 10 minutos. Podemos imaginar a capacidade da banheira como uma distancia a ser percorrida.Quanto tempo levará usando as três bombas juntas?

P2_Dia_Mi

Guido está querendo encher de água uma banheira com capacidade de 300 litros bombando-a de um lago próximo e pede informações ao seu pai que geralmente faz isso.

G:"Pai, eu queria encher a banheira, que está vazia, qual bomba posso usar para fazer mais rapido?"

P:"então...nos temos três bombas, se você quiser encher mais rapido a banheira pode usa-las juntas...usando a bomba vermelha a água atinge a borda a em 20 minutos, usando a bomba amarela a atinge em 30 minutos e usando a bomba verde a atinge em 10 minutos"

G:"E se eu usar as três juntas quanto tempo gasta a água para chegar até a borda?"

P:"Eu nunca tentei...eu tenho que pensar nisso..talvez a gente possa pedir a Marta que sempre se deu bem neste tipo de coisas..sabe eu me dou bem com o jardim mas com os numeros ela é melhor...."

Guido explica o problema para Marta, a irmã maior, que começa a pensar.....quanto tempo vai gastar Guido usando as três bombas juntas?Tentem responder continuando o dialogo entre Guido, Marta e o pai.

P3_Ipr_Mi

Querendo alugar um carro para viajar por um dia, imaginamos ter três possiveis opções:

- *A- Quota fixa de 20 reais mais 0.25 reais por Km percorrido*
- *B- Quota fixa de 26 reais mais 0,20 reais por Km percorrido*
- *C- Franquia de 50 Km (ou seja para distância percorrida inferiores a 50 Km serão de qualquer modo pagos 50 Km) mais 0,5 reais por Km percorrido.*

Então podemos exprimir matematicamente o custo em função dos Km percorrídos das três opções como segue:

$A: y = 0{,}25x + 20$ *;* $B: y = 0{,}20x + 26$ *;* $C: y = \begin{cases} 25 & 0 < x \le 50 \\ 0{,}5x & x > 50 \end{cases}$ *onde* x è a *distância percorrida em Km e y* é *o custo.*

Qual das três opções convem adotar em função do número de Km que pretendemos percorrer?

P3_Ipr_Me

Querendo alugar um carro para viajar por um dia, imaginamos ter três possiveis opções:

- *D- Quota fixa de 20 reais mais 0.25 reais por Km percorrido*
- *E- Quota fixa de 26 reais mais 0,20 reais por Km percorrido*
- *F- Franquia de 50 Km (ou seja para distância percorrida inferiores a 50 Km serão de qualquer modo pagos 50 Km) mais 0,5 reais por Km percorrido.*

Então podemos exprimir matematicamente o custo em função dos Km percorrídos das três opções como segue:

$c_A = 20 + 0{,}25d$; $c_B = 26 + 0{,}20d$; $c_c = \begin{cases} 25 & 0 < d \le 50 \\ 0{,}5d & d > 50 \end{cases}$ *onde* d è a *distância*

percorrida em Km e c_A, c_B, c_c *os custos.*

Tais equações podem ser interpretadas como retas. Qual das três opções convem adotar em função do número de Km que pretendemos percorrer?

P3_Ipr_Mi

Querendo alugar um carro para viajar por um dia, imaginamos ter três possiveis opções:

G- *Quota fixa de 20 reais mais 0.25 reais por Km percorrido*
H- *Quota fixa de 26 reais mais 0,20 reais por Km percorrido*
I- *Franquia de 50 Km (ou seja para distância percorrida inferiores a 50 Km serão de qualquer modo pagos 50 Km) mais 0,5 reais por Km percorrido.*

Então podemos exprimir matematicamente o custo em função dos Km percorrídos das três opções como segue:

$A: y = 0{,}25x + 20$; $B: y = 0{,}20x + 26$; $C: y = \begin{cases} 25 & 0 < x \le 50 \\ 0{,}5x & x > 50 \end{cases}$ *onde* x è a *distância*

percorrida em Km e y é *o custo.*

Qual das três opções convem adotar em função do número de Km que pretendemos percorrer?

P3_Dia_NM

Alfredo está querendo alugar um carro para viajar no próximo domingo, então ele vai na agéncia onde conversa com Luisa, a responsavel por alugueis de carro:

A:"Bom dia, eu estava querendo umas informações sobre aluguel de carro, queria

viajar no próximo domingo"

L:"Sim, que tipo de carro o senhor estava querendo alugar?Um carro popular, um carro de luxo ou algo de intermediário?"

A:"Não, um carro popular basta, não estou com necessidades particulares"

L:"Bom, então por este tipo de carro podemos lhe oferecer três diferentes opções, a primeira uma quantia fixa de 20 reais mais 0,25 reias por cada quilometro percorrido, a segunda uma quantia fixa de 26 reais mais 0,20 reais por quilometro percorrido e a terceira uma franquia de 50 Km por 25 reais mais 0,5 reais por Km percorrido"

A:"Então...o que significa franquia de 50 Km?"

L:".. é a primeira vez que o senhor aluga um carro é?.."

A:" é sim...ha ha"

L:"Significa que se no domingo o senhor for percorrer uma distancia menor do que 50 quilometros, deverá pagar como se tivesse percorrido 50 quilometros"

A:"Entendi, então para escolher a opção mais conveniente eu teria que ter uma ideia de quantos quilometros iria percorrer..está certo?"

L:"Exatamente senhor Alfredo, é assim mesmo! O senhor deveria fazer uma estimativa do numero de quilometros que o senhor iria percorrer, dependendo do percurso, e depois decidir a opção mais conveniente pra o senhor"

A:"..então acho que vou pedir uma ajuda ao meu filho Marco, ele estuda engenharia e entende um pouco mais de matematica do que eu..depois vou voltar para combinar a opção"

L:"Está bem, então até logo, se quiser pode tambem ligar para reservar o carro"

Alfredo explica o problema para o filho que começa a escrever em um papel e a raciocinar em voz alta com seu pai :

M:"..se eu entendi bem podemos escrever matematicamente o custo das três opções da seguinte forma:

$$c_A = 20 + 0{,}25d \ \ ; \ c_B = 26 + 0{,}20d \ \ ; \ c_A = \begin{cases} 25 & 0 < d \le 50 \\ 0{,}5d & d > 50 \end{cases}$$

A:"O que são aqueles simbolos?"

M:"Na matematica as grandezas podem ser indicadas com simbolos e letras, neste caso as letras c indicam os diferentes custos dependendo da opção escolhida, d è a distancia percorrida em quilometros"

A:"..entendi..mas então? Qual é a opção que tenho que escolher?"

M:"Mas ainda não sei..esta é só uma forma de representar matematicamente os dados, mas a opção mais conveniente depende dos quilometros que você vai querer percorrer..."

A:"Então você precisa deste dado agora?"

M:"Não, agora eu vou pensar nisso, depois vou te dar um esquema que vai servir para a escolha mais conveniente dependendo dos quilometros que você quer percorrer..assim pode pensar com calma e depois me fala quantos quilometros e eu vou te indicar a escolha mais conveniente, está bem? "

A:"Está bem, então agora vou pensar no percurso..obrigado e até mais tarde "

Como poderá raciocinar Marco para achar uma ferramenta de decisão útil para o pai? Qual das três opções convem adotar em função do número de Km que pretendemos percorrer?

Allegato 3: sintesi dei protocolli per classe

Le sintesi che seguono sono state ottenute a partire dai registri delle attività e dai protocolli dei gruppi integrandoli con le osservazioni che lo sperimentatore ha fatto alla fine di ogni sessione (Allegato0_ProtocolliPriSpe). Le sintesi sono raggruppate per classe dalla numero 1 alla 8 e per gruppo, in modo da rendere più semplice il recupero di informazioni.

Classe 1

G1_1 (3°liceo brasile) P1_Dia_Me:prima provano con la media delle velocità poi con la somma ma non la giustificano e non vedono la necessità di giustificarlo. Dopo 20 minuti trovano la soluzione corretta senza metafore o analogie esplicite. Senza il mio intervento pensano che durante lo svuotamento la velocità dell'acqua sia costante e che la velocità non dipende da quanti rubinetti siano aperti. Dopo il mio intervento sulla variazione di velocità dicono che le velocità da loro considerate sono velocità medie ed il risultato è una approssimazione. Dicono che la parte del testo più utile è stata quella finale.

G1_2 (3°liceo brasile) P2_Ipr_NM : dopo 10 minuti hanno trovato una soluzione sommando le portate e senza usare metafore. Hanno dei problemi nella conversione dei minuti (decimali) in secondi. Hanno calcolato per ogni pompa quanti litri/min riesce a pompare, quindi sommano le tre portate e infine dividono la capacità della vasca per la portata complessiva. Si nota che nel testo scrivono che dividono la portata per la capacità ma poi effettuano l'operazione inversa (quella giusta). Ottenendo un valore di 5,45 minuti cercano di trasformare i decimali in secondi ed ci riescono impostando una proporzione. Dopo 20 minuti dall'inizio chiedo di spiegare la soluzione che propongono (che pare corretta). Non si trovano ulteriori giustificazioni nel testo che possano far pensare a metafore o analogie, almeno in maniera esplicita. L'unica cosa che viene specificata è che per risolvere il problema hanno "*scelto di pensare ad una progressione del tempo minuto per minuto*". Mi pare che con questo abbiano voluto intendere che l'unità da loro fissata per calcolare la portata e per poi sommare le singole portate sia il minuto. Dopo 1 ora consegnano il lavoro.

G1_3 (3°liceo brasile) P3_Ipr_Mi: dopo 15 minuti stanno facendo molte prove numeriche con la calcolatrice. Si basano sui numeri che compaiono nelle equazioni e non fanno disegni. Gli studenti iniziano a fare dei calcoli, usando anche la calcolatrice, provando alcuni valori di distanza e verificando quale delle diverse opzioni risulta più conveniente per i valori ottenuti. Questo li porta a capire, come scrivono anche nella pagina finale, che per certi valori è conveniente una opzione e per altri valori una opzione differente. Usando tentativi arrivano ad individuare i valori critici, nei quali cambia la convenienza delle diverse opzioni. Qualche minuto dopo continuando le loro prove numeriche e dicono di avere trovato la soluzione. Dopo 25 minuti dall'inizio chiedo come hanno fatto ad individuare i punti esatti nei quali cambia la "convenienza" delle diverse opzioni, dicono che prima hanno fatto dei tentativi (ed un alunno gesticola come se si stesse spostando avanti ed indietro su di una linea per evidenziare che i tentativi potevano fornire valori troppo alti o troppo bassi e che quindi ci si doveva spostare indietro o in avanti) e poi una ragazza mi mostra che hanno impostato una equazione. Spinti dalle mie domande su come fare ad essere sicuri di tali valori iniziano ad impostare equazioni, ed arrivano ai valori esatti (in effetti un valore ottenuto per tentativi non è corretto e successivamente viene modificato). Qualche minuto dopo chiedo cosa stiano facendo dato che li vedo fare molti calcoli, mi rispondono che stanno verificando se il metodo delle equazioni porta allo stesso risultato di quello "a tentativi" che comunque non è chiarito. Non fanno alcun disegno. Dopo 1 ora dall'inizio un alunno commenta che il punto di svolta è stato l'impostazione dell'equazione. Chiedo in che modo riescono a scegliere fra le opzioni dopo che hanno impostato l'equazione ed alcuni alunni pensano ad una disequazione. Propongono di utilizzare disequazioni che utilizzano correttamente per giustificare la soluzione definitiva che è corretta. Nel testo non ci sono molte spiegazioni. Dopo poco dicono di voler consegnare il lavoro, dopo avere constatato che non ci sono spiegazioni, li spingo a rivede il testo cercando di commentare e spiegare quello che hanno fatto. Poco dopo propongo al gruppo di interpretare in maniera geometrica il problema ed una alunna chiede"..vedere le equazioni come rette?", io rispondo di si. Dopo circa 15 minuti hanno disegnato le rette (correttamemte) e concordano che in questo modo la soluzione si vede più facilmente anche se coincide con quella già ottenuta per altra via.

Classe 2

G2_1 (4°liceo brasile) P1_Dia_NM: Iniziano facendo un disegno. Dopo 20 minuti dall'inizio, utilizzano delle formule che fanno direttamente riferimento a velocità e tempo. Dicono che lo spazio (ovvero il volume occupato dal liquido) "*è una distanza*". Chiedo perché utilizzino il termine velocità ed il termine distanza (usano il simbolo Δs). Hanno fatto un disegno rappresentando i rubinetti con tre fori di differenti diametri sul fondo del contenitore. Il disegno è un cilindro nel quale scrivono il simbolo che indica il raggio r e l'altezza h. Ma non disegnano alcuna graduazione o segno che indichi il livello dell'acqua. Scrivono la formula $Velocit\grave{a} = \frac{\Delta S}{\Delta T}$ e la usano per calcolare le diverse velocità nei tre casi. Sommano poi le velocità ottenute ed utilizzano il risultato per calcolare il tempo che impiega a svuotarsi con la nuova velocità. Scrivono il risultato nella forma $10.83 = \frac{50L}{T}$ e $T = 4.61\ min$. Dopo 30 minuti dall'inizio chiedo cosa stiano facendo e di spiegare bene, nel testo, perché sommano le velocità. Nella spiegazione che chiedo di scrivere giustificano la somma dicendo che hanno considerato "*come se ci fosse un solo un grande buco*". Osservano che il risultato è "*logico e possibile*" perché il tempo impiegato usando i tre rubinetti a aperti è certamente inferiore a ciascuno dei tre.

Dopo 40 minuti chiedo se le velocità sono costanti e rispondono che effettivamente non lo sono. Li spingo a ragionare su questo fatto. Affermano che tale velocità dipende dalla pressione e dalla quantità di acqua che c'è (in realtà sono io che li spingo ad arrivare a questo), disegnano poi una curva (con andamento decrescente e quasi iperbolico) che rappresenta la velocità di uscita in funzione del tempo, ma senza ulteriori giustificazioni ,si chiedono se la pressione dipenda dalla forma del contenitore. Dopo 1 ora li spingo a ragionare sul fatto che si possa interpretare la velocità come una velocità media e come questo influisca sulla soluzione esatta, iniziano a parlare di *velocità media* , un componente dice che la soluzione è la stessa (non so se in maniera profonda o superficiale).Poco dopo consegnano il lavoro.

G2_2 (4° liceo brasile) P2_Ipr_Mi : dopo 5 minuti dalla consegna dicono di avere già trovato il risultato. Associano ad ogni pompa il rapporto L/minuto calcolando quindi, per ogni pompa, quanti litri vengono pompati in un minuto (risp. 15L/min, 10L/min e 30L/min). Successivamente sommano queste grandezze (55L/min) e dividono la capacità della vasca per la somma ottenuta(300/55). Chiedo perché facciano la somma delle portate che hanno calcolato rispondono che a loro sembra ovvio che le portate debbano essere sommate. Chiedo che tipo di grandezza sia il rapporto L/min, litri diviso minuti e rispondono che è "*tipo una velocità*" ed utilizzano la stessa definizione di velocità spazio/tempo per giustificarla, notano che il volume non è uno spazio ma è "*come uno spazio*".Da quello che scrivono si vede che non riescono a chiarirsi bene il significato della grandezza, provano diverse strade ma non riescono a spiegare bene perché la grandezza da loro calcolata sia legata alla velocità. Chiedo quale parte del testo è stata secondo loro più utile per individuare una soluzione e dicono che l'immagine della vasca che si riempie è utile e parlano di "*potenze* " delle diverse pompe che quando si usano insieme si sommano.

G2_3 (4°liceo brasile) P3_Ipr_Me : dopo 15 minuti non hanno ancora fatto grafici o disegni e procedono per tentativi. Dopo 30 minuti sul testo hanno sottolineato la frase relativa all'interpretazione delle equazioni come rette (metafora esplicita) ma hanno difficoltà ad interpretare il simbolo d e non hanno ancora fatto disegni. Dopo 40 minuti stanno impostando delle disequazioni ed hanno qualche difficoltà ad capire la terza opzione, non fanno ancora disegni o grafici. Dopo 50 minuti li spingo ad interpretare le equazioni come rette e a disegnarle: hanno inizialmente difficoltà a stabilire cosa sia x e cosa sia y, infine interpretano y come costo ed x come distanza e chiedono un foglio a quadretti per disegnare le rette. Hanno qualche difficoltà a tracciare le rette, tracciano solo due segmenti ma non sanno come procedere per risolvere il problema. Dopo Dopo 1 ora e 15 minuti intervengo e li stimolo a pensare a cosa debbano guardare nel grafico per capire quale è l'opzione più conveniente, capiscono che dipende da quale rette sta sopra o sotto e non, come inizialmente pensavano, dalla pendenza delle rette e questo avviene quando li spingo a interpretare il significato della y come costo. Chiedo poi come fare a capire quali sono i punti nei quali avviene il cambiamento di convenienza e, dopo poco, mi dicono che bisogna impostare dei sistemi.

Classe 3

G3_1 (1°liceo brasile) P2_Ipr_Me: dopo 15 minuti trovano il risultato, usando una formula che non giustificano (il reciproco del tempo complessivo è la somma dei reciproci dei singoli tempi). Dopo 1 ora e 10 minuti chiedo se la velocità abbia qualche cosa a che fare con il problema e mi rispondono che è la velocità dell'acqua ma non usano alcuna analogia con altri problemi.

G3_2 (1° liceo brasile) P3_Dia_NM : dopo 10 minuti stanno ragionando insieme e chiedono chiarimenti sulla terza opzione, vogliono sapere se devono sommare o no il 25. Dopo 25 minuti dall'inizio stanno procedendo per tentativi numerici, usano anche i numeri che compaiono nel testo 25, 50, 100 e poi tentano valori intermedi come 80 ("*perché è fra 50 e 100*"). Dopo 50 minuti dall'inizio dicono di avere finito e dall'analisi si vede che hanno proceduto per tentativi, arrivando ad un risultato che pare corretto, io chiedo come possano essere sicuri del risultato, mi dicono (una alunna) che sa che si dovrebbe usare un sistema ma non sa come fare. (*Risulta che la ragazza ha già frequentato un'altra classe dove hanno studiato i sistemi ma non sa come usarli*). Nel testo non compare alcun tipo di disegno o grafico. Iniziano calcolando il costo per diversi valori, usano i valori:50, 25, 10, 100, 60, 80, 120 Km. Quando chiedo una giustificazione dicono che stanno procedendo a tentativi ma non spiegano bene perché abbiano deciso di usare proprio quei valori. Successivamente propongono una soluzione in questo modo:

0<d<20 opzione A

20<d<80 opzione C

80<d<120 opzione A

d>120 opzione B

In realtà il 25 viene mutato in un 20 dopo un ulteriore tentativo (che viene scritto successivamente). La strategia quindi è per tentativi, non vengono impostate equazioni per determinare i punti nei quali cambia la convenienza. Dopo 1 ora e 10 minuti dall'inizio consegnano il lavoro.

G3_3 (1° liceo brasile) P1_Dia_Mi: dopo 10 minuti dall'inizio hanno calcolato i rapporti e parlano di velocità, li sommano ma non sono sicuri su come procedere, io li spingo a scrivere quello che hanno fatto fino ad ora. Dopo 30 minuti chiedo cosa stiano facendo, dicono che sono convinti del procedimento: trovano le diverse velocità, le sommano e per la parte finale impostano una proporzione . Non utilizzano unità di misura, chiedo di usare le unità di misura. Nel testo vengono scritti i dati ma non viene fatto alcun disegno. Vengono calcolati per ogni rubinetto i litri che fuoriescono per ogni minuto. Nella prima pagina di calcoli che propongono (scritta a matita) sommano queste quantità (litri al minuto) ottenendo 10,8. Per ricavare il tempo inizialmente impostano una serie di proporzioni, l'impressione, analizzando il testo, è che non sappiano bene come utilizzare la proporzione e fanno diversi tentativi fino ad arrivare ad un risultato che ottengono comunque dividendo la capacità per la velocità totale e che sembrano successivamente giustificare con una proporzione Dopo 45 minuti chiedono di poter scrivere il ragionamento "dentro al dialogo" (è il primo gruppo che si accorge esplicitamente della richiesta e vuole continuare il dialogo). Nella trasformazione in dialogo di quanto fatto, parlano esplicitamente di "*velocità con cui l'acqua esce da ogni rubinetto*" ed utilizzano come unità di misura litri/min. Successivamente dicono che si deve trovare "*la relazione fra x la velocità e la dimensione (grandezza) del recipiente*" e propongono la formula :

$$\frac{Dimensione}{Tempo} = velocità = \frac{50l}{x_{min}} = 10{,}8l/min$$

Non è chiaro cosa intendano per velocità, inizialmente parlano di velocità dell'acqua poi la velocità diventa velocità come rapporto fra la dimensione del recipiente e tempo , non viene esplicitato in nessun punto il legame fra i due concetti. In ogni caso parlano di velocità.

Per risolvere l'ultima equazione dicono di utilizzare la "*regola del tre*" . Il risultato che ottengono è 4,269 che viene lasciato scritto in questo modo.

Dopo 1 ora dall'inizio chiedo che tipo di grandezza sia il rapporto Volume/tempo, dicono che è la velocità con la quale l'acqua esce. Dopo 1 ora e 15 minuti li spingo a ragionare sulla velocità dell'acqua mentre esce dal tino ed arrivano a capire che dipende dalla pressione. Dicono che la velocità calcolata è quella media ed uno avanza il dubbio che possa cambiare il risultato e quindi su come si possa calcolare il tempo.

G3_4 (1°liceo brasile) P1_Dia_Me: dopo 10 minuti stanno lavorando insieme facendo un disegno, dopo 20 minuti (dall'inizio) hanno calcolato quanti litri al minuto escono con ogni rubinetto, sommano le grandezze e con una proporzione (che chiamano regola del tre) ottengono il tempo richiesto. Dopo 45 minuti chiedo quale parte del testo sia stata più utile per la soluzione del problema ed indicano alcune frasi della parte finale, in particolare la frase di Mario (metafora esplicita), parlano esplicitamente di velocità dell'acqua. Dopo un'ora chiedo come possano essere sicuri che l'acqua mantenga velocità costante durante lo svuotamento ed una alunna (dopo averci pensato un poco) dice che quando c'è più acqua la pressione sarà maggiore e quindi anche la velocità.

Classe 4

G4_1 (2° liceo brasile) P3_Ipr_Mi: dopo 15 minuti chiedono cosa debbano fare, cosa chiede il problema, io spiego che dovrebbero determinare un metodo generale per determinare, dato il numero di Km, l'opzione più conveniente. Dopo 30 minuti chiedono chiarimenti sull'opzione C. In particolare non è loro chiaro come interpretare il termine additivo e la distanza. Una alunna chiede se è da interpretare come distanza dopo i 50 Km. (In realtà potrebbe essere una interpretazione alternativa ma equivalente). Spiego il significato della funzione. Io gesticolo nello spiegare la situazione come se le mie mani si spostassero su di una linea. Il loro insegnante interviene e dice che nel punto corrispondente ai 50Km le due funzioni "si congiungono".Dopo 45 minuti stanno provando diversi valori (5,10, 20) e si sono accorti che a 20 Km cambia qualcosa. La ragazza gesticola come se la mano si spostasse su di una linea. Poco dopo vedo che continuano ancora a procedere per tentativi. Li spingo a considerare che il problema è stabilire i valori (uso la parola punti), dove cambia la convenienza. Come si può fare a trovarli? Dicono di non avere ancora trovato un metodo. Dopo 1 ora e 15 minuti spiegano la loro soluzione, che pare esatta, alla quale sono arrivati per tentativi e "*scoprendo delle regolarità* ".La maggior parte delle cose scritte sono calcoli. In sostanza tentano diversi valori e calcolano il costo di ogni opzione per poi vedere quale è la più conveniente. Procedono poi aumentando la quantità di chilometri in maniera regolare (con variazioni di 20Km) per dedurre quali sono i punti nei quali la convenienza cambia. Infine dicono di avere "scoperto" che se x è il numero di Km del viaggio:

se $x< 20$ allora conviene l'opzione A

se $20< x < 80$ allora conviene l'opzione C

se $80< x < 120$ allora conviene l'opzione A

se $x> 120$ allora conviene l'opzione B

Non è comunque evidente come arrivino a questo risultato. Io chiedo di spiegare bene, poi chiedo loro che cosa sia l'espressione y=….(eq. Di una retta), una ragazza di dice che lei ha pensato sin dall'inizio ad una retta o ad un moto rettilineo uniforme. Dopo 1 ora e 30 minuti dall'inizio disegnano le rette. Costruiscono un grafico qualitativamente corretto ma senza unità di misura e senza valori ma dove le caratteristiche delle rette sono sostanzialmente corrette. Chiedo come si possano sfruttare le rette disegnate per determinare i punti nei quali cambia la convenienza ed una alunna dice che si devono mettere a sistema le rette. Infine spiego come sfruttare il grafico delle rette per ottenere la soluzione del problema, capiscono subito e si meravigliano di come si possa risolvere il problema in maniera più veloce con questo metodo.

G4_2 (2°liceo brasile) P1_Dia_NM : dopo 5 minuti chiedono il significato di "graduada" ed io spiego che significa che ci sono linee con numeri. Dopo 20 minuti dall'inizio dicono di avere terminato. Nel testo gli alunni riscrivono i dati e fanno un disegno, scrivendo subito che la pressione sarà diversa se tutti i rubinetti vengono aperti. Calcolano poi per ogni rubinetto quanti litri al minuto vengono versati. Sommano le quantità ottenute ed impostano una proporzione per ricavare il tempo complessivo ricavando il tempo=4,63 minuti. Dicono che la presunta diminuzione di velocità dovuta alla diminuzione di pressione con tutti i rubinetti aperti non viene considerata. Chiedo di spiegare meglio quello che hanno detto sulla pressione ed i passaggi fatti e di giustificare la somma.

Dopo 30 minuti mostrano quello che hanno scritto. Pare che giustifichino la somma dicendo che la pressione è trascurata.

Dicono che l'operazione di somma è giustificata dal fatto che non viene considerata la diminuzione di pressione dovuta a tutti i rubinetti aperti, ma non spiegano ulteriormente questa operazione.

Chiedo di spiegare meglio e pare che il loro ragionamento sia il seguente: se si aprono i tre rubinetti, la pressione che spinge l'acqua sarà minore rispetto a quando un solo rubinetto è aperto. Questo influisce sulla velocità, ma gli alunni dicono di trascurare questo effetto. Chiedo di trasformare il loro lavoro in un dialogo che prosegua quello del testo. Dopo 1 ora dall'inizio pongo al gruppo il problema della pressione durante la fuoriuscita di acqua. Siamo sicuri che la velocità sia costante ? (dal loro ragionamento traspare che la stanno considerando tale). Arrivano velocemente ad intuire che la velocità diminuisce mentre l'acqua scende. (Questo tipo di effetto è diverso da quello che hanno descritto in precedenza). Propongo loro di pensare a come possa cambiare la soluzione, se cambia.

Nel dialogo finale che propongono ripercorrono le tappe che secondo loro sono state più significative per la soluzione del problema: il calcolo riferito all'unità di tempo di 1 minuto, la somma di tali grandezze (parlano di velocità ma anche di quantità di acqua per minuto), il fatto che (secondo loro) aprendo i rubinetti contemporaneamente la pressione e quindi la velocità sarebbe minore e quindi il tempo aumenterebbe ma questo fatto viene trascurato, nemmeno nel dialogo viene giustificata l'operazione di somma.

G4_3 (2°liceo brasile)   P2_Dia_Mi: Dopo 10 minuti dall'inizio dicono di avere terminato (nel loro foglio non compaiono disegni), io chiedo di scrivere la spiegazione di quanto hanno fatto. Dopo 20 minuti il testo è semplicemente una trascrizione scritta di quello che hanno fatto. Il testo inizia con il calcolo della quantità di acqua per minuto con cui ciascuna pompa riempie la vasca che calcolano con la "regola del tre" , sommano le portate e, ancora con la regola del tre, ricavano il tempo necessario per riempire la vasca, ottenendo il tempo 5,45 minuti. Chiedo che spieghino meglio perché hanno sommato le grandezze. Dopo 30 minuti mostrano il dialogo (parziale) dove in realtà la somma non viene giustificata. Dopo 1 ora leggo il dialogo dove parlano esplicitamente di *velocità* di ogni pompa (in una maniera apparentemente incoerente visto che dicono "velocità di ogni pompa per minuto" ma probabilmente intendendo che stanno usando come unità di tempo il minuto). Nel dialogo viene scritta la mia domanda "*Perché voi sommate le velocità delle pompe*?" e la "spiegazione " sarebbe: "*Se la pompa rossa riempie la vasca con 15 litri in un minuto, la gialla con 10 e la verde con 30, possiamo concludere che se le facciamo funzionare contemporaneamente* per *riempire la vasca , la prima la riempirà con 15 litri, più i 10 litri della seconda e più i 30 litri della terza, avremo riempito la vasca con 55 litri*", si soffermano poi a spiegare la regola del tre.. Chiedo che tipo di grandezza sia L/tempo. Poco dopo dicono che la grandezza è una "concentrazione", anche se un alunno dice che è come Km/h, propongo di cercare una grandezza più comune, più facile da capire da parte di chiunque (anche da chi non conosce la fisica o la chimica).Dopo 1 ora e 30 minuti chiedo quale frase/parola è stata più utile per la soluzione, dicono che è la 2° frase (quella del papà) perché ci sono più dati.

G4_4 (2°liceo brasile) P2_Ipr_Me: dopo 10 minuti dicono di avere finito. Il risultato è corretto e chiedo di spiegare la ragione per cui hanno sommato le grandezze litri/minuto delle pompe e chiedo che tipo di grandezza sia L/min. Chiamano tale grandezza "vazao" ovvero portata. Dopo 45 minuti chiedo quale parte del testo o quali parole li abbiano maggiormente aiutati e dicono che è stata la parola "juntas",ovvero assieme, che compare nel testo quando si dice che le pompe funzionano assieme. Un alunno mi dice che hanno notato la frase "*Possiamo immaginare la capacità della vasca come una distanza da percorrere*" (metafora esplicita) ma non è stata loro utile per ragionare sul problema. Dopo 55 minuti (dall'inizio) chiedo di riflettere su tale frase e chiedo se c'è qualche somiglianza con il problema posto. Un componente dice che si potrebbe fare corrispondere i 300 litri a 300 Km, 10 litri/minuto a 10 Km/h ed analogamente alle altre portate ma poi si chiede che senso avrebbe sommare queste velocità? Successivamente dicono che non riescono a pensare ad un problema simile perché non si riesce ad utilizzare la parola contemporaneamente "*juntas*", in maniera sensata, ovvero non riescono a capire a quale tipo di situazione corrisponde il funzionamento contemporaneo delle pompe nel nuovo problema con velocità e macchina. Faccio vedere come si possa pensare ad una sola macchina che viaggia ad una velocità che è la somma delle velocità, a quel punto un alunno dice che "è lo stesso problema"

Classe 5

G5_1 (3°liceo italia)P1_Ipr_NM: dopo 10 minuti stanno facendo un disegno. Dopo 15 minuti dall'inizio dicono di avere finito. Nel procedimento che propongono parlano di velocità con la quale il tino si svuota. Hanno calcolato per ogni rubinetto la quantità litri/minuti che chiamano velocità, poi le sommano, ottenendo 10,8, infine dividono la capacità del tino per 10,8 ottenendo il tempo 4,6 minuti. Dopo 40 minuti chiedo come definire la grandezza litri/minuto, un alunno dice che è la velocità con cui si svuota , invece dello spazio ci sono i litri. Chiedo perché sommino le grandezze. Dopo 1 ora dall'inizio la spiegazione che forniscono non è in realtà una spiegazione ed io chiedo nuovamente di spiegare perché sommino le grandezze. Dopo 1 ora e 10 minuti chiedo se la velocità sia costante durante lo svuotamento ed un alunno dice subito che all'inizio sarà maggiore e poi minore. Chiedo se questo può influire sul risultato da loro ottenuto, una alunna dice di si ma un altro non è convinto. Dopo 1 ora e 20 minuti dall'inizio dicono che il risultato non cambia perché si tratta di velocità medie e l'influenza sul risultato è trascurabile. Chiedo se il risultato è esatto o è una approssimazione e scrivono che ci potrebbero essere degli altri fattori che influenzano il risultato ma sarebbero così piccoli da poter essere trascurati.

G5_2 (3°liceo italia) P3_Dia_Me: dopo 15 minuti una alunna sta disegnando un grafico, successivamente mi spiega che intende usare il grafico (retta) per capire meglio cosa convenga fare. Dopo 55 minuti mi spiega che il grafico serve per trovare le intersezioni dove avviene il cambiamento di convenienza fra le diverse opzioni. Chiedo come mai abbiano pensato subito ad usare delle rette e mi dicono che è chiaro dal testo. Dopo 1 ora e 15 minuti una alunna (quella che aveva iniziato) continua da sola con il metodo grafico mentre gli altri due stanno procedendo per tentativi, successivamente confrontano i risultati che non sono completamente coerenti. Infine spiego come utilizzare il metodo grafico. Dal protocollo si vede che si sono bloccati durante i calcoli con le rette, nella soluzione dei sistemi.

G5_3 (3°liceo italia) P1_Ipr_Me: dopo 10 minuti stanno facendo un disegno. Dopo 20 minuti dall'inizio dicono di non sapere cosa fare. Hanno fatto un primo tentativo nel quale hanno impostato un sistema nel quale dicono di usare spazio, tempo e velocità, alla mia domanda su cosa sia lo spazio rispondono che si legge sul cilindro graduato. I calcoli che fanno non hanno un significato chiaro, infatti arrivano ad un risultato privo di significato per il problema (spazio=0) e quindi cancellano tutto. Dopo 45 minuti calcolano il numero di litri che ciascun rubinetto lascia uscire e sommano le grandezze ottenute ma non sono convinti, successivamente dividono la capacità del tino per la portata totale ed ottengono un tempo di 4,63 minuti. Successivamente, dopo 1 ora e 30 dall'inizio, faccio notare che la velocità con la quale l'acqua esce dai rubinetti non sarà costante e chiedo se questo influisce sul risultato. Dopo poco dicono che effettivamente la velocità cambia e quindi il tempo impiegato sarà maggiore.

G5_4 (3° liceo italia) P2_Dia_Mi: dopo 10 minuti una ragazza chiede se può usare il quaderno degli appunti di matematica perché pensa che le possano servire le progressioni aritmetiche e geometriche. Dopo 15 minuti dall'inizio dicono di avere terminato, chiedo di spiegare come hanno ragionato, scrivendo i vari passaggi. Spiegano brevemente il risultato: calcolano per ogni pompa quanti litri immette al minuto, poi sommano i risultati ottenendo quanti litri al minuto vengono immessi nella vasca dalle tre pompe assieme, infine calcolano il tempo di riempimento della vasca. Dopo 20 minuti dall'inizio chiedo di giustificare l'uso della somma per le grandezze trovate dato che in realtà non l'hanno giustificata. Nella "spiegazione" della somma in realtà dicono che devono "necessariamente" sommare perché le pompe funzionano assieme. Poco dopo chiedo di trasformare in dialogo quello che hanno scritto. Dopo 1 ora dall'inizio chiedo se ci sono relazioni fra il problema proposto ed il problema di una macchina che deve percorrere un certo tragitto ed una decina di minuti dopo trovano una corrispondenza fra i due domini. Dicono che effettivamente ci sono delle relazioni, scrivono: "*le auto corrispondono alle pompe, il volume alla distanza..e la velocità corrisponde alla quantità di litri immessi al minuto dalle pompe* ". Propongo di inventarsi un problema simile a quello dato ma nel nuovo dominio (macchina e tragitto). Dopo 1 ora e 45 minuti dall'inizio propongono un problema ed io chiedo di risolverlo. Nel problema che propongono fanno corrispondere (e me ne accerto chiedendolo) alla capacità della vasca (300 l) una distanza di 30 Km da percorrere, poi associano a tre diverse macchine tre diverse potenze (120 , 150 e 170 cavalli) e tre diversi tempi di percorrenza, poi suppongono che ci sia una quarta macchina con potenza uguale alle potenze delle macchine precedenti. Nella soluzione, tuttavia, non sommano e non sfruttano le potenze ma invece calcolano le velocità di ogni singola macchina e poi le sommano, considerando implicitamente il risultato come la velocità con la quale la quarta macchina percorrerebbe il medesimo tragitto.

G5_5 (3°liceo italia) P2_Dia_Me: dopo 30 minuti dall'inizio dicono di avere terminato. Il problema è risolto correttamente col metodo della somma delle portate e divisione, inizialmente si riferiscono alla *capacità* delle pompe, nel testo che riscrivono parlano di volume (per quanto riguarda l'acqua e di *velocità* delle pompe. Passano poi a cercare di risolvere il problema con un secondo ragionamento, cercando di seguire l'indicazione del testo (metafora esplicita). Dopo 50 minuti dall'inizio un alunno mi chiede se il rapporto litri/tempo è una velocità e se la distanza può essere interpretabile come altezza della vasca. Successivamente chiedono se possono consultare il libro di fisica per rivedere le leggi orarie del moto. Dopo poco chiedo che formule hanno cercato, rispondono che hanno cercato la legge del moto rettilineo uniforme ma non l'hanno trovata utile. Successivamente (1 ora e 30 dopo l'inizio) individuano una metafora che permette di legare due domini: viene fatto un paragone con un punto che sale di moto rettilineo uniforme lungo l'argine della vasca. La formula che viene usata è t=s/v e scrivono "*che s è rappresentata dalla capacità della vasca mentre v la consideriamo la capacità delle tre pompe unite di fare uscire l'acqua*".

Il risultato ottenuto è confrontato con quello del primo metodo e gli alunni dicono che "*i conti corrispondono*". Nel breve dialogo che propongono come proseguimento del testo, dicono che dato che le pompe immettono acqua a velocità costante, allora l'acqua salirà lungo il bordo a velocità costante e quindi si possono usare le formule del moto rettilineo uniforme.

G5_6 (3°liceo italia) P3_Ipr_Me: dopo 10 minuti si riorganizzano in modo da leggere il testo assieme. Dopo 15 minuti chiedono un chiarimento sulla terza opzione. Dopo 20 minuti stanno provando a risolvere per tentativi senza fare disegni o grafici. Dopo 35 minuti dall'inizio dicono che stanno cercando di suddividere in fasce le distanze e che devono fare molti calcoli, un componente dice che secondo lui potrebbe servire il moto uniformemente accelerato. Hanno ottenuto risultati incompleti e non completamente giustificati. Dopo 50 minuti dall'inizio hanno iniziato a disegnare un grafico ma sembra (inizialmente) che sia solo un modo per verificare i risultati ottenuti a tentativi. Un alunno dice che ha sfruttato una frase del testo dove si dice di interpretare le equazioni come rette. Dopo 1 ora e 10 minuti dall'inizio stanno cercando di sfruttare il grafico per ottenere i risultati già ottenuti per tentativi, hanno difficoltà nell'interpretazione del grafico. Una alunna inizia a trovare l'intersezione fra rette. Chiedo di spiegare come possano sfruttare il grafico dopo che lo hanno disegnato bene. Disegnano le rette in maniera corretta anche se non si trovano tutti i calcoli relativi alle intersezioni. Dopo 1 ora e 45 minuti spiego come sfruttare il grafico per risolvere il problema, un alunno sintetizza quello che hanno fatto dicendo che sono partiti usando il metodo più semplice "da capire" per arrivare al metodo più semplice "da fare".

Classe 6

G6_1 (2°liceo italia) P2_Ipr_Mi : dopo pochi minuti dicono di avere terminato. Il lavoro inizia con il disegno della situazione descritta dal testo. Calcolano per ogni pompa il rapporto litri/tempo (che è stato trasformato in secondi), poi sommano le grandezze trovate ed usano il risultato per calcolare il tempo, ottenendo 326 secondi. Chiamano *portata* il rapporto l/t di ogni pompa. Chiedo di scrivere bene il procedimento e spiegare perché sommino le grandezze (portate). Dopo 10 minuti giustificano la somma con il fatto che le pompe agiscono assieme. Dopo 30 minuti chiedo perché sommino le velocità e la cosa pare a loro intuitiva. Nel riferirsi al rapporto litri/tempo alcuni alunni parlano di *peso* altri invece di *velocità.* chiedo a quale grandezza assomigli il rapporto che loro hanno calcolato fra litri e tempo e chiedo di giustificare tale somiglianza, scrivono che la portata assomiglia ad una velocità: "*Perché in entrambe si mette in relazione uno spostamento ed un tempo impiegato per compierlo*" Dopo 1 ora e 20 propongono una spiegazione della somiglianza fra portata e velocità io chiedo di giustificare l'uso della somma sfruttando questa somiglianza. Cercano poi di migliorare la spiegazione dicendo che "*La similitudine fra velocità e portata ci serve per svolgere questo problema perché sommando queste 3 portate differenti è come se sommassimo 3 forze diverse e quindi anche 3 velocità diverse per spostare un mobile utilizzate inizialmente in 3 diversi casi, ottenendo quindi 3 tempi differenti*"

G6_2 (2°liceo italia) P1_Ipr_Mi : dopo 10 minuti hanno fatto un disegno e sono arrivati ad una soluzione. Calcolano i rapporti capacità/tempo per tutti i rubinetti e poi sommano queste grandezze. Per trovare il tempo richiesto impostano e risolvono una proporzione. Chiedo di spiegare bene quello che fanno e di giustificare la somma. Giustificano la somma dicendo che i rubinetti vengono aperti contemporaneamente. Dopo 50 minuti dall'inizio dalla giustificazione che scrivono della somma delle grandezze l/t (che chiamano velocità), emerge che inizialmente hanno interpretato tali grandezze come velocità ma non erano tutti d'accordo su come interpretare la somma (una alunna dice che bisogna tenere fisso il tempo e non la distanza). Chiedo di spiegare bene quello che hanno detto e dopo 1 ora dall'inizio giustificano la somma delle grandezze (aiutandosi con un disegno) con un esempio di tre persone che vanno a velocità diverse e la distanza complessivamente percorsa che è la somma delle tre distanze (per un dato intervallo di tempo). In particolare propongono una corrispondenza fra le grandezze (portate) litri/minuti e le velocità. Dopo 1 ora e 20 minuti chiedo se la velocità di fuoriuscita dell'acqua sia costante o no, una alunna dice che non lo è perché la pressione cambia, io confermo che effettivamente non lo è e chiedo come cambia il loro procedimento, se cambia. Un alunno si chiede se la pressione ad un certo istante possa dipendere dal numero di rubinetti aperti, dico che la pressione non dipende da questo ma dall'altezza dell'acqua che sta sopra al rubinetto e ripropongo di pensare a come possa cambiare il loro ragionamento (se cambia). Propongono che le loro velocità siano velocità medie ma non fanno alcuna osservazione su come questo incida sul loro risultato.

G6_3 (2°liceo italia) P2_Dia_NM : Dopo 25 minuti dicono di avere finito. Chiedo perché chiamino le grandezze *velocità* e perché le stiano sommando. Dopo 50 minuti utilizzano la media delle velocità come velocità delle tre pompe assieme (utilizzano la formula v=s/t), hanno calcolano i rapporti litri/tempo per ogni pompa chiamando *velocità* il risultato. Tuttavia per risolvere il problema iniziano a calcolare la media di tali velocità. Successivamente trovano il tempo dividendo la capacità della vasca per tale velocità media ottenendo 16,4 minuti. Chiedo di giustificare questo nel dialogo. Dopo 1 ora dall'inizio non hanno giustificato l'uso della media delle velocità, faccio loro notare che il tempo impiegato dovrebbe essere minore di quello impiegato da una qualunque delle singole pompe (una alunna se ne accorge dopo che li spingo a osservare bene i risultati). Poco dopo capiscono che hanno sbagliato e decidono che le grandezze vanno sommate, io chiedo di giustificare la somma. Nel testo non giustificano l'uso della somma.

G6_4 (2°liceo italia) P3_Dia_NM: Dopo 15 minuti hanno iniziato a fare un grafico su di un piano cartesiano. Dopo 25 minuti hanno disegnato il grafico (che non sta tutto nel foglio)ed hanno chiaramente individuato un procedimento corretto (trovano i punti di intersezione). Chiedo di continuare il dialogo utilizzando le idee che hanno avuto. Il gruppo ha definito subito la strategia di risoluzione del problema che consiste nel metodo geometrico. Hanno trasformano le equazioni proposte in equazioni di rette (rinominando le lettere). Il grafico è fatto bene ed i calcoli pure, anche se il grafico risulta schiacciato a destra e non vengono rappresentati in maniera distinguibile tutti i punti di intersezione. Arrivano ad un risultato corretto, sfruttando senza problemi il significato del grafico in termini del problema da risolvere. (In realtà è principalmente un alunno a "dirigere i lavori del gruppo" che è particolarmente dotato anche in matematica).Dopo 1 ora e 10 minuti dall'inizio vogliono consegnare, chiedo perché abbiano pensato subito ad un grafico e dicono (un alunno) che è la prima cosa che hanno pensato. Risulta che hanno già affrontato problemi simili dove l'uso di grafici si era rivelato utile.

G6_5 (2° liceo italia) P3_Ipr_NM: dopo 15 minuti stanno provando diversi valori per stabilire quale opzione è più conveniente. Dopo 30 minuti sono passati allo studio della convenienza tramite disequazioni. Dopo 50 minuti dall'inizio dicono di avere problemi nella impostazione delle disequazioni per distanze maggiori di 50 Km, inoltre non riescono ad impostare in maniera coerente tutte le disequazioni che servirebbero. Dall'analisi del testo si vede che non riescono sempre a capire il significato dei sistemi di disequazioni che impostano ed interpretano scorrettamente i risultati. Dopo 1 ora e 30 dall'inizio sintetizzano i risultati in una maniera ridondante e non completamente coerente, chiedo di migliorare la loro sintesi

G6_6 (2°liceo italia) P1_Dia_Me: dopo 20 minuti Mi chiedono conferma su un procedimento che stanno seguendo (che pare corretto), vedo che hanno il testo di fisica e chiedo come lo stiano usando Hanno usato il libro per capire come trasformare i litri in centimetri cubi perché in questo modo arrivano ad una misura di spazio (ma non sono tutti convinti, alcuni dicono che "*in realtà è un volume*"). Dopo 30 minuti non sono convinti di quello che hanno fatto, in particolare della somma delle velocità, io chiedo di scrivere tutto quello che hanno fatto e che hanno pensato nel dialogo. Calcolano i diversi rapporti (chiamandoli velocità ed indicandoli con v), li sommano e poi trovano il tempo con t=s/v .Dopo 1 ora non sono sicuri di quello che devono scrivere ed hanno cancellato diverse cose che avevano scritto, chiedo di non cancellare quello che fanno. Il dialogo che propongono è veramente scarno e si limita a ricapitolare i calcoli svolti. Emerge che non sono sicuri della somma delle velocità e non propongono alcuna giustificazione del suo uso.

Classe 7

G7_1 (4°liceo italia) P1_Ipr_Me: dopo circa 10 minuti un alunno mi chiede, riferendosi alla frase del testo che io ho considerato come metafora esplicita ("*Si può pensare che il livello dell'acqua letto sulla scala graduata si muova verso il basso ad una certa velocità"*) se devono per forza usare il suggerimento oppure possono fare in un altro modo, io dico che possono seguire il procedimento che preferiscono. Dicono di avere finito. Hanno cominciato, senza fare disegni, calcolando con quanti litri al minuto ciascun rubinetto permette di svuotare il tino, poi sommano le quantità ottenute, infine dividono la capacità del tino per il totale ed ottengono il risultato 4,62 minuti.

Io chiedo di giustificare l'uso della somma. Nella spiegazione della somma scrivono che devono sommare perché è come se ci fosse un solo rubinetto. Dopo 20 minuti non hanno giustificato la somma ma si sono limitati a scrivere quello che hanno fatto. Dopo 40 minuti mostrano la loro spiegazione, io propongo di risolvere il problema provando a seguire il suggerimento del testo (la metafora). Dopo 1 ora dall'inizio dicono che i rapporti litri/minuto rappresenterebbero le velocità e poi userebbero la formula velocità=spazio/tempo. Successivamente scrivono una frase molto sintetica su come usare la velocità, io li spingo ad elaborare l'idea più in profondità, a pensare di dovere risolvere di nuovo il problema ma sfruttando quel suggerimento. Scrivono che considerando i litri che escono come velocità ed i litri totali che escono come la velocità totale per trovare il tempo devono dividere il volume del tino per la velocità totale. Dopo 1 ora e 40 chiedo se la portata dell'acqua durante la fuoriuscita è costante, una alunna dice di si ma un secondo alunno dice che potrebbe invece dipendere dalla pressione, confermo l'idea dell'alunno e chiedo come cambia, se cambia, la loro soluzione.

G7_2 (4°liceo italia) P2_Dia_NM : dopo 15 minuti hanno terminato. Non fanno disegni ed iniziano calcolando il rapporto fra il volume della vasca ed i tempi impiegati con ciascuna delle pompe. L'unità di misura è inizialmente scorretta (l) e la correggono solo in seguito ad una mia osservazione. Poi sommano tali rapporti ed impostano una proporzione per ricavare il tempo totale per riempire la vasca. Chiedo di giustificare la somma e spiegare che tipo di grandezza sia litri/tempo (che comunque scricono con l'unità di misura errata l, inoltre parlano di tale grandezza come di volume). Dopo 30 minuti chiedo che tipo di grandezza sia litri/minuti; la chiamano inizialmente volume e poi correggono in volume estratto in un minuto, anche se nell'unità di misura indicano solo L. La loro giustificazione della somma non è del tutto chiara, dicono infatti che : (la somma dei volumi pompati in un minuto da ciascuna pompa) *è un passaggio fondamentale perché trovando il volume totale pompato in un minuto rimane una sola incognita nella proporzione V1:T1=Vf:T2,* sembra quasi che la ragione stia in una maggiore agibilità matematica (non so fino a che punto ne fossero consapevoli ed io non sono riuscito ad approfondire).

Dopo 40 minuti dall'inizio mostrano il dialogo nel quale, in realtà, non viene data la giustificazione della somma, una alunna dice che è intuitivo e logico come 2+2 fa 4, io chiedo perché facciano proprio una somma e non altre operazioni. Dopo 1 ora e 20 minuti dall'inizio propongo di inventarsi un problema simile nel quale si tratti di velocità. Faccio notare l'errore sull'unità di misura e lo correggono. Il problema che propongono è il seguente:"*Marco e Luca partono all'istante t e Luca parte 100 m avanti rispetto a Marco e* *procede con una velocità di 10Km/h. Dopo 20 secondi Marco lo raggiunge e procedono entrambi alla velocità di Marco. In un minuto hanno percorso 40 metri. Quale è la velocità di Marco?*"

G7_3 (4°liceo italia) P1_Dia_Mi : dopo 25 minuti dicono di avere finito (non hanno fatto disegni). Chiedo di esplicitare le operazioni fatte e di spiegare l'uso della somma. Hanno calcolato per ogni rubinetto il rapporto fra il volume del tino ed il tempo impiegato, esplicitando che si tratta di litri al minuto. Sommano le grandezze e poi dividono il volume per il risultato ottenendo il tempo 4,63 minuti. Nella giustificazione della somma dicono che "*l'unica operazione possibile è la somma, in quanto sarebbe come sommare i litri che escono al minuto aprendo un rubinetto dopo l'altro.*"

Dopo 1 ora dall'inizio chiedo quale parte del testo li abbia particolarmente aiutati, dicono che è la parte dove ci sono i dati senza individuarne altre. Chiedo che tipo di grandezza sia litri/minuto, un alunno dice subito velocità, poi si blocca a pensarci ed una alunna dice di no che è un volume, propongo che ne discutano insieme e di scriverlo. Dopo 1 ora dall'inizio scrivono che la quantità litri/minuti è una velocità ma non ne sono sicuri, propongo di sfruttare questa idea per giustificare la somma.

G7_4 (4°liceo italia) P3_Ipr_NM : dopo 30 minuti dall'inizio stanno costruendo un grafico tracciando i punti per le diverse opzioni ad intervalli di 10 Km. Dopo 50 minuti dall'inizio mostrano un grafico composto da insiemi di punti che sembrano allineati (ma loro non parlano mai di rette) dove vedono che si possono dividere le distanze in fasce. Sfruttano le caratteristiche geometriche per trovare rapidamente una soluzione che è abbastanza corretta (solo un punto a 100 Km non è corretto).Hanno fissato due assi cartesiani, quello orizzontale dei Km e quello verticale dei costi (non usano x ed y), poi hanno calcolato i costi delle tre opzioni ad intervalli di 10 Km ed hanno segnano i punti di tre colori diversi. Dal grafico quindi ricavano la soluzione che inizialmente non è completamente corretta dato che individuano uno dei punti di cambiamento di convenienza a 100 Km osservando le caratteristiche del loro grafico

Chiedo di spiegare come ottengono i valori dove si ha un cambiamento di convenienza. In effetti non riconoscono esplicitamente nelle equazioni delle rette e non impostano sistemi per ottenere i punti di intersezione. Il loro ragionamento è tutto grafico, per questo si sbagliano con il punto a 100 Km, perché il loro grafico suggeriva una intersezione in realtà inesistente. Dopo 1 ora e 10 minuti dall'inizio da quello che hanno scritto si vede che i valori di intersezione (che comunque *non chiamano intersezioni*) sono stati trovati a tentativi, non hanno imposto alcun sistema anche perché non sono convinti che i grafici siano rette. Un alunno dice che sembrano o dovrebbero essere rette (dopo la mia domanda su cosa rappresentassero quegli insiemi di punti). Hanno comunque sfruttato le proprietà geometriche per trovare la soluzione del problema. Dopo 1 ora e 30 minuti dall'inizio chiedo come si faccia a capire se sono o meno delle rette e dicono di non saperlo. Chiedo quale è l'equazione della retta e propongono alcune espressioni (anche di secondo grado) ma non sono convinti di nessuna. A questo punto ricordo loro l'equazione y=m*x+q e li spingo a vedere come sfruttare questa equazione nel problema. Riconoscono la corrispondenza fra il costo e la y, la distanza e la x e gli altri due parametri, quindi chiedo come si possano trovare i punti di intersezione con queste equazioni e rispondono che le equazioni vanno messe a sistema.

G7_5 (4°liceo italia) P3_Dia_Mi : dopo 20 minuti chiedono se può andare bene usare una tabella nella quale stanno organizzando i dati in fasce chilometriche. Dico di continuare e di scrivere tutto quello che fanno sui fogli consegnati, visto che stanno usando anche altri fogli. Dopo 40 minuti mostrano una tabella nella quale hanno organizzato i dati in fasce chilometriche con intervalli di 50 Km e per ogni fascia calcolano il costo di ciascuna opzione e scrivono quale opzione è più conveniente. Io chiedo come possano essere sicure che i valori per i quali cambia la convenienza siano proprio quelli indicati e faccio un esempio usando la loro tabella. Il problema è che in ciascuna fascia dovrebbero stabilire in quali punti calcolare il costo visto che la convenienza può cambiare (come mostro loro con un esempio). Osservano che per arrivare alla soluzione esatta dovrebbero *calcolare tutti i valori.* Dopo 1 ora chiedono aiuto perché non sanno come proseguire, io chiedo che tipo di equazione sia y=0,25*x+20, non sanno cosa rispondere allora faccio scrivere l'equazione y=m*x+q una alunna dice subito che è "*tipo una retta*", e propongono di fare un grafico. Dopo 1 ora e 20 minuti mi mostrano il grafico nel quale non hanno rappresentato correttamente l'opzione C, aggiungendo 25 euro, dopo che spiego come va interpretata rifanno i calcoli. Questo errore è visibile anche nel grafico, nel quale inizialmente rappresentano l'opzione C come una retta, e, dopo la mia osservazione, capiscono che è una retta spezzata. Chiedo di spiegare bene come costruiscono il grafico. In seguito alle mie osservazioni, propongono un grafico dove, almeno qualitativamente, le rette sono rappresentate abbastanza bene anche se non riescono a sfruttare il grafico per trovare la soluzione del problema e sono presenti errori nelle intersezioni e non si trovano i calcoli che hanno permesso di costruirle. Verso la fine della sessione spiego il metodo geometrico basato sulle rette al gruppo.

G7_6 (4°liceo italia) P2_Ipr_NM: dopo 15 minuti dicono di avere finito. Calcolano la quantità di acqua spostata in un minuto, sommano le quantità trovate ed infine dividono la capacità per la quantità trovata ottenendo un tempo di 5,45 minuti. Chiedo di giustificare la somma. Dopo 20 minuti dall'inizio provano a giustificare la somma facendo appello alla forza delle pompe che si sommerebbe (quindi proponendo una metafora). Nella spiegazione della operazione di somma dicono che con la somma riescono a trovare la *gittata* (ma prima scrivono e poi cancellano il termine *forza*) di una pompa equivalente alle tre pompe date. La somma è giustificata dal fatto che le pompe agiscono contemporaneamente. Io chiedo che tipo di grandezza sia litri/minuti, prima dicono che è uno spostamento, poi una alunna parla di volume diviso tempo ed un altro alunno dice che è una velocità. Chiedo agli alunni di pensare assieme a come rispondere alle due domande (giustificazione della somma e tipo di grandezza). Dopo 40 minuti dall'inizio, parlano di gittata riferendosi alla capacità della pompa di spostare acqua (si riferiscono alle nozioni apprese in scienze dove il professore ha parlato di gittata relativamente al cuore, quindi pare che propongano un'altra metafora). Poi spiegano cosa intendono per gittata: quantità di acqua portata in un minuto e ribadiscono il fatto che la somma deriva dal fatto che le pompe agiscono contemporaneamente. Dico che in fisica si parla di portata. Dicono che il rapporto litri/minuti non è una velocità perché non è spazio/tempo ma volume/tempo. Chiedo di spiegare il fatto che queste portate vengono sommate. Dopo 1 ora dall'inizio spiegano che va fatta una somma perché le pompe agiscono contemporaneamente (un alunno dice anche che i lavori delle pompe si sommano). Poco dopo chiedo di pensare ad un problema che somigli a quello dato ma nel quale le grandezze litri/minuto diventino delle velocità. Successivamente propongono un primo problema (che tuttavia non li soddisfa) dove ci sono tre persone che devono percorrere uno stesso tragitto e lo fanno in tre tempi diversi. Ciò che non li convince è che le persone dovrebbero "*fondersi*" per poter tradurre il problema del testo e la velocità non sarebbe la stessa. Dico di scrivere bene quello che hanno pensato (visto che non è del tutto chiaro) e di continuare a pensare anche ad altri problemi. Come problema simile a quello dato propongono il seguente: "*Arturo, Claudio e Andrea stanno facendo una corsa sulla stessa strada rettilinea e partendo ciascuno dalla propria casa. Andrea, il più lento, mantiene per l'intera durata della corsa una velocità di 10Km/h, Claudio mantiene la velocità di 20Km/h, Arturo, il più veloce, mantiene i 40Km/h. Sapendo che la corsa è durata 3 ore ed arrivano contemporaneamente, quanto distano le loro case dall'arrivo?*"

Classe 8

G8_1 (4° itis italia) P2_Ipr_Me: dopo 10 minuti iniziano facendo un disegno che rappresenta la situazione del problema. Iniziano a calcolare quanto tempo ci mette ogni pompa per versare un litro ma non riescono poi a procedere perché (dice un alunno) "non possiamo sommare i tempi". Dopo 30 minuti dicono che stanno procedendo per tentativi, trovano che in 5 minuti ogni pompa versa un certo numero di litri, sommano questi litri ottenendo un numero minore di 50 (hanno detto che hanno provato fino ad arrivare al numero che si avvicinava di più a 50): nel testo fanno un disegno che rappresenta la vasca, poi calcolano i minuti che ciascuna pompa impiega per versare 1 litro tramite proporzioni del tipo 300:20=1:x. Successivamente provano quanti litri vengono versati dalle tre pompe contemporaneamente per 7 minuti, 6 minuti e 5 minuti, vedono che l'unico caso in cui la somma è minore a 300 (vicina a 300) è col tempo di 5 minuti. Dopo 45 minuti (dall'inizio) arrivano ad impostare una proporzione, capiscono che sapendo quanti litri vengono versati in 5 minuti (il valore che hanno determinato in precedenza), tramite una proporzione possono ricavare il tempo esatto: seguono diversi tentativi fino quando impostano la proporzione 5 (minuti): 275 (i litri versati in 5 minuti)=x:300 che li porta al valore di 5,45 minuti. (Non si accorgono che potevano utilizzare questa proporzione con il numero di litri versati in 1 minuto). Dopo 1 ora dall'inizio chiedo di pensare al volume come ad una distanza. Faccio il disegno di un segmento orizzontale che rappresenta la quantità di acqua nella vasca. Se il volume è rappresentato da una distanza cosa potrebbero essere le pompe? Un alunno dice che potrebbero essere delle macchine, chiedo di inventarsi un problema simile a quello dato partendo da questa idea. Qualche minuto dopo hanno pensato a tre tartarughe che percorrono una distanza in tre tempi diversi ma dicono che c'è un problema perché quando la più veloce arriva le altre sono ancora indietro e quindi non "*sono assieme*" . Aggiungono che nel caso delle pompe le quantità di acqua si potevano sommare invece nel caso delle tartarughe si dovrebbe cambiare qualcosa nel problema..ad esempio trovare la somma complessiva della distanza percorsa. Dopo 1 ora e 40 minuti chiedo di pensare ad un problema simile nel quale una grandezza va sommata, e cosa andrebbe sommato? Un alunno dice che forse si potrebbero sommare le velocità, propongo di modificare il problema pensando ad una quarta tartaruga che viaggia con una velocità pari alla somma delle velocità delle altre tre. Quanto tempo impiegherebbe? Propongono poi un problema simile a quello dato nel quale tre tartarughe percorrono una distanza di 300 metri rispettivamente in 10, 20, 30 minuti dicendo che il problema sarebbe simile al precedente se la domanda fosse trovare quanto tempo impiegano le tre tartarughe a coprire una distanza complessiva (la somma delle tre distanze percorse) di 300 metri.

G8_2 (4°itis) P1_Ipr_Mi : dopo 15 minuti dicono di avere finito. Hanno calcolato per ogni rubinetto quanti litri al minuto vengono svuotati, sommano (10,8 l/min) e poi dividono la capacità del tino per la il risultato ed ottengono 4,62 minuti. Chiedo di spiegare bene l'uso della somma, perché sommano le grandezze. Dopo 40 minuti dall'inizio non hanno spiegato il motivo della somma, chiedo perché facciano proprio una somma. Come giustificazione all'operazione di somma delle portate dicono che vanno sommate perché l'acqua esce contemporaneamente. Dopo 1 ora chiedo che tipo di grandezza sia litri/minuti e dicono che somiglia a metri /secondo. Chiedo se la velocità di uscita dell'acqua è costante o no e dicono che è costante. Allora descrivo la situazione del problema definendo con le mani un ideale tino cilindrico e descrivendo con le mani il livello dell'acqua che scende. Un alunno capisce che la velocità non sarà costante ma dipenderà dalla pressione e quindi da quanta acqua è presente nel tino, quindi chiedo di pensare a come cambia (se cambia) la soluzione che loro hanno proposto. In seguito alla mia osservazione sulla velocità non costante di svuotamento scrivono che il tempo calcolato è giusto se la velocità è costante, ma in realtà per calcolare il valore esatto avrebbero bisogno di altri dati come : altezza del tino, diametro, peso specifico del liquido.

G8_3 (4° itis italia) P3_Dia_Me: dopo 15 minuti stanno procedendo per tentativi e senza disegni. Dopo 45 minuti stanno ancora procedendo per tentativi ed ancora senza grafici o disegni. Non fanno alcun disegno o grafico e provano a calcolare il costo per alcuni valori della distanza percorsa in chilometri: 100, 105, 112, 120. Poi scrivono alcune prime conclusioni parziali (sopra 120 Km conviene la B, fino a 20 Km conviene la A) poi tentano altri valori per capire cosa succede nei valori intermedi (80, 86, 87 Km) arrivando a concludere che partendo da poco più di 86 Km conviene la B rispetto la C. In ogni caso non ottengono risultati completi e coerenti. Dopo 1 ora e 10 minuti dall'inizio chiedo se avevano notato la frase relativa all'interpretazione delle equazioni come rette (la metafora esplicita), dicono di non averla notata ed io propongo di provare a sfruttarla, venti minuti dopo (quando ormai era finito il tempo a disposizione) hanno disegnato un grafico e dicono di avere capito come fare e un alunno mi descrive la strategia: disegnare le rette, vedere la loro posizione (quelle più in alto sono le meno convenienti), e trovare le intersezioni ..ma non hanno più tempo per farlo effettivamente.

G8_4 (4°itis italia) P1_Ipr_NM: dopo 15 minuti stanno calcolando la velocità ma poi utilizzano un metodo differente, non sommano le velocità ma considerano quanti litri svuotano singolarmente i rubinetti per arrivare a 50, quindi procedono per tentativi. Hanno iniziato calcolando il rapporto capacità/tempo per ognuno dei rubinetti , sommano il risultato trovando che in un minuto escono 10,8 litri da tutti i rubinetti assieme. Quindi dicono che in 4 minuti escono 43,2 litri e restano nel tino 6,8 litri. Chiedono se può andare. Dico di procedere spiegando bene quello che fanno. Dopo 30 minuti mi chiedono se va bene il procedimento che stanno usando, nel calcolo che fanno sono sbagliate le unità di misura, faccio notare l'errore e chiedo di chiarirsi il senso di quello che stanno facendo (dai calcoli infatti ho l'impressione che non abbiano chiaro quello che hanno fatto). Dopo 50 minuti dall'inizio hanno alcuni dubbi su come procedere con i 6,8 litri che devono essere svuotati "contemporaneamente" (hanno tolto ai 50 litri iniziali quelli che le pompe versano in 5 minuti).Un alunno fa un disegno schematico e si capisce che non sa come mettere insieme i diversi dati relativi ai singoli rubinetti. Il problema risiede nel fatto che hanno cominciato con un tipo di ragionamento che non riescono più ad applicare per i litri che mancano perché nel primo caso hanno considerato come dato di partenza il tempo e si sono ricavati per i litri versati per ogni rubinetto senza pensare al numero di litri per unità di tempo, quindi ora sono in difficoltà. Hanno tentato alcune vie che tuttavia cancellano (in maniera che fossero comunque ancora leggibili come avevo richiesto): il primo tentativo è quello di trovare il rapporto 6,8/portata per ciascuno dei rubinetti, ottenendo (anche se sbagliano inizialmente l'unità di misura) il tempo che ciascun rubinetto impiega per versare i litri rimanenti..poi si fermano visto che non sanno come usare i tre tempi ottenuti. Tentano poi un altro calcolo nel quale i tempi vengono trasformati in secondi ed impostate alcune proporzioni del tipo: 50 (litri): 600 (secondi)= x:1,36 (tempo che impiegherebbe il rubinetto a versare 6,8 litri)..ma anche qua non sanno come procedere e cancellano i calcoli.

Poco dopo dicono di avere capito come fare. Calcolano le portate in secondi (quanti litri vengono versati da ogni rubinetto in un secondo, dove un calcolo tuttavia è sbagliato visto che mettono 60 invece che 600) poi sommano ottenendo 0,93048 l/s (che lasciano scritto in questo modo) , dividono poi i litri restanti 6,8 per tale valore ed ottengono 7,3 secondi, sommano questo valore ai 4 minuti iniziali e concludono che il tempo impiegato sarà di 4 minuti e 7 secondi (scrivono anche i decimali ma in maniera diversa..non ho indagato sul motivo).In sostanza superano il problema precedente riducendo l'unità di misura ma utilizzando anche la divisione , non si accorgono tuttavia che potevano fare questo sin dal principio. Chiedo di scrivere bene quello che hanno fatto. Dopo 1 ora e 20 minuti dall'inizio chiedo se la velocità dell'acqua è costante o cambia durante lo svuotamento, un alunno dice che la velocità dipende dalla sezione dei rubinetti. Allora chiedo se, fissato il rubinetto, la velocità dell'acqua durante lo svuotamento cambia oppure no. Capiscono che deve dipendere dalla pressione ed un alunno dice che il risultato cambia perché gli ultimi 6,8 litri (riferendosi al loro procedimento) escono con una velocità minore. Un alunno comincia a pensare a come calcolare la pressione in fondo al tino. Dico di scrivere bene quello che pensano e che fanno.

G8_5 (4° itis italia) P2_Dia_Me: dopo 20 minuti non sanno ancora come procedere. Un alunno propone di fare la media dei tempi ma un altro non è d'accordo. Poco dopo un alunno chiede se può andare bene una velocità di 4 m/s, io chiedo come abbiano trovato quel valore. Non sanno spiegarlo bene ma l'alunno che ha proposto tale valore dice che hanno trovato la media dei tempi, trasformata in secondi e poi diviso il risultato per la capacità della vasca. Un alunno dice che dovrebbero sapere la quantità complessiva di acqua che viene portata dalle pompe. Dico che stiamo supponendo che la vasca sia vuota e che venga riempita, quindi la quantità di acqua è proprio 300 litri. Chiedo perché abbiano usato l'unità di misura metri/secondi e stiano usando il termine *velocità.* Riflettono ma non sanno darmi una risposta. Dopo 30 minuti sono ancora fermi e non sanno come procedere. Anche dopo 45 minuti dall'inizio non sanno ancora come procedere, propongo di considerare la frase del testo (quella che considero come metafora) (*M:mi pare che sia come se ci fosse una certa distanza da percorrere…*

G: come?

M: si…se si usa una pompa più veloce l'acqua sale più velocemente e raggiunge prima il bordo della vasca, come se ci fosse una distanza da percorrere ad una certa velocità…

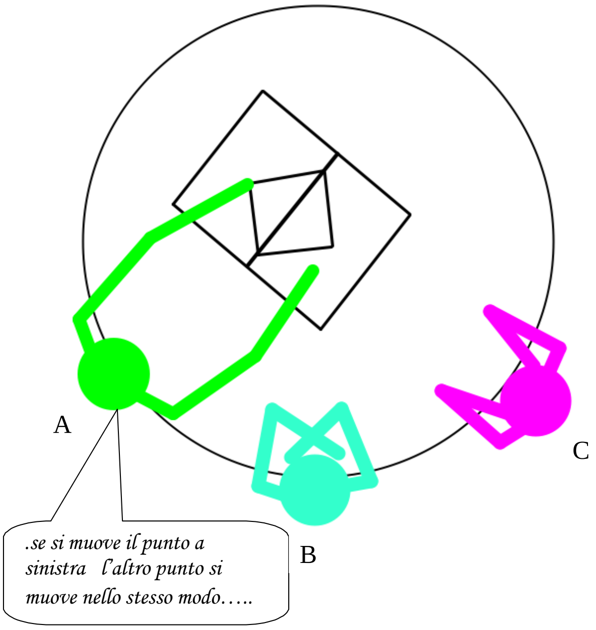
) relativa alla distanza ed alla velocità, propongo inoltre di fare un disegno. Dopo 1 ora dall'inizio non hanno ancora capito come fare. Faccio un grafico (un segmento orizzontale) proponendo di pensare al segmento come rappresentazione della quantità di acqua nella vasca, e quindi all'estremo di sinistra sarà associata la vasca vuota, a quello di destra la vasca piena con 300 litri. Chiedo cosa possano essere le pompe in tale rappresentazione e chiedo di inventare un problema seguendo questa idea. Dopo 1 ora e 30 dall'inizio non stanno riuscendo a sfruttare l'idea che ho proposto. Propongo una trasformazione del problema nella quale una distanza di 300 Km viene percorsa da 3 macchine in tre tempi diversi. Quanto tempo impiegherà una quarta macchina che viaggia ad una velocità pari alla somma delle velocità delle altre? Un alunno dice che si devono usare le formule inverse. Propongono di sommare i tempi, per avere il tempo complessivo, io faccio notare che allora la macchina sarebbe più lenta, ed è la velocità che va sommata. Quando il tempo a disposizione è quasi terminato, vedendo che non sono ancora riusciti, spiego come poter risolvere il problema partendo dal problema analogo (ovvero faccio vedere come il metodo usato in uno possa essere usato anche nell'altro). Un alunno dice di avere capito e velocemente calcola il risultato del problema posto, che scrive a matita sul foglio.

G8_6 (4°itis italia) P3_Dia_Mi : dopo 20 minuti stanno ancora analizzando i dati. Si chiariscono (con me) che l'obiettivo è trovare l'opzione migliore in generale, indipendentemente dal numero specifico di chilometri. Dopo 40 minuti stanno procedendo per tentativi ed hanno provato con i valori di 80, 100, 150 che hanno scelto guardando i numeri delle equazioni ed i calcoli che facevano ma non sono molto convinti. Nei fogli hanno cominciato a lavorare riscrivendo le diverse opzioni in una forma diversa, più verbale. Poi provano a calcolare i costi per alcuni valori della distanza (100, 150 Km) ma non arrivano ad alcuna conclusione definitiva e completa Dopo 1 ora sono ancora fermi ai tentativi (senza fare grafici). Poco dopo chiedo che cosa sia l'equazione $y=0,25x+20$, un ragazzo dice che è una proporzione mentre un altro dice che è una retta (prima dice che è qualcosa che si rappresenta sul piano cartesiano e poco dopo dice che è una retta), quindi propongo che le rappresentino graficamente. Dopo 1 ora e 20 minuti stanno rappresentando le rette in modo errato (pare che confondano l'asse x con l'asse y), anche se hanno calcolato correttamente le coordinate di alcuni punti , faccio notare l'errore e chiedo di rifare il grafico. E' presente una discussione sulla continuità della terza opzione nel punto a 50 Km con uso dei limiti destro e sinistro (che hanno già affrontato in matematica).

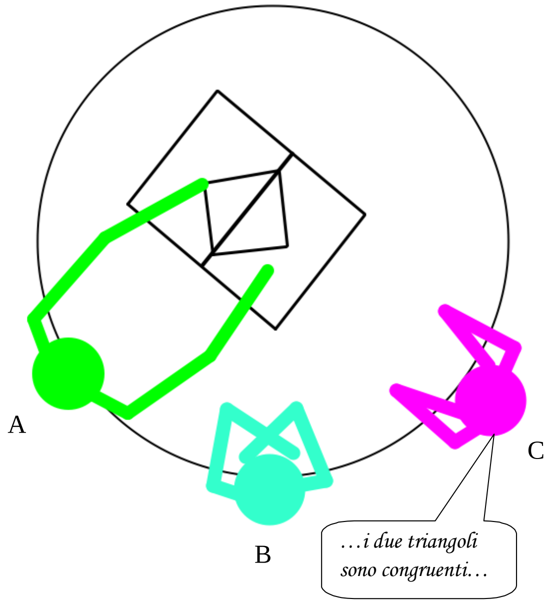
Allegato4_PrimoTestoSecondaSpe

Nelle tre vignette che seguono si vedono dall'alto tre studenti che stanno iniziando a studiare una macchina come quella che è stata consegnata anche a voi.

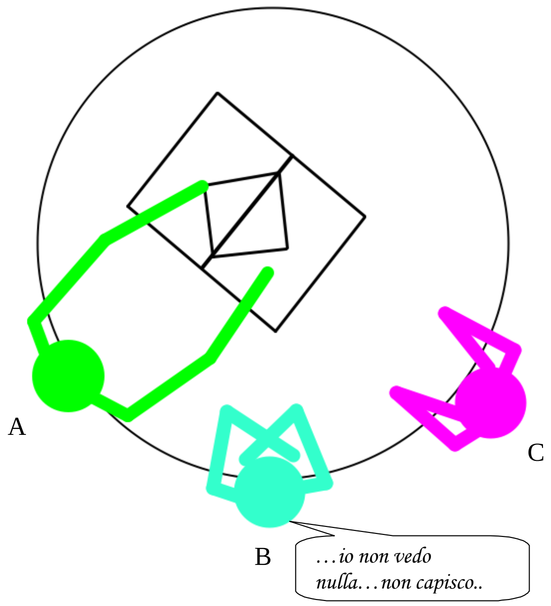
Alberto sta esplorando il funzionamento della macchina mentre Chiara e Bruno osservano….



..poi Chiara fa una osservazione…



… anche Bruno dice qualcosa..

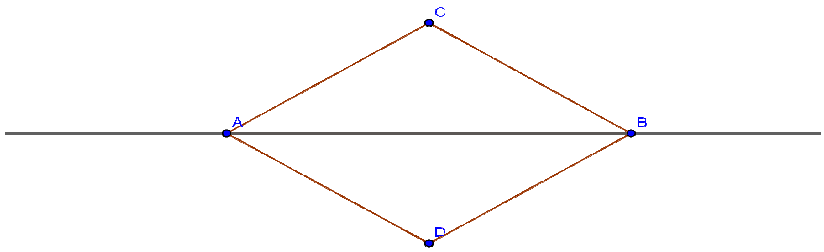


Secondo voi perché ciascuno degli studenti dice quello che è scritto nel fumetto?

Per capire quello che fa la macchina pensate che sia più utile l'osservazione di Alberto o quella di Chiara o sono entrambe utili? Perché?

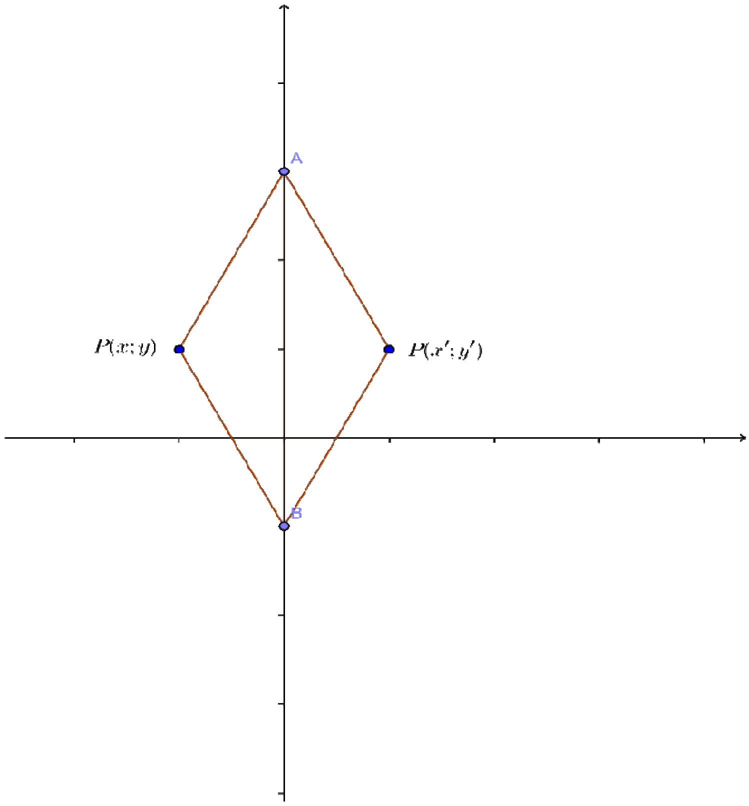
Nel dialogo che segue Alberto, Bruno e Chiara discutono sul migliore modo di analizzare la macchina e propongono alcune idee:

Chiara: "..*possiamo rappresentare la macchina in questo modo….*



si vede che i due triangoli sono congruenti dato che hanno un lato in comune e gli altri uguali..e quindi anche le loro altezze saranno uguali…quindi…."

Alberto: *"..ma non basta dimostrare che sono uguali le altezze....poi come prosegui? Secondo me è meglio utilizzare un sistema di riferimento cartesiano..poi scriviamo le coordinate di uno dei tracciatori in funzione delle coordinate dell'altro…così…*



la x è opposta e la y è la stessa, quindi direi che si può scrivere $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$ "

..

Bruno:" *non ho capito…che significano quelle equazioni?"*

Chiara: *"…ti dicono come cambiano le coordinate dei due punti P e P'…ad esempio se hai P(-2;3) allora P' avrà coordinate (2;3)….il problema è che anche tu, caro Alberto, stai dando per scontate alcune cose..come arrivi a quelle equazioni? Come le giustifichi?."*

.

Bruno: *"..ma non si poteva anche scrivere* $\begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases}$ **?"**

Voi cosa ne pensate? Quale metodo si può usare per dimostrare ciò che la macchina fa? Riuscite a dimostrarlo?

Allegato5_SecondoTestoSecondaSpe

1-Descrivete come è fatta la macchina che vi è stata consegnata

2-Spiegate cosa fa, secondo voi, la macchina

3**-** Pensando alla macchina studiata negli incontri precedenti, provate a pensare a quali idee siano utili anche per l'analisi della macchina che vi è stata consegnata oggi.

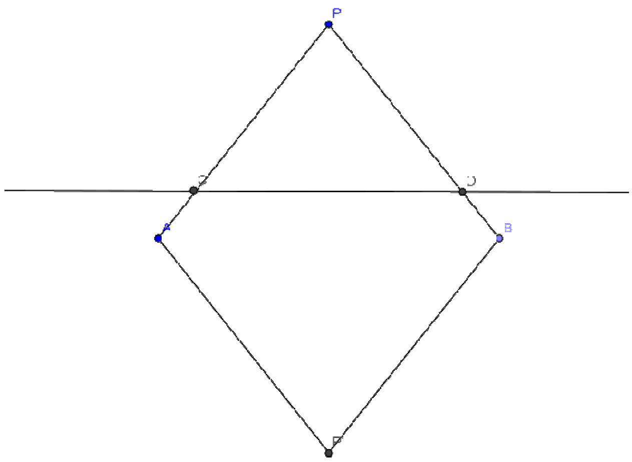
4- Provate a dimostrare matematicamente quello che fa la macchina.

Di seguito viene rappresentata in quattro modi diversi la macchina che vi è stata consegnata. In tutti i casi i tracciatori sono rappresentati con i punti P e P'.

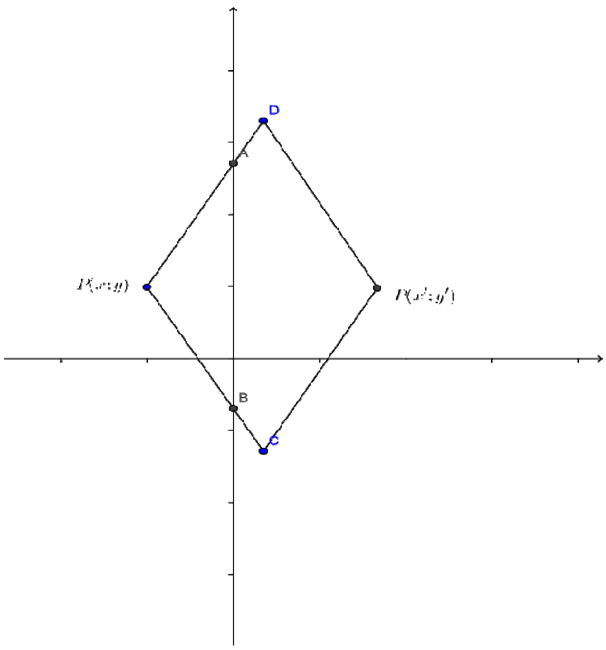
5-Quale è il modo migliore di rappresentarla fra quelli proposti nella pagina seguente? Perché?

6- Per quanto riguarda la dimostrazione di ciò che la macchina fa, spiegate quale fra le particolari rappresentazioni proposte nella tabella può essere più utile.

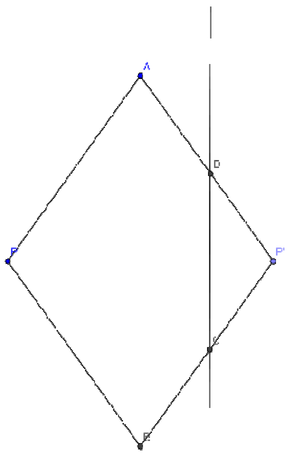
A



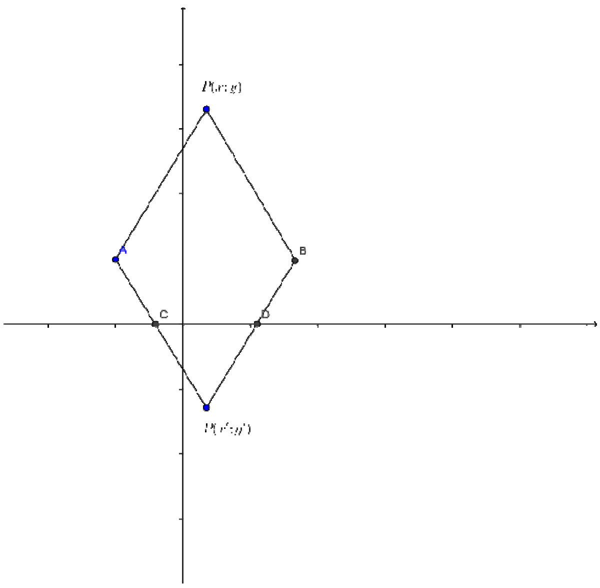
B



C



D



Allegato6_ ProtocRomboArtParte1

Protocollo del gruppo filmato

Prima sessione: rombo articolato

Prima giornata: prima parte

Introduzione al lavoro

Anche a questo gruppo viene introdotta brevemente la macchina e consegnati i materiali. Lo sperimentatore fissa la video camera ad una lato del tavolo sul treppiede e posiziona sul tavolo il registratore vocale. Durante il filmato lo sperimentatore non è intervenuto nella loro discussione se non per consegnare alcuni materiali e per un chiarimento su una domanda del secondo testo che avevano frainteso (o forse la domanda era ambigua). Gli altri tre gruppi hanno continuato il lavoro in aula con la presenza dell'insegnante di italiano, alla quale è stato detto di spingere gli studenti a scrivere quello che veniva discusso nel gruppo ma senza intervenire sui contenuti. Il protocollo che segue è tratto dai filmati (Prima parte: PrimoFilmato.mpg), trascrivendo i dialoghi (in certi casi non è stato possibile) e scegliendo immagini degli episodi più significativi.

Protocolli tratti dal filmato

Dopo la consegna della macchina e del testo gli studenti iniziano a leggere il testo e a muovere la macchina. (T=0:10)

Cominciano a chiedersi chi siano i diversi personaggi della vignetta ed attribuiscono velocemente le identità leggendo il testo.

Leggono e provano a muovere la macchine in diverse modalità.

Leggono la domanda finale e poi spostano la macchina in modo da poterla studiare meglio

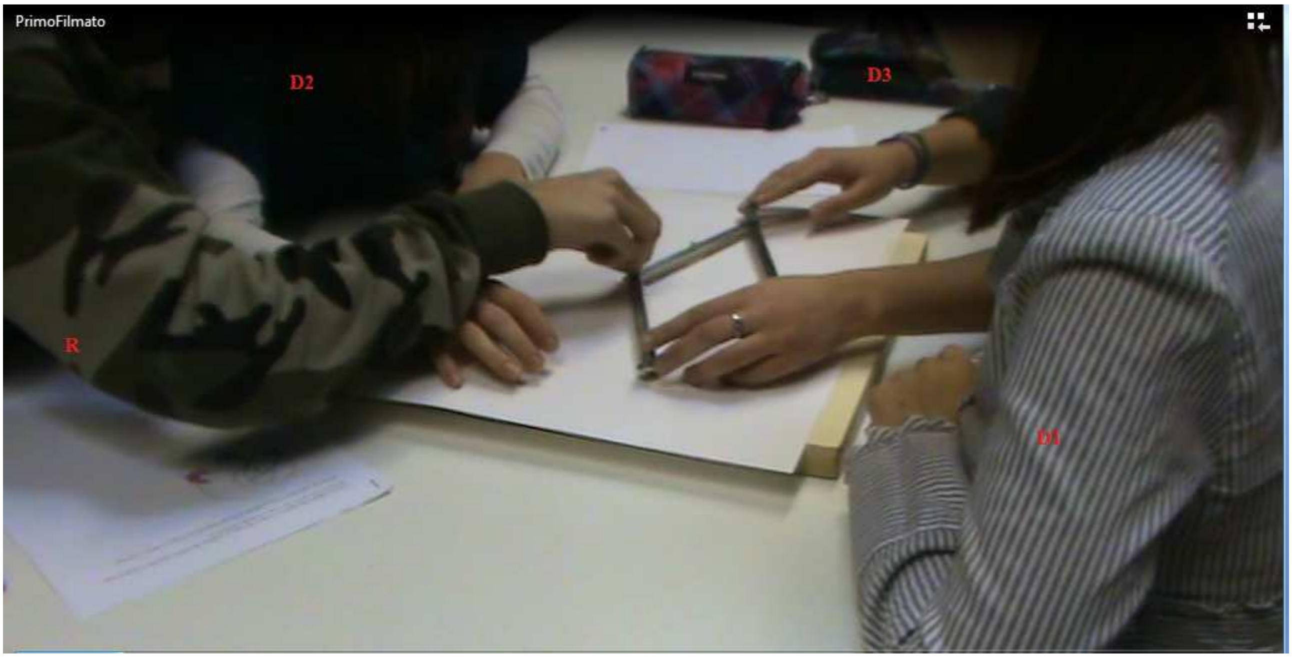
(T=1:14)

La ragazza D2 muove la macchina che si trova davanti a se con la scanalatura complanare al proprio asse corporeo, utilizzando entrambe le mani su i due tracciatori (T=1:47)

R e la ragazza D3 muovono la macchina tenendo solo uno dei perni vincolati

Poi, mentre provano a giustificare le frasi del testo, D3 muove la macchina allo stesso modo di Alberto, prende il tracciatore destro con la mano destra e lo sposta. (T=2:09)

Figura 1: Disposizione fino a questo momento



R si chiede quali siano i triangoli congruenti e poi li indica chiedendo conferma alle compagne

(T=2:27)

D3 dispone le asticelle in modo da formare un quadrato come nel testo e poi, indicando con le mani, dice che i due triangoli sono congruenti.

D3 ed R muovono la macchina in diversi modi, sia usando un solo tracciatore (R) che usando un solo perno vincolato (D3) e dicono:

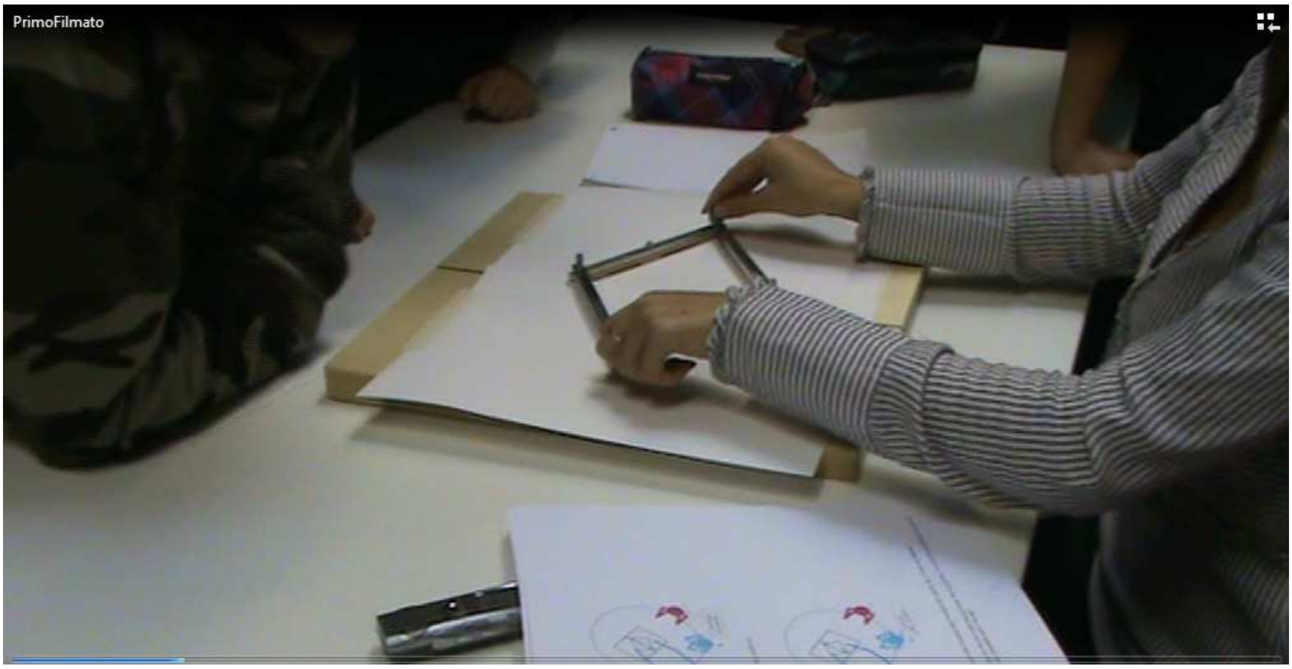
"*…si sono congruenti..*" (T=2:43)

Proseguono con la lettura del testo e D1 si chiede se quello che dicono i personaggi non possa dipendere dalla loro posizione, qualcuna dice di no ma poi propongono di disporsi esattamente come mostrato dal disegno. (T=3:18)

Si assegnano dei ruoli e si ridispongono in modo da essere posto, rispetto alla macchina, come i tre personaggi.

D1 dice " *io sono Alberto*" e D3 "*io sono Bruno*" .D1 muove le asticelle della macchina tenendo un tracciatore con ciascuna mano. (T=3:31)

Figura 2: Nuova disposizione



Ognuno dei componenti prova a dire quello che vede. (non si sente bene)

Riprendono poi il testo e rileggono (T=3:41)

Mentre leggono provano anche a muovere la macchina, R dice che i tracciatori

" *si muovono in maniera opposta*" (T=4:06)

Poi riprovano a muovere le parti della macchina nel modo descritto dal testo. (T=4:09)

Inseriscono le mine nei due tracciatori ed iniziano a muovere la macchina. D3 muove la macchina tenendo il tracciatore sinistro (che è ancora senza mina) ed osservando quello destro (con la mina)

(T=5:26)

Poi inseriscono anche la seconda mina e continuano a muovere la macchina usando gli stessi tracciatori (uno solo) ed anche una delle asticelle. (T=6:08)

R rilegge il testo e commenta con D1 le immagini. Nel frattempo D3 cancella alcune delle linee tracciate e D2 la aiuta.

R capisce la disposizione dei personaggi del disegno e gli altri componenti si meravigliano che non lo avesse ancora capito. (T=7:03)

D1 legge la frase del testo "*Se si muove il punto sinistro…*", D2, di fronte a lei, tiene i due tracciatori e li muove in modo da lasciare una traccia sul foglio. (T=7:24)

Poi D2 e D3 muovono la macchina in diversi modi osservando quello che succede, D3 tiene entrambi i tracciatori con le due mani. (T=7:51)

D2 (o D3?) dice "*Lei dice che i triangoli sono congruenti..*" (T=8:08)

D: "*Ma sono congruenti?*"

D: "*..si sono congruenti*."

D1 pone la questione se è vero o solo se si muove solo un tracciatore (verificare perché non si sente bene) (T=8:17)

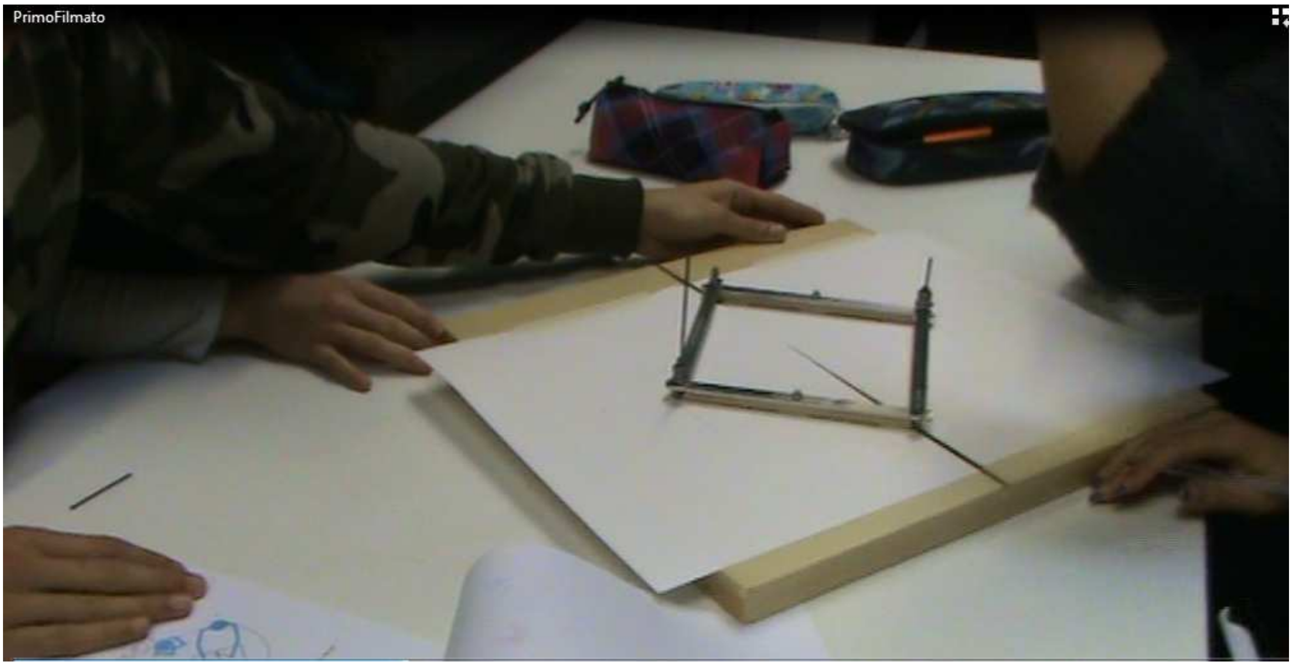
D1 muove uno dei tracciatori e dice "*si si muove tutto il pezzo*"

Continuano a leggere e muovere la macchina

D3:"*..io non vedo nulla, non capisco nulla*"

R Prova a ruotare la macchina in modo da vederla come la vede Bruno (T=8:41)

Figura 3: Ruotano la macchina

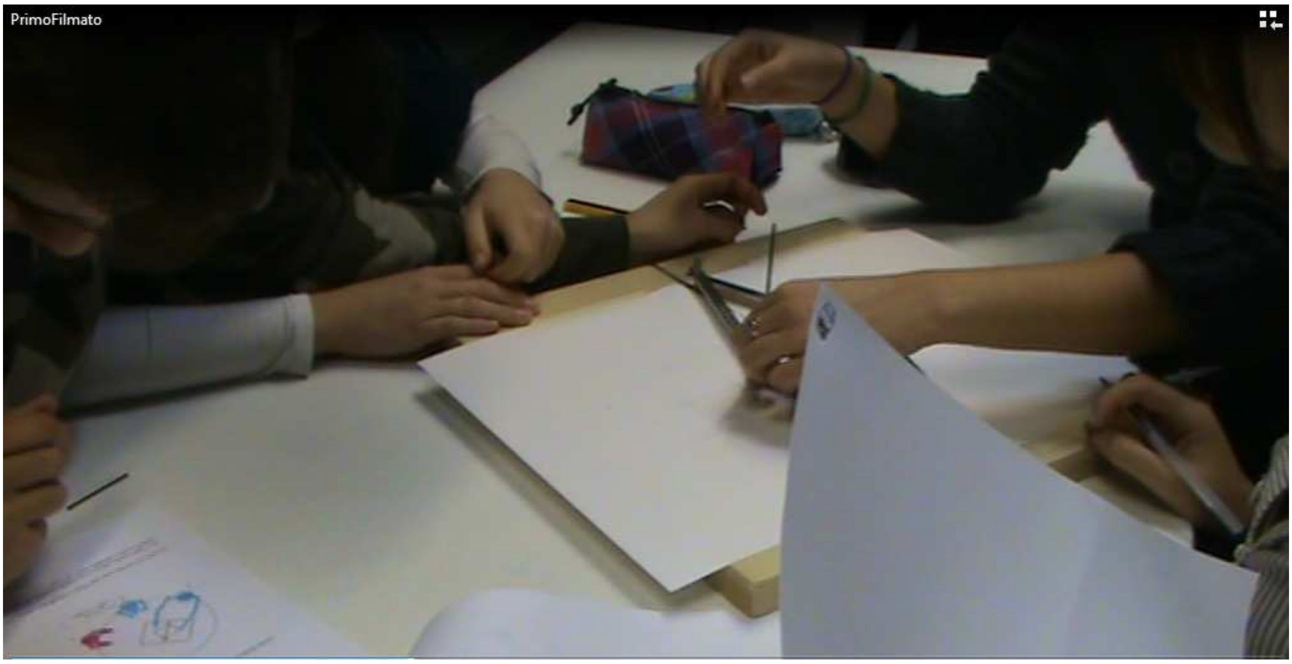


D2 muove le asticelle della macchina utilizzando uno dei perni vincolati

D3 muove la macchina sia utilizzando entrambi i tracciatori che usando il tracciatore più lontano, in modo da comportarsi come Alberto e dice " *se io sposto questo si sposta anche l'altro.*."

(T=8:57)

Figura 4: D3 simula facendo e dicendo quello che fa Alberto



D3 dice, muovendo uno dei tracciatori..”*se io muovo questo si muove anche l’altro*..” ..”*ma anche gli altri perché è tutto collegato*” (T=9:06)

Iniziano a chiedersi, seguendo la domanda del testo, quale osservazione sia più utile per capire quello che fa la macchina. (T=10:01)

Anche D2 muove la macchina prima tenendo il solo tracciatore sinistro (come Alberto) poi tenendoli entrambi

Decidono, ed iniziano a scrivere , che è più utile l’affermazione di Alberto. D3 dice “ *scrivi..per capire come funziona la macchina è più utile l’affermazione dei Alberto*”, D1 inizia a scrivere la risposta

(T=10:18)

R dice (leggendo la domanda)“..*perché?*” (T=10:50)

Nel frattempo D3 muove ancora la macchina tenendo il tracciatore più lontano (come faceva prima)

Anche D2 muove la macchina sia usando il perno vincolato che muovendo i due tracciatori con entrambe le mani. Cercano di chiarirsi perché sia migliore l’affermazione di Alberto.

(T=11:28)

D3 dice :“*perché esplica in maniera migliore*”..

R : “..*non migliore..direi più intuitivo*” (T=11:48)

R : “..*perché sicuramente è intuitivo anche il fatto che i due triangoli sono congruenti..ma questo è più intuitivo.*”

D1 chiede toccando i due tracciatori “ *sapere che questi due triangoli sono congruenti non ci serve a capire il funzionamento della macchina?*” (T=12:26)

R: “*anche ma*..”

D1: “..*io avrei detto che sono utili tutti e due*”

R:”..*ecco..esatto..anche io lo avrei detto*” (T=12:33)

Sono dell’idea che siano comunque utili entrambe le affermazioni, poi R dice, muovendo la macchina tramite un suo tracciatore, che “*se uno non sa cosa vuol dire congruenti, comunque questo lo capisce..*” (T=12:43)

D2 dice qualcosa (non si capisce)

R: aggiunge che “*comunque non serve nessun tipo di competenza per capire questa cosa qua* ” e muove ancora la macchina tramite il tracciatore a lui prossimo

D1 sembra convinta e dice “..*si*” (T=13:13)

Continuano a scrivere la risposta (D1)

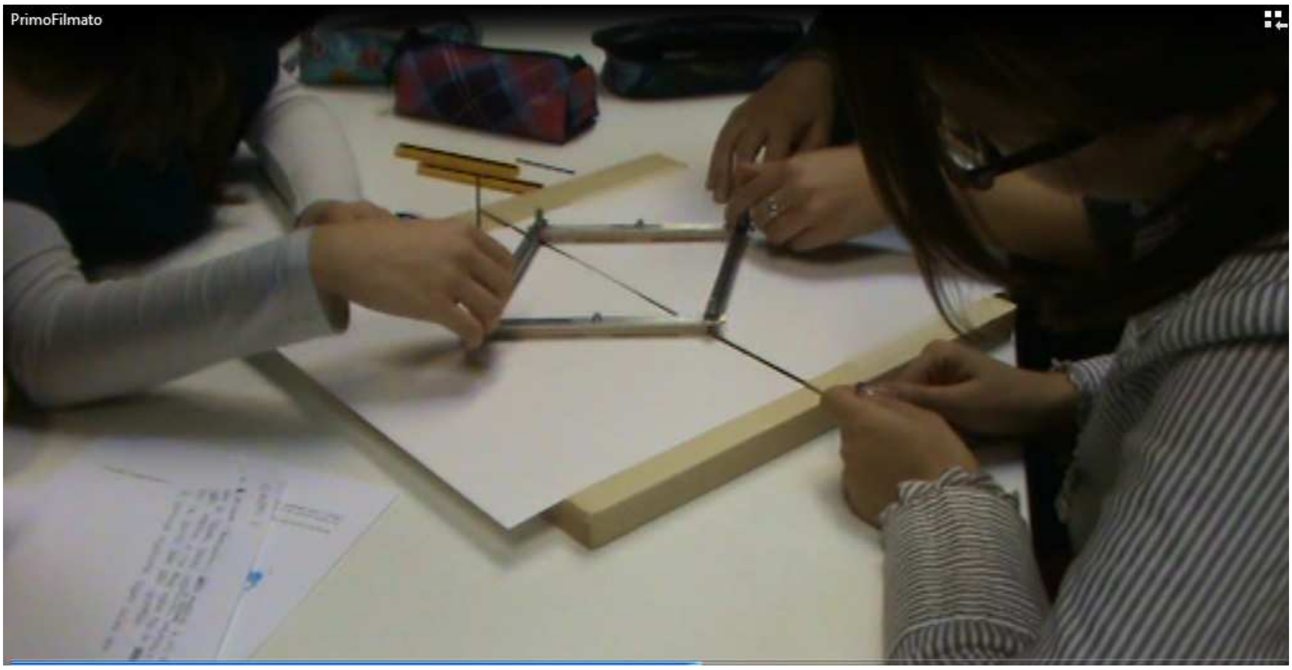
Mentre due componenti scrivono la risposta alla prima domanda, le altre due continuano a muovere la macchina e si pongono alcune domande che coinvolgono tutti i componenti, in particolare sembra che mettano alla prova il modo con il quale un tracciatore si muova rispetto all'altro

R, riferendosi al movimento di un tracciatore rispetto all'altro dice " *comunque il movimento è lo stesso*" (T=15:02)

Mentre R rilegge la risposta le ragazze stanno studiando il movimento dei tracciatori

D2 e D3 muovono la macchina tenendo ciascuna un tracciatore con una mano e accompagnando il movimento. (T=15:37)

Figura 5: D3 e D2 muovono assieme la macchina



D3 muove in diverse maniere le asticelle (tenendo i due tracciatori, tenendone uno solo, usando le asticelle) e conclude, indicando i due fogli sui quali hanno tracciato delle figure:

"*..ma vedi che comunque viene la stessa cosa..*" (T=15:57)

D1 mette in relazione questa osservazione con l'osservazione di Chiara secondo la quale i due triangoli sono congruenti e dice: "*eh allora..il fatto che i due triangoli sono congruenti è importante perché significa che dalle due parti verrà sempre la stessa cosa*" (T=16:08)

Non si capisce cosa dicano D3 prende il testo

D1 riprende a muovere la macchina con una mano in ogni tracciatore ed osserva il movimento

(T=16:51)

Poi D1 e D2 muovono ciascuna uno dei perni vincolati (T=17:04)

R legge la risposta fino ad arrivare alla parola congruenti, a quel punto (controllare)

D3 dice “*forse è per quello che Bruno dice io non vedo niente.*.”

R gira la macchina ed inizia a muovere il tracciatore a lui prossimo (T=17:45)

D1 continua a muovere la macchina tenendo un tracciatore con ciascuna mano e muovendoli in modo che restino paralleli alla scanalatura (T=18:08)

Provano poi a pensare al possibile motivo per il quale Bruno dice di non vedere.

Nel frattempo D1 continua a muoverla e studiare il tipo di movimento dei tracciatori e dice:

D1:“*.se qua vado dritta anche di là va dritto.*.” intendendo che se muove un tracciatore secondo una direzione, una retta, (che nel caso specifico è perpendicolare alla scanalatura), anche l’altro si muoverà secondo una retta. (T=18:22)

Leggono la risposta e la commentano

D2 dice (non si sente) (T=19:07)

D2 (facendo un gesto con la mano come a rappresentare lo spostamento di un oggetto da un lato all’altro della macchina) e D1 iniziano a parlare di figure simmetriche

(T=19:16)

Figura 6: D2 accompagna con un gesto quello che dice

D1 continua a muovere la macchina in diversi modi mentre pensano a come completare la risposta.

R: "*essendo i triangoli congruenti il disegno sarà simmetrico rispetto alla scanalatura*", D3 aggiunge questa affermazione alla loro risposta (T=20:37)

La ragazza D2(quella di fronte alla precedente D1) muove ancora la macchina tenendo il tracciatore sinistro con la sua mano sinistra.

Mentre decidono la risposta R precisa che il disegno sarà simmetrico"..*muovendo la macchina in qualsiasi modo*" (T=21:09)

D1 dice che "*da qualunque posizione la guardi (la macchina) è uguale* " (T=21:57)

R non si capisce bene "*ci deve essere una spiegazione logica..non vedo niente* " riprendendo la frase di Bruno (T=22:18)

R toglie le mine alla macchina e riprende a muoverla usano un solo tracciatore (forse anche per la particolare posizione che renderebbe scomodo usarli entrambi, dato che è di fianco ad D1 e D2).

R gira la macchina in modo da essere posizionato rispetto ad essa come Bruno

R: "*..Bruno vede un quadrato..*" (T=22:48)

D2: "*ma tutti lo vedono*"

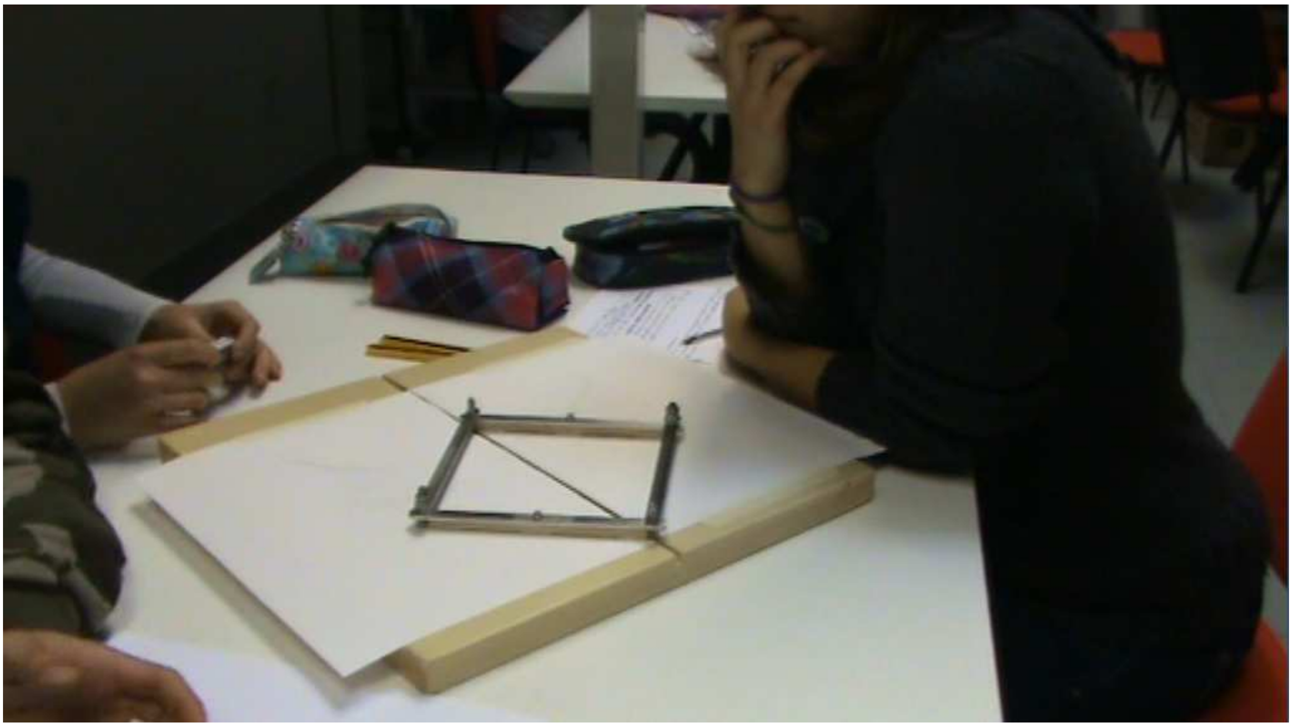
D1 e D3: "*..ma lo vede anche lei..*" indicando Chiara

Discutono su questo fatto ma non si capisce bene

D3 aggiunge con un gesto che un rombo diventa un quadrato se lo giri (T=23:02)

Poi ciascuno dice quello che vede guardando la macchina e due ragazze, posizionate in modo simile rispetto alla macchine, D1 e D3 dicono di vedere un rombo, D2 si sposta in modo da essere posizionata come Alberto ed R dice che D2 vede un quadrato. (T=23:10)

Figura 7: D1 e D3 vedono un rombo, D2 vede un quadrato

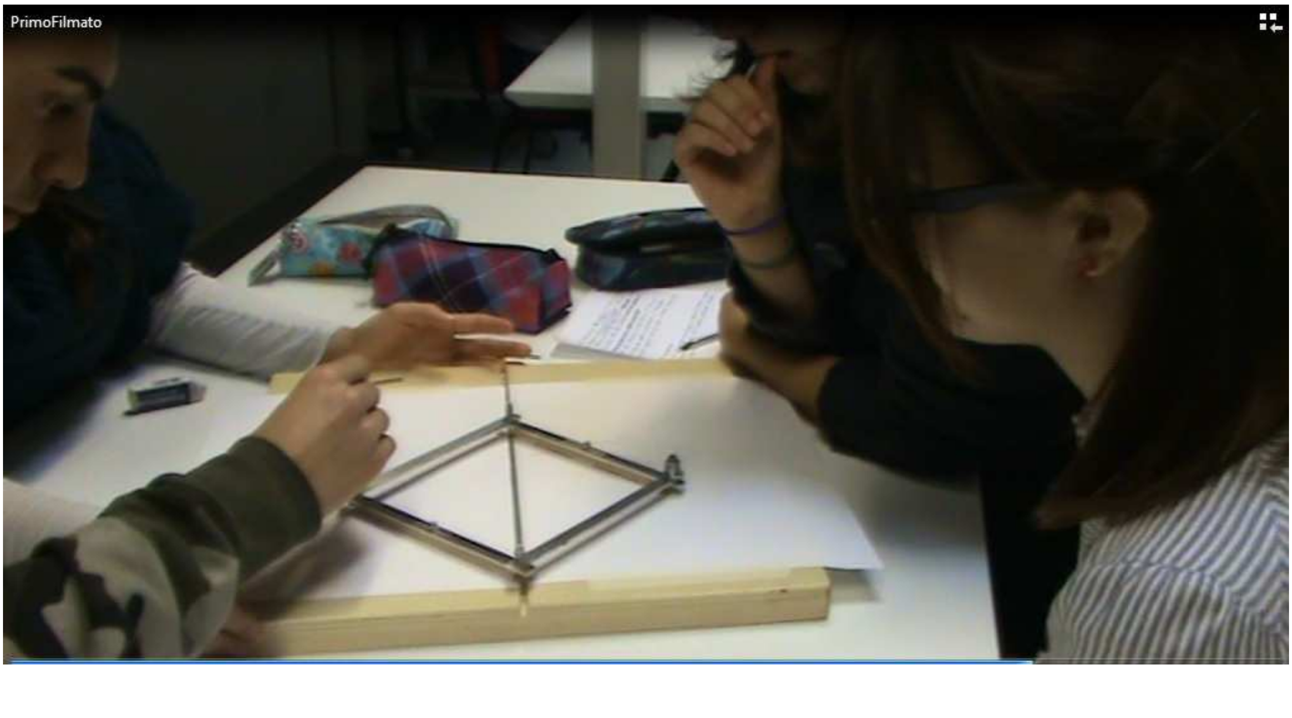


R “*un rombo o un quadrato come lo ribalti è quello..è una cosa stupida*”. (T=23:17)

D2 ruota la macchina e dice: “*da qua si vede un quadrato*”

D3 (che è di fronte a D2): “..*adesso vedo un quadrato*” e D1 “*adesso è più un quadrato*”

Figura 8: D1 e D3 vedono un quadrato



Provano a capire perché i personaggi dicano ciò che è scritto nel testo e ipotizzano che possa dipendere anche dal fatto che Bruno non sa cosa significhi congruenti.

Dicono alcune cose (non si capisce)

R: "*supponiamo che lui non sappia cosa vuole dire triangoli congruenti..*" (T=23:40)

discutono

R: "*..e dire che lui vede un quadrato, perché dalla sua posizione effettivamente vede un quadrato*"

D3: "*..l'avevo detto anche prima ..è l'unica cosa che…*"

R:"*L'unica cosa è dire che lui vede un quadrato a questo punto, perché dalla sua posizione effettivamente vede un quadrato.*" (T=23:46)

D2 inizia a porre l'attenzione sulla scanalatura (non si capisce bene) (T=23:58)

D3 pare misurare la distanza dei due tracciatori dalla scanalatura con una mano.

D1:"*..ma sono uguali sennò..*" non si capisce bene (T=24:08)

R: "..che siano uguali..su questo non ci piove…"

D1 : "*..secondo me alla prima domanda "perché.." dipende dalla posizione* " (T=24:28)

R: "*Chiara ed Alberto vedono la stessa cosa..*"

Poi discutono sul fatto che Chiara e Alberto vedono la stessa cosa ma la scanalatura è posizionata in modo diverso nei due casi.

D2:" *..ma Chiara vede un rombo..*" non si capisce

D3: "*..lui cosa dice…che muovendo..*" poi muove uno dei perni della macchina per simulare quello che fa Alberto

R:" *ma lui dice una cosa giusta, l'unico che non dice una cosa giusta è Bruno*"

D1: "*..quindi secondo me è così..Alberto e Chiara dicono due cose giuste perché sono in una posizione dalla quale possono vedere sia che i triangoli sono congruenti e sia che se muovo un punto..si muove anche l'altro*" (T=25:11)

R:" *e si presuppone che abbiano conoscenze che Alberto* (ma intende Bruno) *non ha per non capire che sono congruenti*"

D1: "..*e comunque lui vedendo un quadrato potrebbe non capire perché ci sono due triangoli congruenti*"

R:"..*è l'unica cosa..io non ho altre idee..*"

Mentre parlano D1 e D2 muovono la macchina tenendo ciascuna un tracciatore con una mano.

Il ragazzo comincia a formulare la risposta alla domanda:

R: "..*ciò che ciascuno dei componenti dice dipende da come sono disposti intorno alla macchina..no..intorno alla macchina o al tavolo..vedi tu..*" (T=25:52)

D1 e D3: "*no..intorno alla macchina*" (T=26:22)

Formulano poi la risposta.

D3: "..*perché rispetto alla posizione in cui sono seduti Alberto e Chiara, la macchina presenta la forma di un rombo* " (T=28:14)

Mentre parlano D1 e D2 continuano a muovere la macchina tenendo ciascuna un tracciatore con una mano.

D3:"..*mentre Bruno rispetto al sua posizione vede un quadrato,*"

R:"..*vede, nella macchina, un quadrato*"

Allegato7_ProtocRomboArtParte2

Protocollo del gruppo filmato

Prima sessione: rombo articolato

Prima giornata: seconda parte

La seconda parte si riferisce alle attività svolte nella stessa giornata della prima, dopo l'intervallo. Anche in questo caso il protocollo che segue è tratto dai filmati (Seconda parte, SecondoFilmato.mpg), trascrivendo i dialoghi (in certi casi non è stato possibile) e scegliendo immagini degli episodi più significativi.

Protocolli tratti dal filmato

Gli studenti cominciano a lavorare e si posizionano allo stesso modo in cui erano disposti prima

Non si capisce bene.." *perché l'abbiamo fatto male* "..

"*cancello?*"

D2 prende la gomma e cancella i disegni che avevano tracciato

D1: inizia a mostrare ai compagni che se uno disegna un triangolo da una parte allora dovrebbe

D1: prende la matita : " *secondo me se tu lo fai bene..con le mine*" ed inizia a tracciare un triangolo su uno dei fogli posizionati sulla macchina

D1: " *questo dovrebbe essere una specie di triangolo*.."

Figura 9

R: “*non può venire anche con un tondo?*”

Alcune di dicono di no e ridono (non è chiaro se ridano perché credono che non si possa fare o perché prendono quello che R dice come una battuta)

D: “è impossibile che venga un cerchio”

Provano a rispondere e non sembrano convinti , ma non è chiaro che se si traccia una circonferenza da una parte allora si otterrà una circonferenza anche dall’altra. Provano a muovere la macchina.
(T=0:32)

D1: “*perché questo avendo i lati uguali..qualunque cosa tu fai devono venire delle figure geometriche regolari..no?*”

D3:”*non lo so*”

D2 cancella tutto quello che hanno tracciato. R chiede se hanno risposto completamente alla prima domanda precedente e D3 legge la risposta:

“….”

D1 e D2 (poi anche D3) muovono la macchina per tracciare delle nuove figure, prima D1 e D2 tengono ciascuna un tracciatore e D1 direziona la macchina, poi D1 muove anche i due perni sulle scanalature. Interviene anche D3 ad aiutare a muovere la macchina.

(T=1:57)

Cercano di tracciare una linea dritta e parallela alla scanalatura. D3 fa poi alcune prove con la matita ma non è chiaro cosa cerchi di verificare.

R chiede a che punto sono con la seconda domanda e D3 la legge :

“….Dato che i triangoli sono congruenti il disegno che si ottiene è simmetrico rispetto la scanalatura della macchina”

(T=3:36)

Consegno il secondo foglio

D1 inizia a leggere ma poi passa il foglio a D3. D3 gira il foglio per mostrare ai compagni le modalità con le quali la macchina viene rappresentata.

Terminata la frase di Chiara

R: “*trovare l’area?..non so*”

D3: “*area è base per altezza diviso due*”.

D1 invece dice "*ok*", ma riferendosi alla frase di Chiara e non a quella di R ed prende fra le dita i due perni vincolati della macchina.

D3 rilegge la frase "*..i due triangoli sono congruenti perché hanno un lato in comune..*"

D1 indica la scanalatura: "*ovvero questo* "

D3: "*..e quindi le loro altezze sono uguali*"

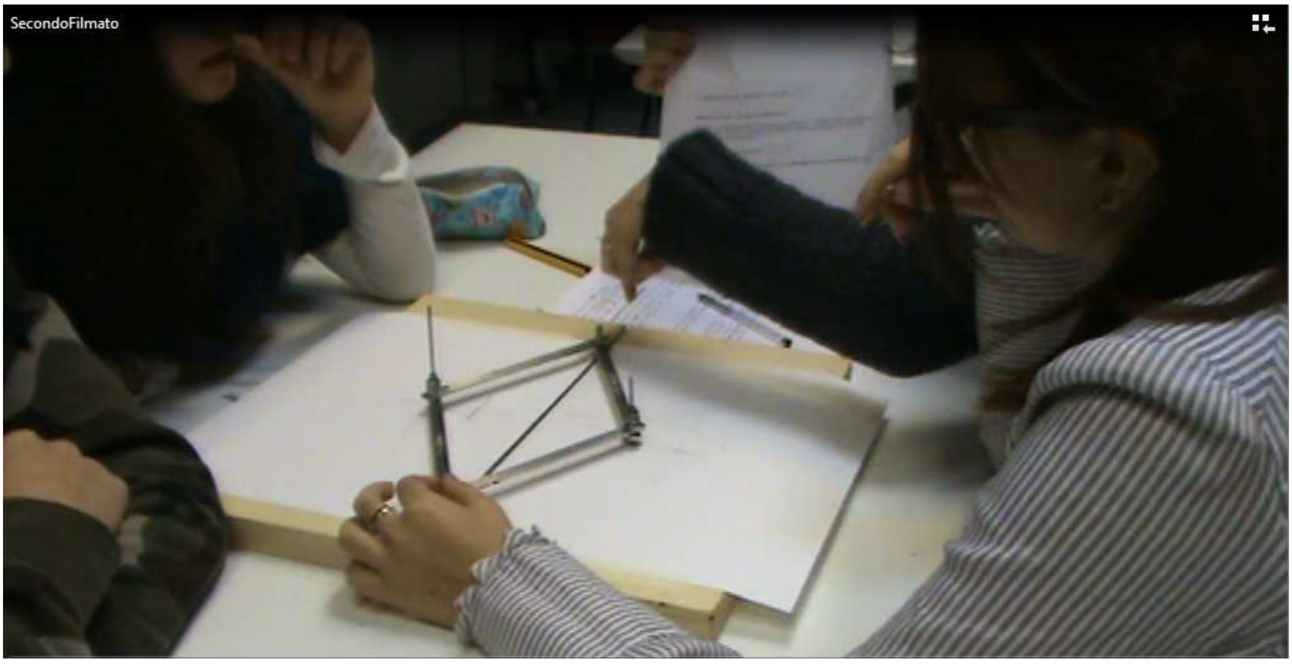
D1: "*..e quindi anche l'area..ed anche il perimetro*"

D3 legge la frase di Alberto e mostra il foglio ai compagni

(T=5:17)

D3 indicando con le mani due immaginari assi sulla macchina " *praticamente lui immagina questo come un piano cartesiano*"

Figura 10: D3 indica gli assi cartesiani immaginati da Alberto



D3 Indica la scanalatura come asse x ed una perpendicolare passante circa al centro come asse y. (T= 5:31)

Continua a leggere quello che dice Alberto (le equazioni della trasformazione proposte da Alberto) e mostra agli altri.

Si fermano a pensare e poi dicono tutti di avere capito.

D3 legge ad alta voce fino alla domanda finale di Bruno con la sua proposta di equazioni. (T=6:36)

R dice che la prima equazione del sistema proposto da Bruno va bene ..”..*è identica*”, ma l’altra no

Discutono

R”*ma dire 4 = x alla seconda o x alla seconda =4 è diverso?*”

D3 dice che è la stessa cosa e nota che è la seconda equazione del sistema allora che va bene

R “*dice che è la seconda che va bene*”

R osservando il grafico dice :“..*secondo me la prima del sistema di Bruno non è corretta*” (T=8:07)

D1 indicando il foglio “ *se qua c’è x’..-x’ dove sarebbe..qua?*” indica la parte sotto all’asse x

D3 indica con la mano la parte a sinistra dell’asse y “*sarebbe qua*”

R dice che ha ragione D1 ma da quello che dice indicando il foglio sembra ragionare in modo da considerare gli assi cartesiani invertiti rispetto a quello che dice il testo (almeno seguendo la convenzione usata per la scrittura delle coordinate di un punto).

Tuttavia mentre prova a spiegare alle compagne si accorge di non avere le idee chiare e si ferma.

D3 ed R dicono che va costruito un altro rombo sulla figura. Iniziano a costruire una serie di punti.

D1 interviene dicendo che non è importante il modo con il quale si disegna la macchina sul piano cartesiano e dice che secondo lei le equazioni di Bruno sono corrette. (T=9:35)

Poi D1 riprende a toccare la macchina con le due mani sui perni vincolati.

D1 nota che in entrambi i sistemi la x è opposta e la y è la stessa, quindi di può scrivere anche come propone Bruno

Figura 11

R e D3 dicono che secondo loro la x non è opposta

R chiede quale è la domanda alla quale devono rispondere.

(T=10:23)

Iniziano ad analizzare i sistemi con le coordinate numeriche dei punti che sono sul testo. D3 posiziona il punto (-2;3) considerando gli assi del sistema posto sul foglio nella maniera convenzionale .

D3: “..*però x’ è uguale a –x davvero!*”

(T=13:02)

Accompagna con un gesto della matita che parte da un punto sul 1° quadrante a va al 2°

R “*no..-x è qua* ” indica invece un punto al disotto dell’asse x, nel 4° quadrante

R “*tutto ciò che sta qua è –x..tutto ciò che sta qua è -y*”

(T=13:11)

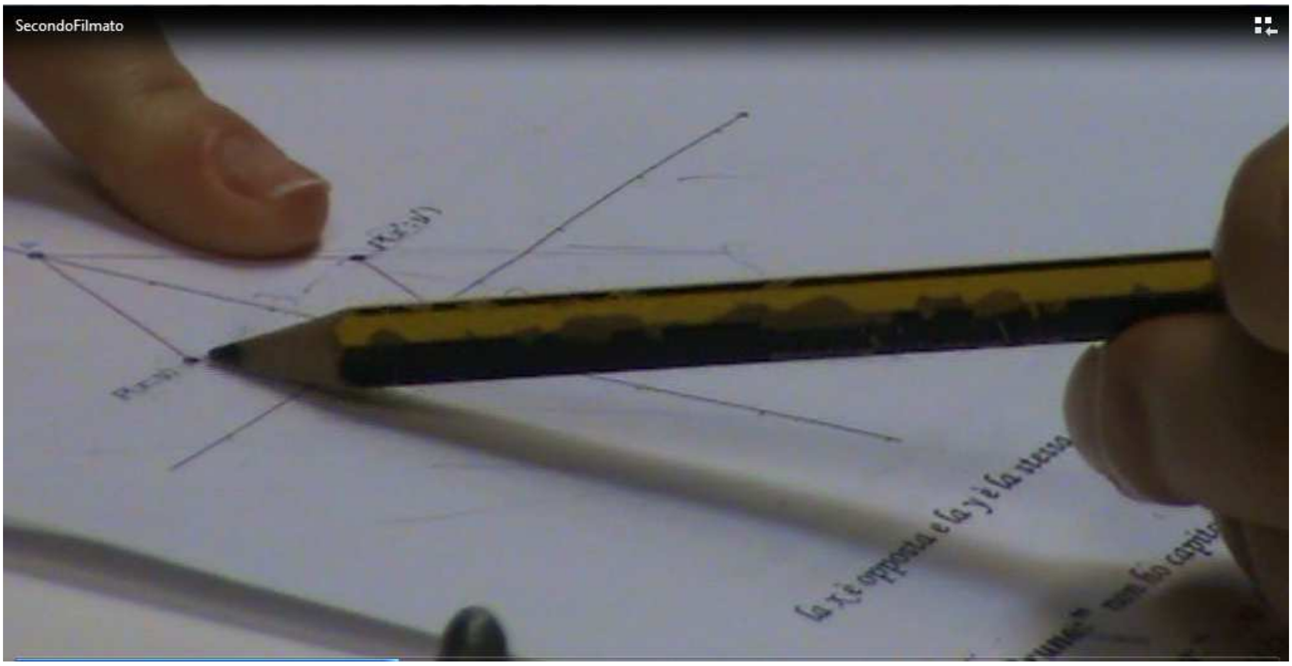
D3: “ *x sarebbe 2…-x sarebbe -2*” Cerchia i numeri scritti nei punti e quelli sul grafico”..*quindi questa è giusta secondo me*”..cerchia la prima equazione del sistema proposto da Alberto

R: “..*uguale..uguale no perché c’è un meno di scarto*..”

D3 spiega che intende dire che i segni delle ascisse dei due punti seguono i segni che sono sulla equazione

D3: “..*per quanto riguarda la y, y’ è uguale a y che è tre*”

Figura 12: discutono sulle equazioni di Alberto



R:"*si..considerandoli simmetrici rispetto a questo asse..asse delle y*"

D:"*..ma lei chiede come le giustifichi..*"

R: "*forse si giustificano usando l'asse y come asse di simmetria..non so*"

(T=14:30)

D3: "*..ma anche guardando solo il grafico*"

D3 rilegge il dialogo, la parte nella quale Alberto spiega come farebbe lui

D3: " *beh non è che sia spiegato più di tanto ..è per quello che lei dice come lo giustifichi*"

D3: indicando le equazioni di Bruno"*..però secondo me anche questa è giusta..*"

D3 e D1 Verificano le coordinate x e dicono che la prima è giusta

R : "*per me è vero il contrario questa è giusta*" indica le equazioni di Bruno " *e questa è sbagliata*" indica quelle di Alberto

D3: "*perché?*"

R: "*allora..x*" indica la x dell'equazione di Bruno "*abbiamo detto che corrisponde a -2, x' ,prendiamolo senza il segno, corrisponde a 2,..ma dato che è negativo mettiamo il -, meno due uguale a meno due*"

D1 e D3 dicono di avere capito

R:” *analiticamente torna meno due uguale a meno due*”

D3: “*analiticamente..questa graficamente*” intendendo quella di Alberto

(T=16:28)

R:”*si.ma bisogna vedere in che senso la intendi*”

D3 continua a leggere “Voi cosa ne pensate? Quale metodo si può usare per dimostrare ciò che la macchina fa?”

R: “*io userei questa* ” indica le equazioni di Bruno

Io intervengo per chiarire che il testo si riferisce anche al metodo proposto da Chiara, dato che sembrano non considerarlo più

Tornano a considerare quello che aveva detto Chiara all’inizio

D1: “*secondo me se noi utilizziamo questo modo*”, indicando quello si Chiara, “*è più semplice da capire perché non devi avere le conoscenze analitiche ..non devi guardare né il grafico né le equazioni*”

Dicono alcune cose che non si capiscono bene

R: “*è più intuitiva*”

D1:”*è più intuitiva*”

D1: “*una volta che tu sai che i lati sono uguali e la base è uguale..è ovvio che l’area, l’altezza ed il perimetro sono uguali*” nel frattempo manipola la macchina

D3: “*anche perché non scordiamoci che questi*” indica i due triangoli che formano le asticelle della macchina “*sono..*” non si capisce bene forse congruenti?

(T=18:11)

D1: “*praticamente Alberto dice che il primo metodo non è sbagliato però non basta*”

Discutono su cosa si debba dimostrare, R propone che si debba dimostrare che l’area dei due triangoli è la stessa

D2: “*lo stiamo ipotizzando noi..magari non c’entra niente, quando qui dice ‘quindi’ siamo stati noi a dire che allora bisognava trovare il perimetro o l’area..*”

R: “*di fatto lui con questa cosa vede che i due triangoli sono uguali ma non ricava nulla..grazie invece al piano cartesiano si può trovare la lunghezza del segmento e poi..può fare il teorema di pitagora*”

D1: “*se io ho un grafico così” indica la figura di Chiara “non ho né coordinate né misure quindi come faccio a calcolare?*”

D3: “*ok ma chi ha detto che vuole calcolare l’area*?”

R: “*nessuno*”

D1: “*noi*” (T=19:21)

Rileggono la frase di Chiara e convengono che non si può dire che volesse calcolare l’area o altro perché non conclude la frase

D1: “*ma se non fosse per l’area perché dovrebbe fare un piano cartesiano?..per forza deve calcolare qualcosa*”

D3 prova a ripercorrere quello che dice il testo con l’ipotesi che debbano calcolare l’area per giustificare l’uso del piano cartesiano da parte di Alberto

R:” *di conseguenza può calcolarsi la misura dei segmenti e fare il teorema di pitagora e trovare l’area*”

D1:”*e quindi come equazione quale prendiamo..quella di Bruno?*”

D3: “*No..abbiamo detto che sono giuste tutte e due, una per via analitica ed una per via grafica*”

R: “*un attimo..sinceramente questa qua* ” quella di Alberto “*sta dicendo che x’ nonché 2 è uguale a -2..noi di fronte a questa..come facciamo a dire che una cosa così è vera?*”

D3: “*non lo diciamo*”

R: “*che poi..non sono proprio uguali..sono opposti i due valori*”..”*questa è uguale* ” indicando la prima equazione di Bruno “*perché abbiamo detto che essendo x meno due, meno x’ è meno due..quindi questa uguaglianza torna*”

D1: “*ma in ogni caso devono essere opposti no? Se devi costruire un rombo..devono per forza essere opposti*” indica con le dita i due punti P e P’ disegnati sul grafico

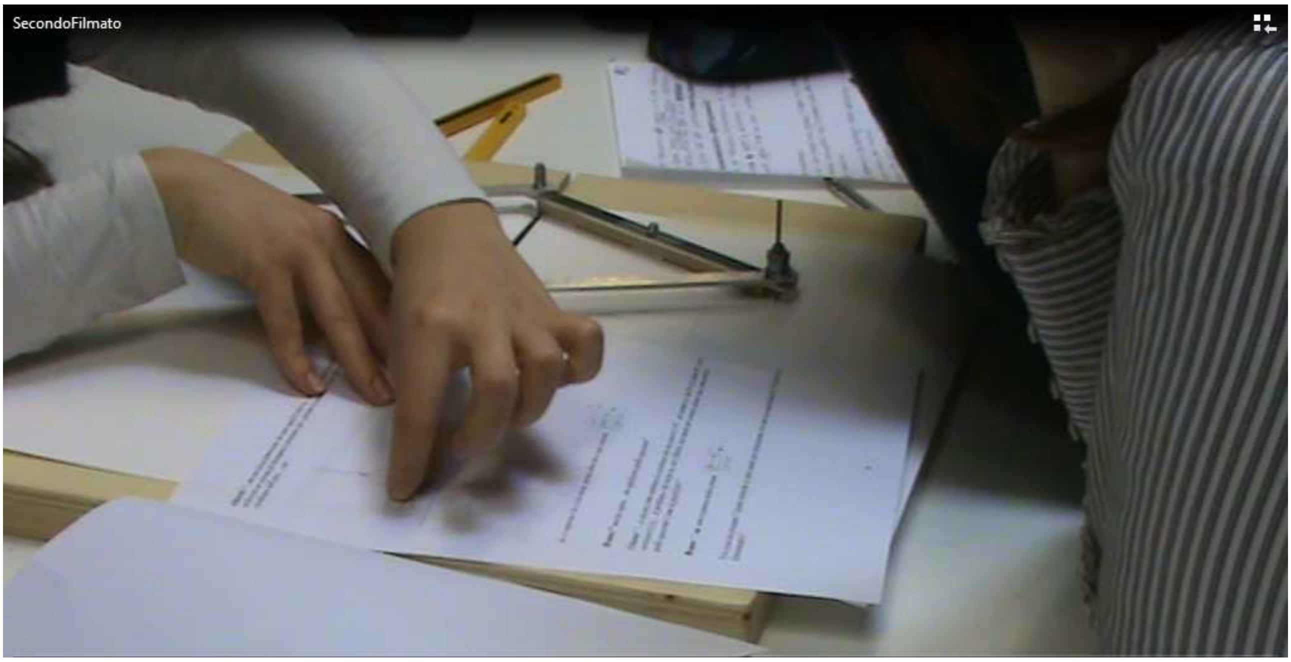
D2 (e D1): “*è opposto ma uguale*”

(T=21:42)

R: “*cosa vuole dire opposto ma uguale?*”

D2: “*questo è due* ” indicando l’ascissa di P’ “*e questo è meno due*” indicando quella di P “*ma queste due sono uguali*” indicando le distanza di P e P’ dall’asse y

Figura 14: D2 mostra quello che intende con “opposti ma uguali”



R: “*secondo me invece che uguali basta dire che sono simmetrici rispetto all’asse y*” (T=22:08)

D1: “*quindi noi in questa macchina possiamo pensare come se la scanalatura fosse l’asse delle y*” e indica la macchina

R: “*delle x*” D3: “*si delle x*”

R: “*dipende come uno la gira..in questo caso delle x e quello delle y sarà così*” indica un asse perpendicolare alla scanalatura passante all’incirca per il centro della macchina

D1: “*in questo caso delle y perché se è simmetrico rispetto all’asse delle y*..”

Ma R, D2 e D3 tracciano con la matita degli assi e indicano quello della scanalatura come asse x

R e D2 rileggono il testo e D2 indica i due vertici opposti del rombo sia per giustificare

Riprendono a leggere il testo cercando di capire il motivo delle cose dette da Alberto e Chiara. (T=23:49)

D1: “ *ma se lei fa l’esempio per spiegare a Bruno..comunque lei lo ha capito come ha fatto ad arrivare a queste cose..dice..stai dando per scontate alcune cose..*”..” *cioè non è che lei non ha capito come è arrivato a questo*” indica il sistema di equazioni di Alberto “*perché se fa l’esempio..*” (T=24:34)

D2 non si capisce bene “*può darsi che siano cose molto semplici* ” quelle date per scontate “ *e le sanno già*”

R: “*io ritengo che si potessero scrivere anche così..*” indicando il sistema proposto da Bruno “ *perché questa è una uguaglianza..non si può dire che non lo sia*”

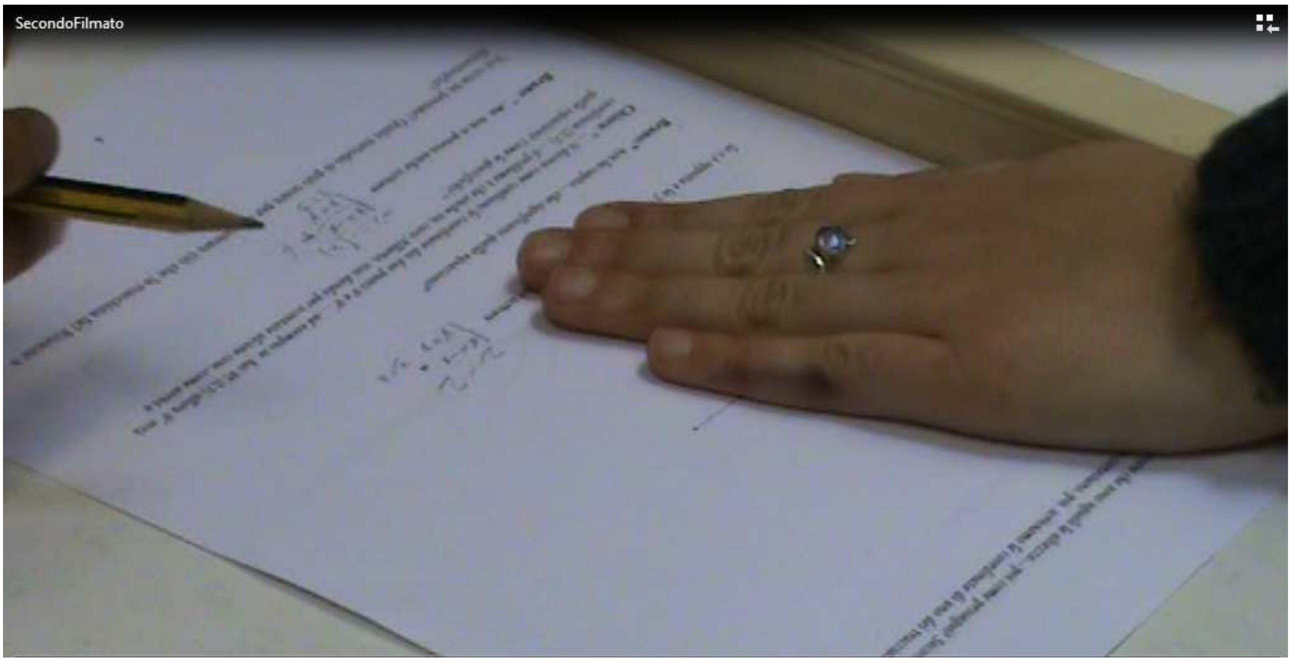
D propongono di sostituire i valori numerici delle ascisse anche nella prima equazione di Bruno

R pone i valori e scrive l’equazione (sul foglio del testo) -2=-(2) *“più uguale di così..”*

Scrive anche 3=3 in entrambe le equazioni dei due sistemi.

D3: copre con una mani il grafico e dice “ *se noi non contiamo il grafico..è uguale a quella giù no?*” non chiaro

Figura 15: D3 copre il grafico con una mano



D1 e D3 discutono sul fatto che i valori numerici scelti per l’esempio sono scelti a caso, non dal grafico.

D1: "*beh intanto potremmo scrivere…*" R "*..si cosa dice la domanda…*"

R legge la domanda" *Quale metodo si può utilizzare per dimostrare ciò che fa la macchina?*"

(T=26:07)

D1: "*secondo me questo*" indicando il grafico cartesiano "*perché è più chiaro*"

R indicando la figura di Chiara " *allora con questo qua si vede in maniera più intuitiva*" , D3 è d'accordo con R

R"*..che la macchina produce due triangoli congruenti che hanno la stessa base e la stessa altezza e quindi l'area ed il perimetro saranno gli stessi..*"*…*" *se poi uno vuole andare oltre e conoscere il valore dell'area si può utilizzare..il coso*"

D3: " *il grafico*"

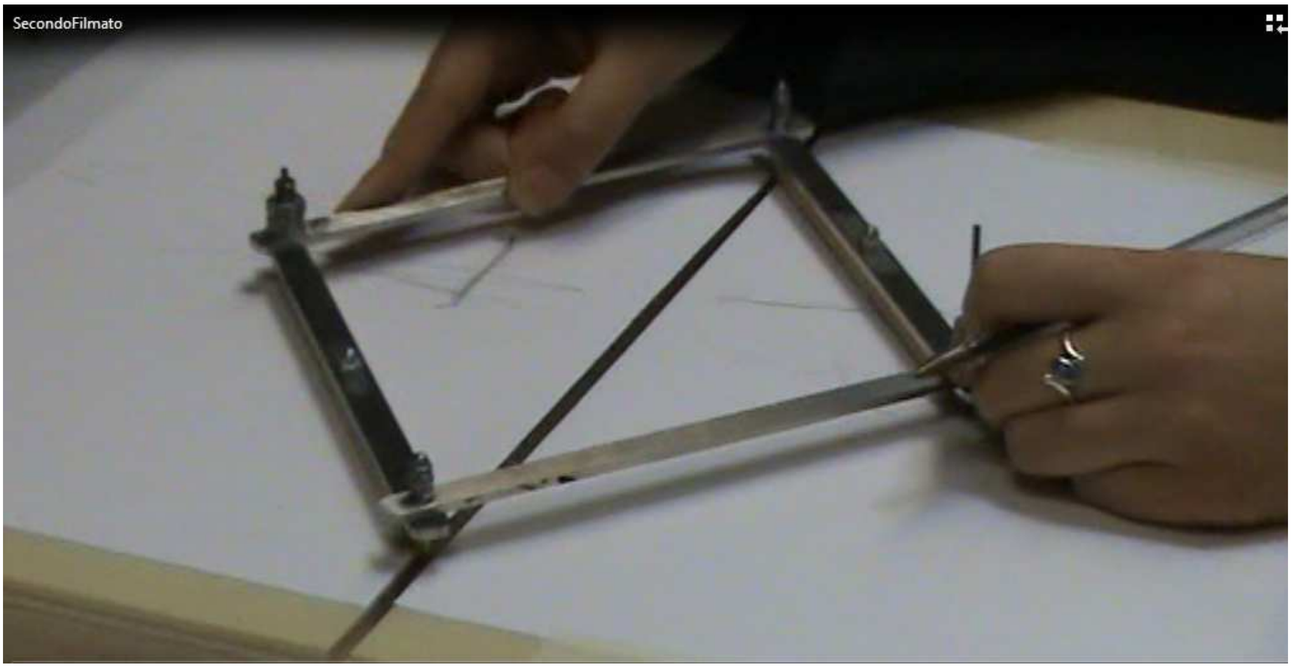
D1: " *però qua parla di funzionamento della macchina..*"

R: " *appunto per il funzionamento della macchina..cosa ti serve avere il grafico?*"

(T=26:40)

D3 riprende a muovere la macchina

Figura 16: D3 muove ancora la macchina



D1: "*ma per capire il funzionamento della macchina a cosa ci serve l'area?*"

D3: "*eh infatti..per capire che sono tutti congruenti basta che muovi questi*" e muove la macchina

(T=26:51)

D3: "*Allora..*" iniziano a decidere come rispondere alla domanda sul metodo migliore

R: “ *a nostro parere per dimostrare ciò che la macchina fa..per dimostrare unicamente direi..è sufficiente il metodo di Chiara..che ci mostra come i due triangoli siano congruenti e di conseguenza aventi la stessa base, la stessa altezza e..la stessa area*”

(T=29:13)

D3: “*poi dice..riuscite a dimostrarlo?*”

R: “*riusciamo a dimostrarlo perché..basta tracciare una ipotetica altezza*” sta disegnando sulla figura proposta da Chiara “ *vediamo che sono..poi dimostrarlo..i due triangoli si vede che sono congruenti..identici*” (T=29:57)

R:”.*la base è la stessa* ” indica con la matita il segmento che rappresenta la base

D3: “*la stessa altezza..si vede*” anche lei indica le due altezze con la matita

R: “*io direi che riusciamo a dimostrarlo da un punto di vista esclusivamente..intuitivo*”

(T=30:23)

D1: “*la cosa di prima si collega a questa?*”

D1: “*il fatto che se io muovo la parte sinistra è come se avessi un ipotetico piano cartesiano..*” intanto muove la macchina, anche se non in modo uguale a quello di Alberto “*e ovunque mettessi questi valori ..cioè queste. .*” non si capisce bene

(T=31:14)

D1: “ *della seconda dici che..Alberto arriva a mettere i bracci della macchina matematica sul piano cartesiano per mettere dei valori e quindi per..*”

R: “*Alberto dice che non basta dimostrare che sono uguali le altezze*”.. “*non basta se tu vuoi trovare l’area..no cosa sto dicendo?*”

Alcune cose non si capiscono bene

D1: “ *no.. dice che senza valori noi non possiamo trovare niente*” riferendosi alla critica che Alberto fa a Chiara

R: “*lo dice i maniera implicita..perché non è che dica così..*”

D3: “*eh però lo vedi..cioè da questo lo vedi che è tutto uguale..è logico*” muove la macchina

D1 muove la macchina tenendo il tracciatore a lei più vicino

R: “*io direi che seguendo il metodo di Alberto, ovvero quello che dice lui qua*” indica la parte che precede il grafico cartesiano “*noi possiamo arrivare a stabilire la lunghezza di un segmento e in questo modo usando il teorema di pitagora trovare l’area*”.. “*però io direi anche che l’equazione di Bruno è corretta..secondo me*” (T=32:51)

D1: “*il fatto che quella di Bruno sia corretta vuol dire che è sbagliata questa?*” indica le equazioni di Alberto

D3: "*se te non guardi questo dal fatto che sia simmetrico*" indicando il grafico cartesiano "*questa qui è sbagliata* " indica le equazioni di Alberto " *perché 2 non è uguale a meno due*"

(T=33:02)

D1: "*quindi questo* " indica le equazioni di Alberto "*è giusto da un punto do vista grafico*"

D3: "*..no..è simmetrico*" indicando con le dita due punti del grafico simmetrici rispetto all'asse y

R: "*io non capisco cosa vuol dire giusto da un punto di vista grafico*"

D2: "*vuole dire che questo* " indica il tracciatore sinistro della macchina del grafico "*è uguale a questo..*" indica quello destro "*non vuole dire che due è uguale a meno due..vuol dire che questo è uguale a questo perché è simmetrico*"

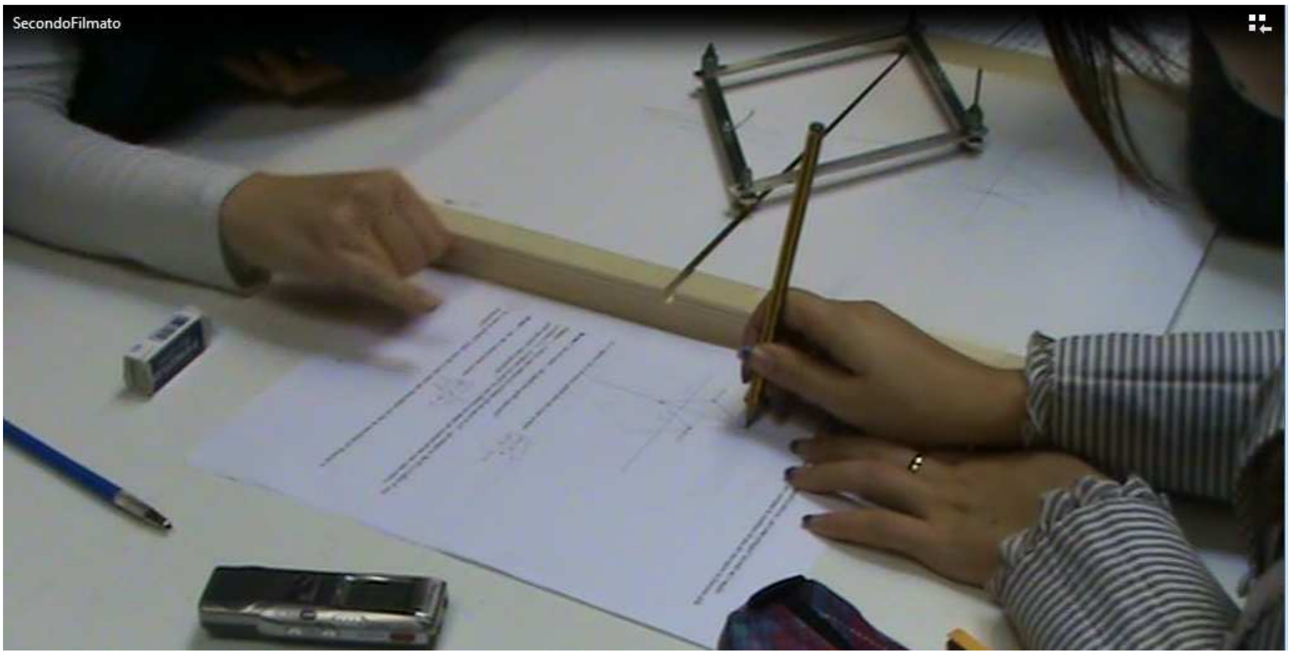
(T=33:29)

D3: "*e se te lo fai così*" indica le equazioni di Bruno "*vuole dire che x è uguale a meno y*?"

D2: "*si ma questa non è sbagliata*" indicando le equazioni di Alberto "*perché ti fa vedere che sulla base del grafico l'equazione è questa.. è corretta*"

D1: "*si è quello che abbiamo detto prima ..questo non cambia mai*" ed indica i punti sul segmento verticale dell'asse y

Figura 17: D1 interpreta l'equazione y'=y



D1: "*..perché hanno un lato in comune che non cambia mai ed è questo*" indica la scanalatura della macchina

D3: " *cos'è che diceva prima? Quando tu muovi il punto verso sinistra l'altro punto si muove nello stesso modo*", D1 muove la macchina

(T=34:42)

Discutono ancora sui due diversi sistemi.

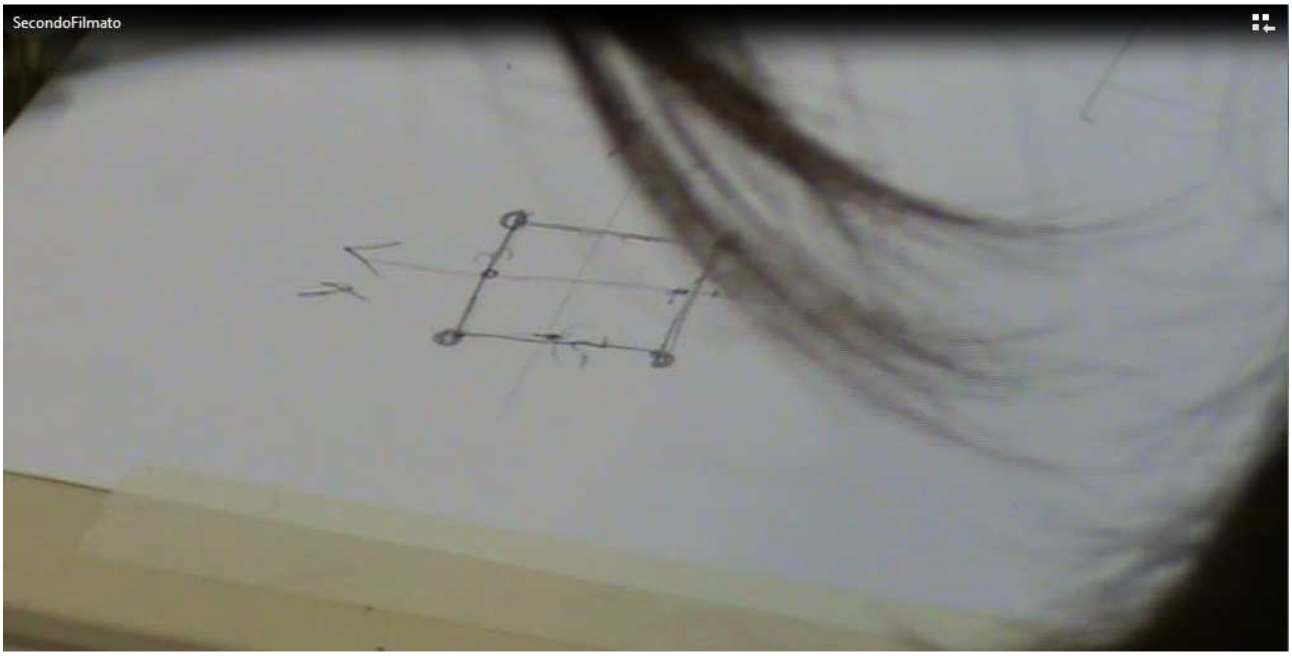
D1: "*ma perché questo* " il sistema di Bruno "*non può essere giusto dal punto di vista grafico?*"

D3: "*perché come fa a venirti la figura?*"

(T=36:01)

D1 e D3 iniziano a interpretare le equazioni in modo da costruire la figura

Figura 18: D1 e D3 disegnano una figura a partire dalla loro interpretazione delle eq di Bruno



D1: "*Quindi?*"

(T=37:26)

D3 prova a sistemare la macchina nella stessa posizione che ha nel testo

D1 chiede "*mettiamo che la prof. ci dia un grafico come questo e ci chieda di calcolare l'altezza di questa figura..come facciamo?*"

R: "*c'è la formula..non mi ricordo quale è*"

(T=38:35)

R prova a ricordare la formula ma non ha le idee molto chiare, secondo lui serve anche il teorema di pitagora

D1 propone di iniziare a spiegare perché secondo loro Alberto propone quel grafico

D3: “*Crediamo che Alberto proponga il piano di riferimento cartesiano..* ”

D1: “*..per ricavare dei valori..*”

R: “*..per trovare la lunghezza dei segmenti..e di conseguenza riuscire a ricavare…per poter ricavare, dai punti del grafico, la lunghezza dei segmenti*”

(T=40:47)

D3: “*..e di conseguenza l’area*”

Iniziano a pensare a quale dei due sistemi di equazioni va usato

R: “*..se però dice che la x è opposta*” indica le equazioni di Alberto “ *e la y è la stessa l’equazione si scrive così*” non si capisce bene ed indica le equazioni di Alberto, “*quindi non si può scrivere così*” indicando le equazioni di Bruno “*perché qua le x sono..uguali*”

D3: “*appunto*”

D2 non si capisce

D1: “*in questo caso però visto che lui lo rappresenta sul grafico per me è giusta la prima…perché è opposta non uguale*”

D3: “*e dopo, da lì, puoi sviluppare il tuo discorso*”

(T=42:26)

D1: “*..la cosa che ha scritto Bruno non è sbagliata però non se la vogliamo rappresentare su un grafico*”

R: “*in relazione a questo*” indica il grafico “*questa* ” le equazioni di Bruno “*non ci azzecca molto*”

D1 muove la macchina

D2: “*..per quanto riguarda le equazioni di Alberto sono quelle più..aderenti dal punto di vista grafico*”

D3: “perché per ottenere la figura del grafico…” non si capisce bene

D1: “l’equazione di Bruno..”

Iniziano a discutere sul significato delle equazioni e dagli esempi che fa D3 si vede che intende l’equazione sulle y come una relazione fra i punti sulla scanalatura

D3: “*perché sono i valori opposti della x e della y no?..*”

Discutono e D3 interpreta le equazioni di Alberto segnando i punti sul grafico, cercano di capire in che modo le equazioni siano legate al grafico ma poi D3 interpreta nuovamente l’equazione sulle y come se si riferisse agli altri due punti sulla scanalatura.

Figura 19

D1: “*però ha ragione..le y sono opposte*”

Iniziano a discutere sul fatto che le equazioni potrebbero essere interpretate nel modo che dice D3 se il rombo fosse in un’altra posizione sul piano cartesiano.

(T=47:30)

D3: “*nessuna delle due è giusta*”

R: “*..a questo punto..l’equazione corretta sarebbe?*”

D1: “*nessuna delle due*”

Figura 13: D1 indica la scanalatura come asse y


SecondoFilmato

-

Allegato8_ProtocRomboArtParte3

Protocollo del gruppo filmato

Prima sessione: rombo articolato

Seconda giornata

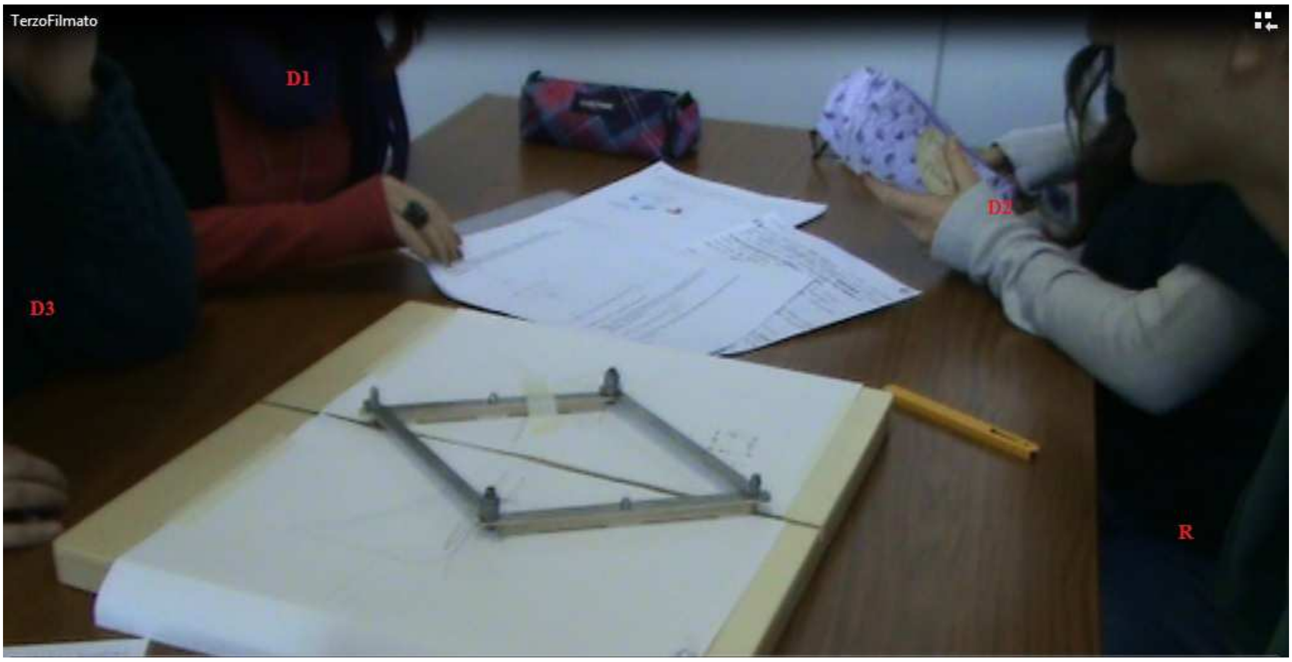
Introduzione al lavoro e interventi

Viene chiesto di terminare la parte relativa alla discussione sui metodi di Alberto e Chiara e la dimostrazione. Il gruppo filmato ha terminato abbastanza rapidamente, a quel punto lo sperimentatore ha voluto stimolarli al di là del testo consegnato ed ha chiesto di esplicitare che cosa facesse secondo loro la macchina e poi di provare a dimostrarlo. Durante le attività gli studenti chiedono alcune cose allo sperimentatore. Nel primo caso hanno chiesto come si chiamasse la macchina (che nome avesse) e se fosse sufficiente chiamarla “macchina matematica ”, lo sperimentatore dice che non aveva un nome specifico ma era un parallelogramma articolato con due e vertici vincolati a muoversi sulla scanalatura. In realtà è un caso particolare di parallelogramma, il rombo, ma questo sarà oggetto di approfondimento nell’ultimo incontro quando vengono poste alcune questioni: cosa succede se diventa un parallelogramma qualunque? (non è più una simmetria assiale). È necessario che sia un rombo? (no, può essere in generale anche un deltoide ma con alcuni svantaggi). In un altro caso chiedono se la macchina sia moderna. Lo sperimentatore ha risposto che risale (in maniera documentata) all’800 ma che per la sua semplicità poteva anche essere conosciuta dai greci o da altre civiltà (non per lo studio di trasformazioni ovviamente ma con altri scopi). Alla fine (al momento della consegna) hanno chiesto a cosa serva la macchina, lo sperimentatore ha risposto che, dal punto di vista matematico e come avevano già chiarito, la macchina permette di costruire figure simmetriche rispetto ad un asse ma che quella specifica macchina viene utilizzata per scopi didattici per studiare, appunto, la simmetria assiale. Anche in questo caso il protocollo che segue è tratto dai filmati (Terza parte: TerzoFilmato.mpg), trascrivendo i dialoghi (in certi casi non è stato possibile) e scegliendo immagini degli episodi più significativi.

Protocolli tratti dal filmato

Il gruppo si dispone in maniera differente rispetto all’incontro precedente.

Figura 20: nuova disposizione



D1 riassume l'ultima cosa sulla quale discutevano, ovvero la correttezza dei due sistemi di equazioni, la loro ultima posizione era che entrambi non erano corretti.

D2 dice che la seconda era giusta analiticamente ma poi viene interrotta da R che riprende a leggere la risposta proposta nell'ultimo incontro relativa al metodo migliore per dimostrare ciò che la macchina fa. (T=3:48)

Rileggendo la risposta R osserva che non si capisce cosa si debba dimostrare.

D3 rilegge la loro risposta " *..usando questo metodo riusciamo a dimostrare ciò che la macchina fa intuitivamente..*"

Modificano la risposta scritta in modo che sia più chiara.

D2 ed R discutono ma non si capisce bene (T:5:31)

Completano la risposta che avevano iniziato a scrivere nel precedente incontro

D1 prova a ripercorrere il loro ragionamento e lo sintetizza (T:8:34)

D1: "*..lei dice che possiamo rappresentare la macchina in questo modo..noi abbiamo detto che questo è il metodo più intuitivo per capire il funzionamento della macchina..perché ci sono due triangoli congruenti con base comune..noi possiamo capire che hanno base comune ed altezza comune ed abbiamo, noi, pensato che magari anche l'area…per questo magari motivo Alberto vuole fare anche un grafico..rappresentarlo graficamente..dice però che la x è opposta e la y è la stessa..il suo metodo di scrittura sarebbe y=y' e x..così…noi abbiamo detto che però è sbagliato..perchè la y non è la stessa ma deve essere anche quella opposta..perché venga un rombo*" (T=8:33)

Iniziano a discutere su questa ultima idea.

D2 indicando con le dita i punti mostra che le distanze dei due punti vincolati dall'asse x non è la stessa, quindi non si può dire che siano opposti.

R spiega che sarebbe sufficiente spostare verso il basso il disegno per fare in modo di verificare anche che le y sono opposte.

D1: "*ma se sposti quella positiva si sposta anche quella negativa..*"

D3: “*..ed hai però la stessa figura*”

D1: “*..e quindi è sbagliata anche l’equazione che dice Bruno*”.. “*perché dice che la y è la stessa.*” (T=10:07)

Chiedo “*Provate a chiarire cosa fa la macchina, perché finora nessuno lo ha mai detto, in maniera esplicita..cosa fa*”.. “e provate ad entrare nei dettagli di una possibile dimostrazione. Scegliendo il metodo che volete, magari seguendo proprio le indicazioni del testo” (T=10:42)

A questo punto mettono da parte il testo e riprendono a considerare la macchina che fino ad ora era sul tavolo ma ancora inutilizzata.

R inserisce le mine e D3 propone di cancellare quello che avevano disegnato sui fogli fissati.

Propongono di prendere un righello in modo da tracciare linee rette nelle loro prove.

R: “*quale metodo volete usare?*”

D2: “*perché tu quanti ne conosci?*” R”*due..questo..e* ” indicando uno dei due sul testo D3 “*e l’altro..*”

Dicono alcune cose ma non si capisce bene

D1 riprende a muovere la macchina e chiede “ *a cosa serve sta macchina?*”..”*è quello che dobbiamo capire*”

(T=12:33)

Anche R la muove sia usando il tracciatore destro che trascinandola dal perno vincolato a lui prossimo e poi usandoli entrambi.

Figura 21: R muove la macchina

D3: “*a cosa servirà mai?*”

R muovendo la macchina “*serve per costruire figure geometriche e…figure geometriche uguali*” (T=13:02)

R: “*allora..non posso costruire qualsiasi tipo di figura geometrica..*”

D3: "*no, infatti*"

R: "*un..*" ruotando un dito " *cerchio..non si può*".. "*un quadrato si* " e dispongono la macchina in modo da formare un quadrato "*un quadrilatero no..un rettangolo assolutamente no..*"

Quindi si stanno riferendo alle forme che può assumere la macchina

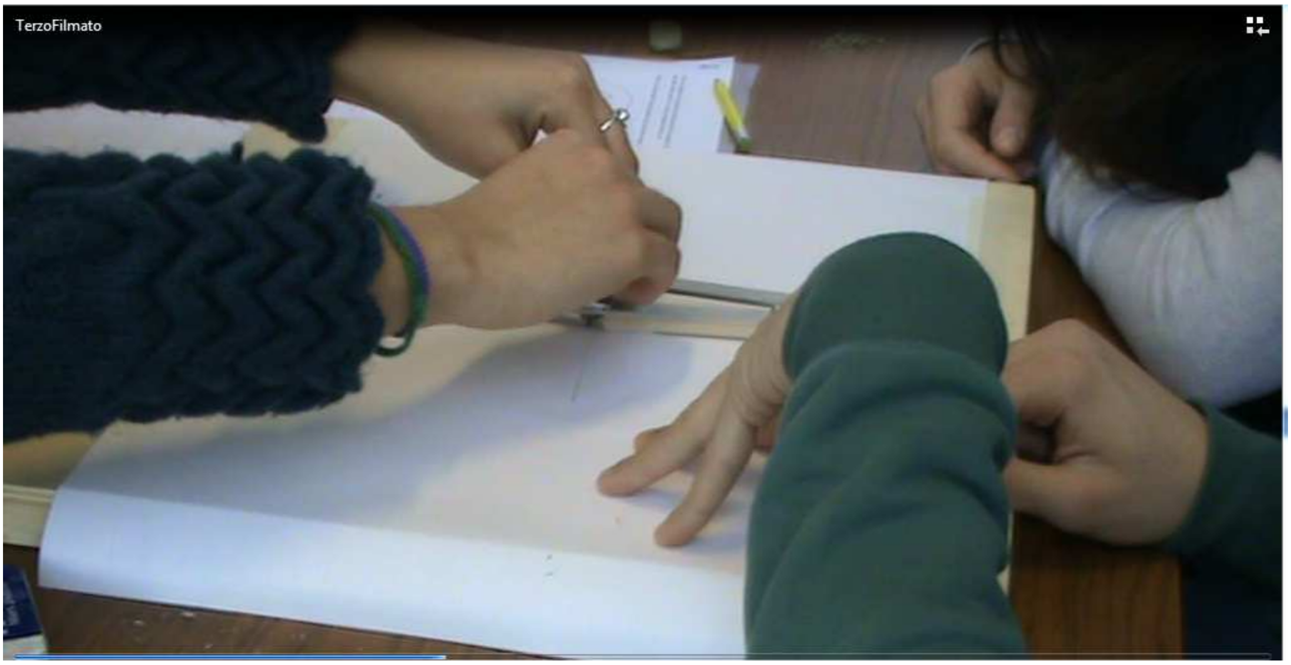
D1: prende la macchina da un tracciatore " *però secondo me se tu muovi queste cose..ti viene fuori..hai presente..se tu facevi così ti viene la riga dritta*" muove un tracciatore in modo da tracciare una linea (T=13:33)

Adesso D1 si riferisce alle figure che si possono tracciare con la macchina

Provano a mettere le mine per tracciare linee

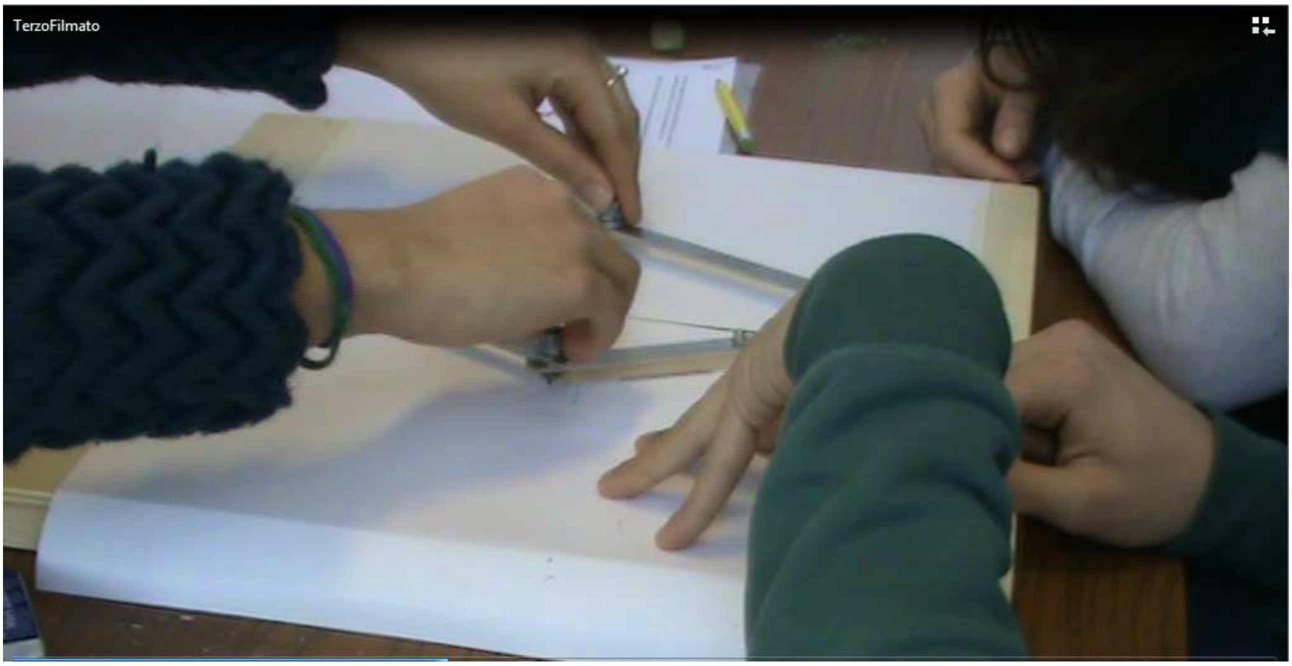
D3: "*esatto..tu fai..eh però te ne vengono due*" afferra i due tracciatori per muoverli lungo una traiettoria parallela alla scanalatura

Figura 22



Poi li apre, sempre cercando di far seguire delle traiettorie rette ai tracciatori

Figura 23

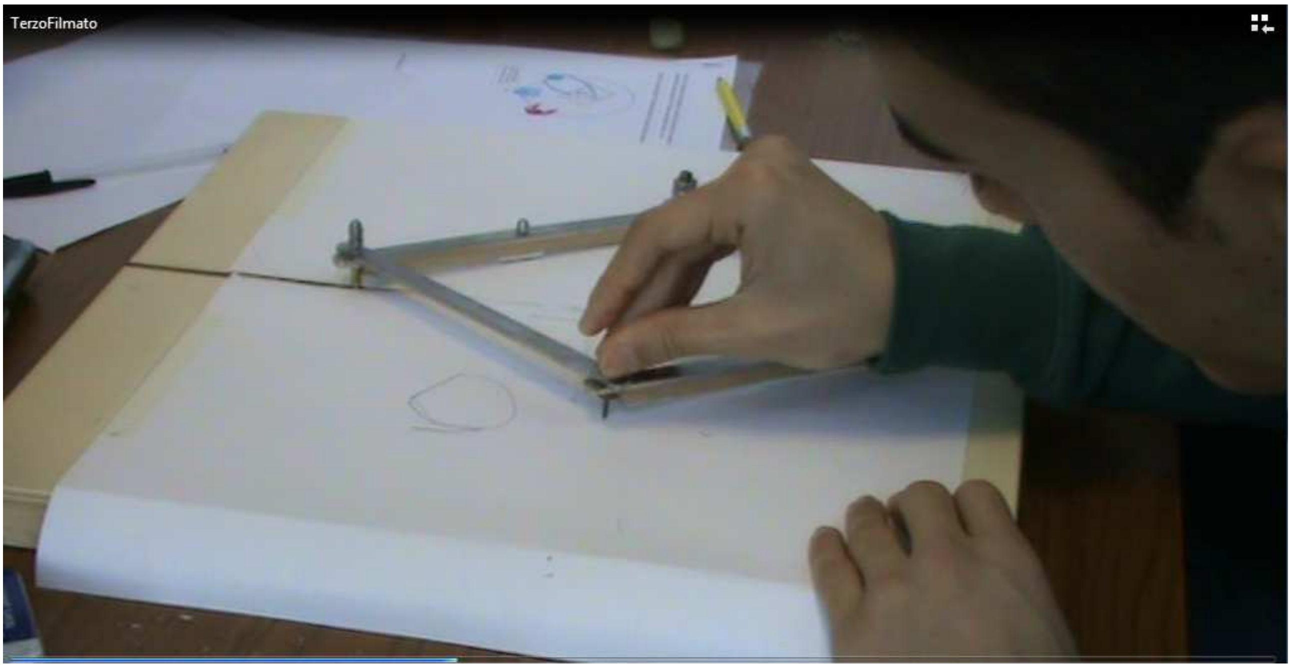


A questo punto muove ancora i tracciatori lungo una linea parallela alla scanalatura e ritorna a chiudere avvicinando i tracciatori.

D1: “*quello è un rettangolo*” riferendosi alla figura tracciata sul foglio (T=14:10)

Poi R prova a tracciare una figura circolare, e discutono sul fatto che si possa o meno riuscire a tracciare un cerchio. Alcuni attribuiscono il problema alle mine.

Figura 24



Poi R riprova e riesce a tracciare una figura più somigliante ad un cerchio e dice:

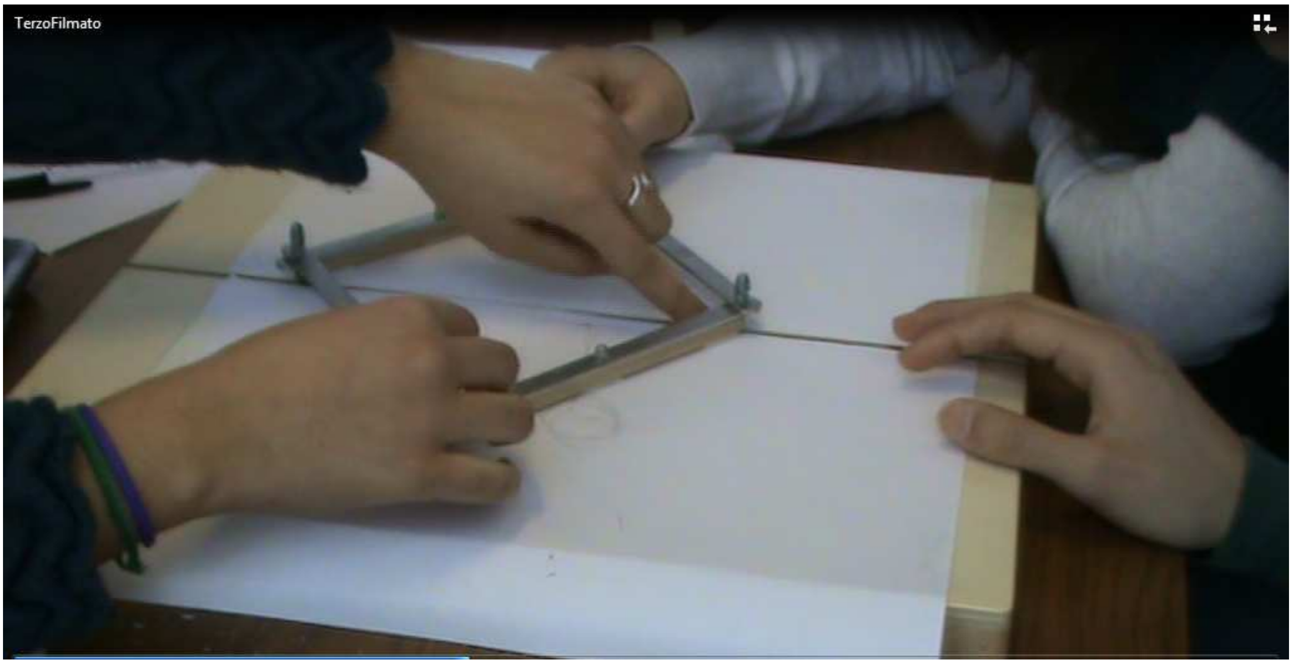
R “*se viene questa forma deve venire anche un cerchio..per forza*” (T=14:36)

A questo punto D2 inizia a muovere la macchina tenendola per un solo tracciatore a lei più vicino

R “*a questo punto si possono costruire tutti i tipi di figure*”

D3: “*poi volendo..qui ci sono le mine* “ indicando i tracciatori ”*ma si può utilizzare questa come un righello no?*” indica una delle asticelle. E mostra che si possono tracciare delle forme di rombo seguendole tutte

Figura 25



D1: “*comunque è quello che dicevo io l’altra volta…tu qualunque cosa fai, ti vengono delle figure geometriche*”

Non si capisce bene

D1:” *se lo sai usare bene puoi anche fare un disegno…tecnico*”

R: “*..va bene..quindi scriviamo che..*” (T=15:20)

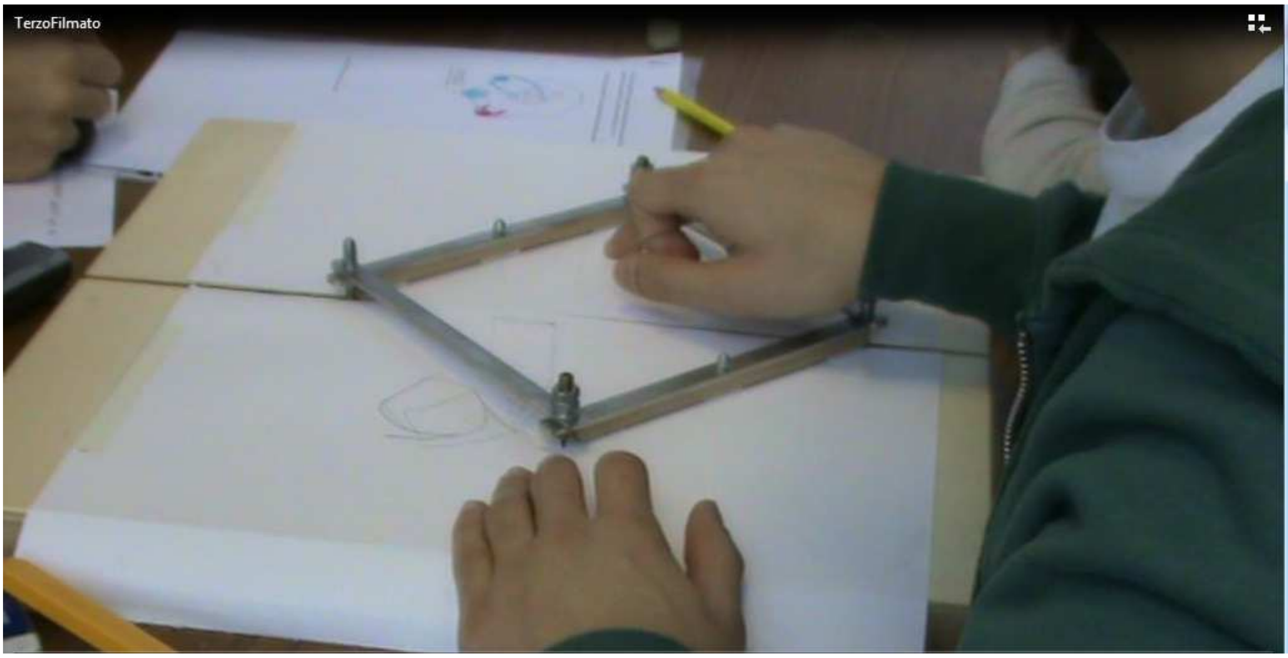
D3: “*la funzione..principale…una delle funzioni principali è quella di costruire..*”

D1: “*figure geometriche di tutti i tipi*”

R: “ *qualsiasi tipo di figura geometrica*”

R: “*un momento*” prende le mine “ *voglio vedere se traccio qua un triangolo*” indica il lato sinistro (rispetto a lui)della macchina “ *se viene un triangolo anche qua*” indica il lato destro (T=16:17)

Figura 26 R vuole controllare una ipotesi



D3 prova a muovere la macchina

D2: “*si muove allo stesso modo*”

D3 “*infatti..si muovono allo stesso modo*” (T=16:32)

R continua a muovere la macchina tenendo i due tracciatori

D1 “*eh si perché abbiamo detto che in qualunque modo tu muovi i bracci avrai la figura simmetrica*” (T=16:39)

R: “*quindi si ottengono figure simmetriche..da ambe le parti che sono identiche..no..no no*..”

D2: “*simmetriche*”

D3: “*che sono..speculari*”

R : “*che sono simmetriche rispetto alla*” e segna con il dito la scanalatura

D3: “*all’asse delle x*”

D1 legge a tutti la risposta scritta (T=17:34)

“*una delle funzioni della macchina è quella di costruire figure geometriche che sono simmetriche da ambo le parti della scanalatura* ”

D2, D3 e R provano ad inserire le mine e a tracciare ancora linee.

Dico che se hanno bisogno di un testo di geometria lo possono consultare. (T=18:32)

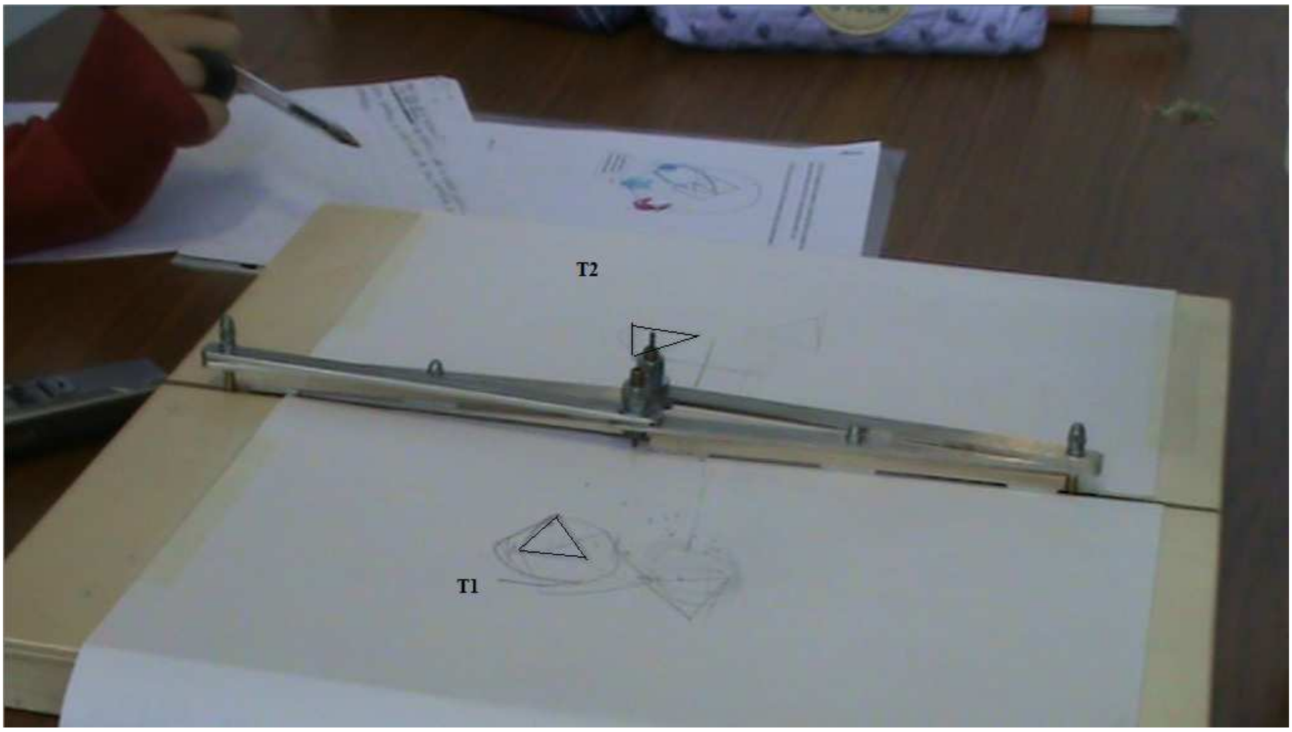
D2 e D3 provano a tracciare delle figure tenendo ciascuna un tracciatore con una mano.

D3 sottolinea con la matita la figura (sembra un triangolo) tracciata da un lato e poi dall'altro per verificare se sono simmetriche.

Figura 27

D2 "*si si sono simmetriche* "

Figura 28 I due triangoli simmetrici tracciati



D3 continuando a pensare alla risposta“ ..*in cui..cioè in tutte e due le parti c’è una figura e queste due figure sono simmetriche*”

D1: “ *visto che abbiamo detto che comunque si potrebbe formare un disegno tecnico..potrebbe esserci anche il suo..cioè quello di fare due disegno contemporaneamente*” (T=20:20)

D2 muove la macchina tenendo solo il tracciatore a lei prossimo

D3 chiede il libro e le dico che è a disposizione in classe

Anche D1 muove la macchina tenendo solo un tracciatore

Arriva D3 con il testo che iniziano a consultare (T=21:51)

D2 propone di cercare la congruenza di triangoli

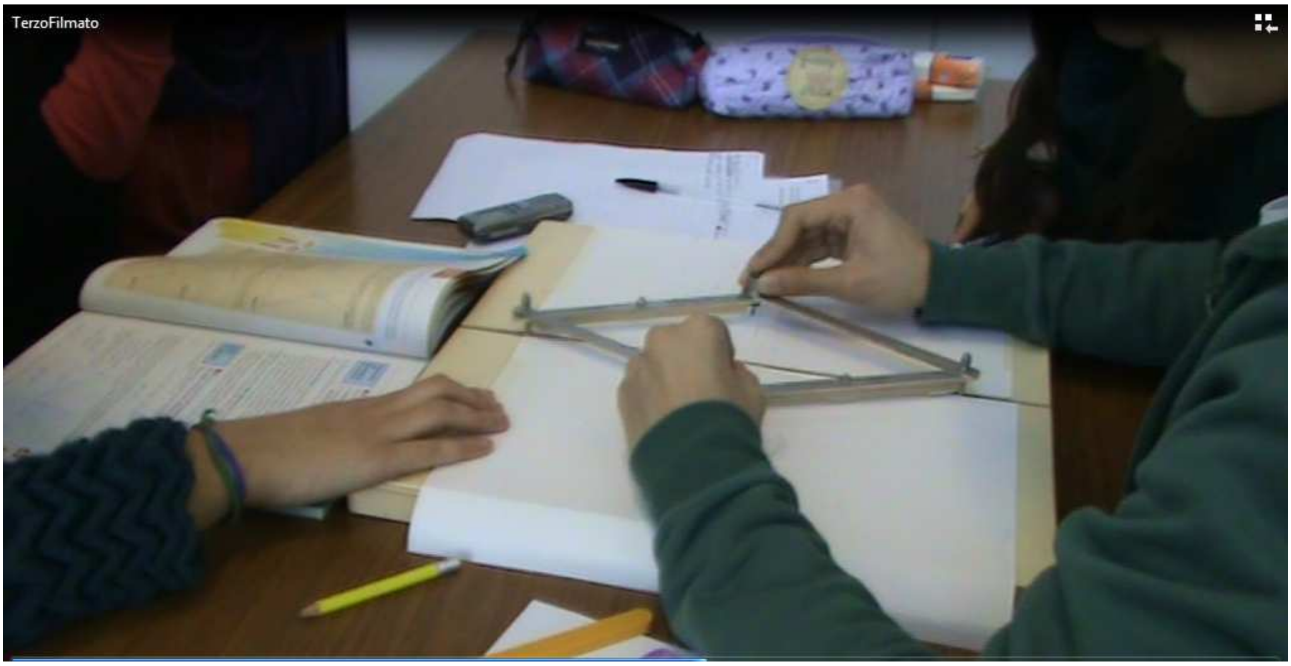
D3 paragona una figura del testo con i due triangoli tracciati “*..verrebbero così*”

D1 “*.ma i due triangoli hanno i lati congruenti..ma anche gli angoli?*”

D3 “*si..mmh si*”

R cancella e riprova a fare alcune curve, usa la macchina tenendo entrambi i tracciatori con le due mani

Figura 29



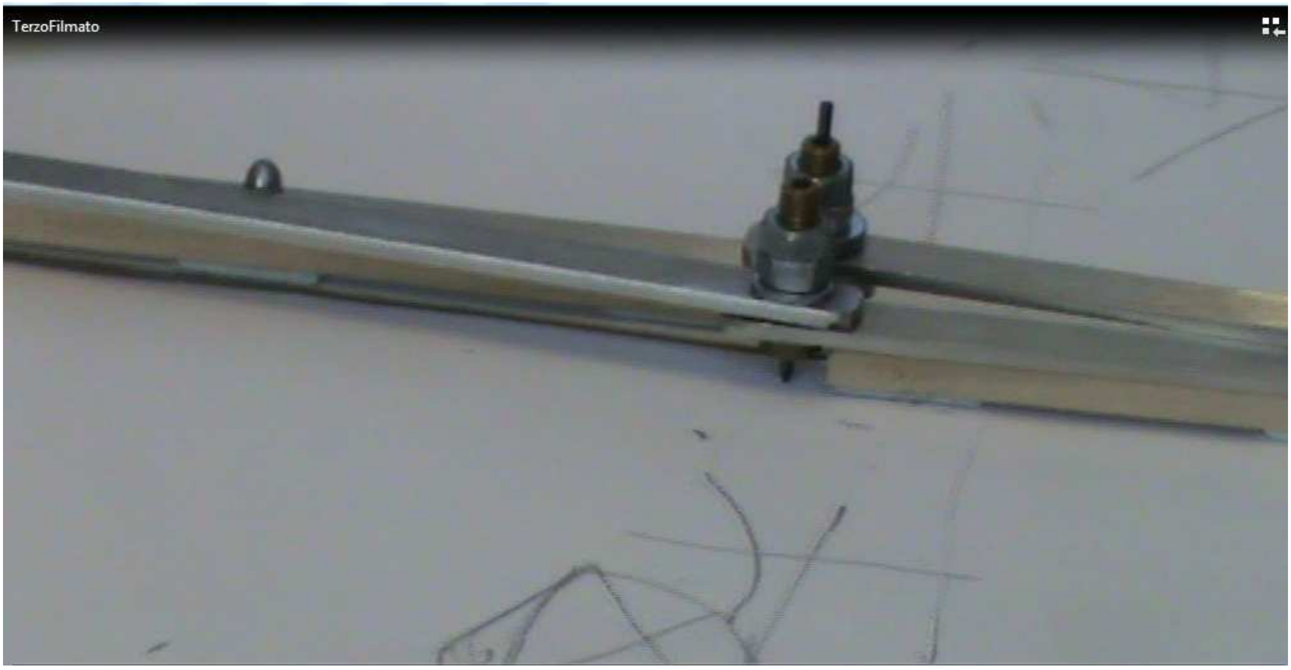
D3: “*quindi fa anche grafici dici?*”

Non si capisce bene

R ha tracciato due curve

R: “..*una sarà esponenziale e l’altra logaritmica*” (T=23:02)

Figura 30



D1: “*perché una esponenziale ed una logaritmica? Sono tutte e due logaritmiche*”

R ”*si?..si forse hai ragione*”

D1: “*..solo che una è crescente e l’altra è decrescente*” (T=23:18)

D2: “*si infatti questa è crescente*” ed indica con il dito la curva alla sua sinistra “*questa è decrescente*” indica quella a destra

Iniziano a discutere su cosa possano essere le curve tracciate da R cercando di ricordare le proprietà della funzione esponenziale.

R “*quindi?..traducete in parole questi pensieri*”

D3 “*eh..è che utilizzando comunque..*”

Si fermano e fanno ancora prove con i disegni

D3 ed R provano a ricordare come si disegna la funzione esponenziale

D3”*..comunque..utilizzando questa macchina possiamo fare anche dei grafici*” (T=25:43)

D3”*..con..come si dice?..corrispondenti a funzioni..possiamo più o meno fare dei grafici*”

R traccia ancora altre curve

D1 riferendosi a quello che ha disegnato “*..va beh..più o meno una parabola..dovrebbe essere*”

R: “*..possiamo usarla per ottenere grafici di diverse funzioni..e..*” (T=26:29)

D3: “ *grafici di diverse funzioni e analizzarli*”

D3 inizia a dettare la risposta e D1 la scrive

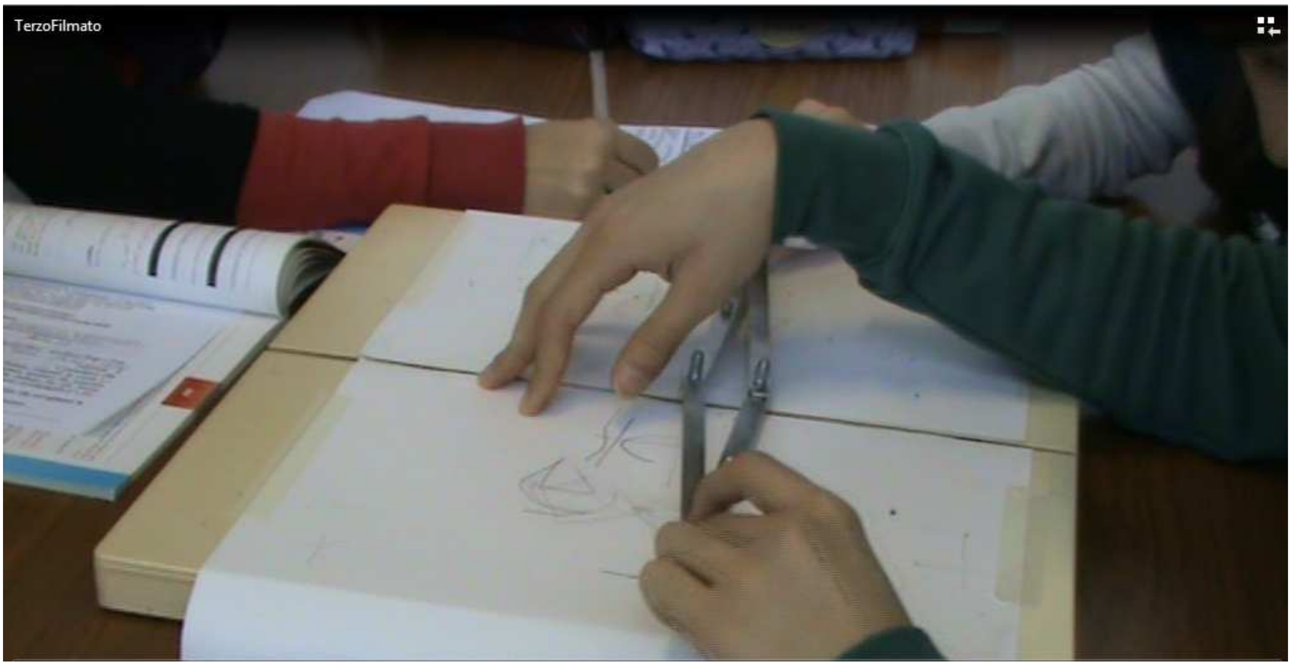
D3: “*Quindi..utilizzando questa macchina possiamo anche ottenere grafici corrispondenti a funzioni..di vario tipo..allo scopo di analizzarli*”

D1 “*fra parentesi scriviamo parabola*..”

D3: “*scrivi esempio: parabola..ecc*”

Nel frattempo R sta muovendo la macchina in un modo permesso dal fatto che i perni hanno un “gioco” nella scanalatura e le asticelle possono muoversi anche su un arco di cerchio.

Figura 31



D1: “*cioè praticamente avere questo grafico è come se tu non avessi più bisogni di righello, squadre e compasso*”

D3: “ *beh lo costruisci con questo*” indicando il tracciatore della macchina (T=28:20)

D3: “*..però io faccio*” e prende la macchina dai due tracciatori e li trascina in modo parallelo alla scanalatura

“ *..la mia linea è dritta..se io faccio*” avvicina ed allontana i tracciatori spingendoli con entrambe le mani “ *così..si le linee sono dritte però*..”

Non si capiscono alcune cose

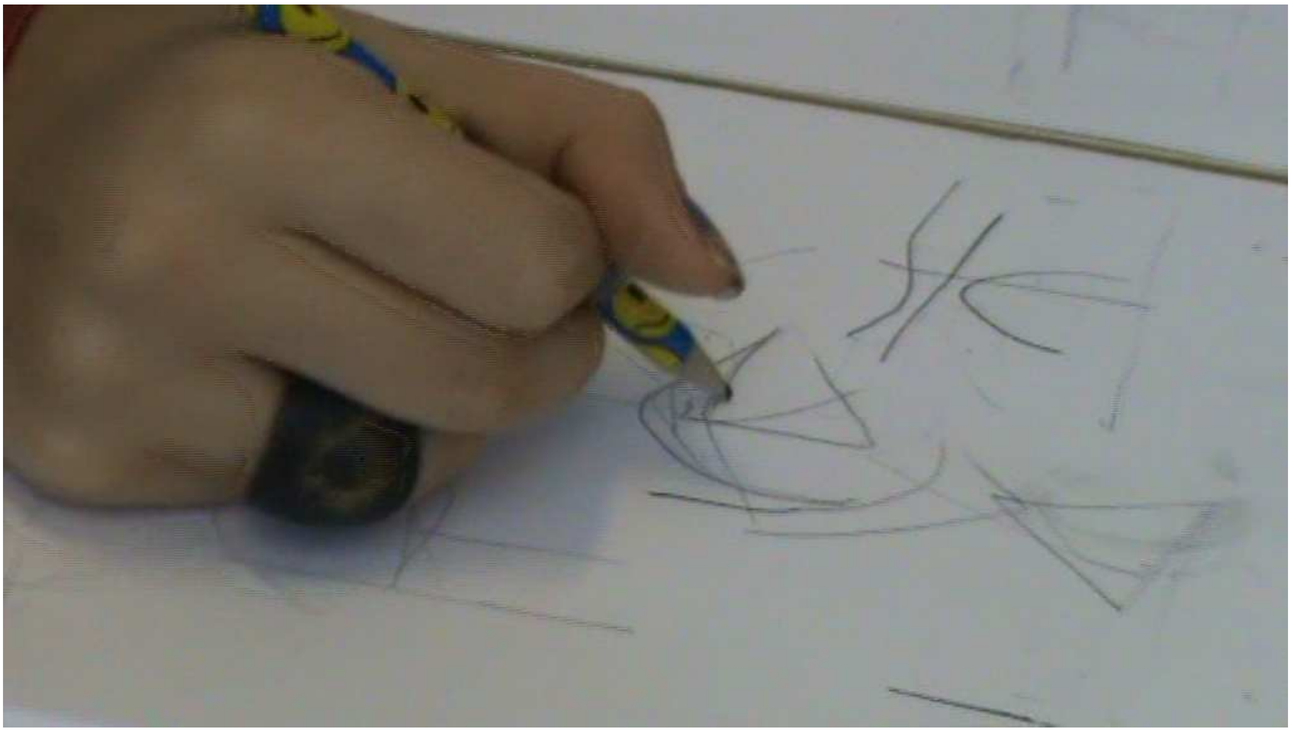
D1 "..*come ci insegnavano alle medie no?*.." sposta le asticelle ed inizia a tracciare a mano un disegno

"*bisognava fare che tipo..si prendeva il foglio che era diviso in due..poi si faceva un quadrato*.." traccia un quadrato " *poi qua sulla base di questo si costruiva*.."

D3 "*è il disegno tecnico*"

D1: "*poi si costruiva..tipo un quadrato..e con questo*" indica il rombo articolato " *si potrebbe fare*" (T=29:33)

Figura 32



D3: “*io non ci riuscirei a farla*”

R “*qua ci stiamo infognando..*”

D3: “*oltre a quello che abbiamo detto..perché l’hanno creata sta macchina?..in effetti forse per fare a meno di squadre e righello..quindi per risparmiare del tempo*” ride

D1 e D2 suggeriscono che sia un modo per avere un metodo semplice per sostituire squadre e righelli

D3 “*si ma per me non serve a quello*”

R “*neanche per me*” (T=34:45)

D3 “*anzi..se lo fai con squadra e righello ti viene più preciso lo posso, io con questo coso non saprei fare niente* ” indica il rombo “*posso analizzarlo meglio e magari questo*” la macchina “*la utilizzo solo per un esempio tipo*” prende la macchina e la muove per formare vari rombi “*io questo lo utilizzo a figura già fatta..capito?*”

R traccia un rombo seguendo le asticelle della macchina

D3 prosegue il suo esempio spostando la struttura e disegnando un altro rombo più schiacciato

D3”*..ma non so..dipende molto da cosa vuoi ottenere, da cosa vuoi fare*”

D1: “*va bene..è un modo alternativo per costruire figure* ”

D1 “*ovviamente non la usa un bimbo delle medie..*”

D3 “*ma neanche noi*”

D1: “*la userà..*”

D3 “*un matematico che deve fare..qualche sua teoria*”

D1 “*degli esperimenti*” (T=36:06)

D3 "*d'altronde scusa..gente come Pitagora come c'è arrivata a fare.. le sue cose..utilizzando una macchina..magari con quello tu puoi fare i tuoi teoremini..*"

Non si capisce bene

D3 "*..non è molto moderna*"

D3 chiarisce che si possono formulare delle teorie usando la macchina a loro data

D1 "*ma questa macchina è moderna?*"

Spiego che il tipo di macchina che hanno è dell'800 ma che poteva essere alla portata anche dei greci per la sua semplicità.

D1 parla della protagonista del film Agorà (Ipazia) che aveva utilizzato un meccanismo per dimostrare alcune cose.

Non si capisce bene

R "*ma secondo te questa macchina è piovuta dal cielo o qualcuno l'ha costruita?*"

D3 "*qualcuno l'ha costruita*"

R "*per costruirla a questo modo bisogna presupporre qualcosa..*" (T=38:18)

D3: "*infatti è per questo che ti ho detto..tu ti fai le tue teorie su un foglio con squadra e righello eccetera..però per vedere come si comporta se fai determinate cose usi questo..non so*"

D3 "*per giustificare le tue teorie puoi vedere se a livello pratico, invece che fare molti disegni, usi questo..però..non so* "

D1 "*sapendo che la matematica segue delle regole semplici regolari, perfette..se tu prendi uno strumento del genere..*" non si capisce bene

D1 "*cosa scriviamo?*"

D3 "*..da un punto di vista pratico* " chiede come si chiama la macchina

Dico che è un parallelogramma articolato (in realtà rombo)

D3 chiede se è sbagliato chiamarla macchina matematica, io dico che non è sbagliato ma il termine è abbastanza generico

D3 "*da un punto di vista pratico questa macchina* può *essere utilizzata per dimostrare..verificare le ipotesi fatte..su un foglio di carta..le ipotesi di teorie fatte mediante altri strumenti* "

D3 : "*un architetto la potrà mai utilizzare sta macchina?*"

R "*hanno anche altri strumenti..però..non so*" (T=38:13)

D3 "*perché cioè..va bene magari la potevano usare per fare le loro teorie..per analizzare un grafico..ma servirà pure a qualcosa da un punto di vista proprio pratico..nella vita reale..*"

D1: " *io l'ho detto..magari per fare dei disegni tecnici..o magari servirà a qualcosa anche farne due* " indica con la mano il fatto che si formano disegni dai due lati (T=38:51)

Intervengo dicendo di concentrarsi sulla particolarità della macchina che hanno in realtà già individuato, che è ciò che la distingue da una matita, faccio notare che usando solo una matita potrebbero disegnare le stesse cose che hanno fatto con un solo tracciatore. Cosa c'è di particolare nella macchina?

D3 “*che se si disegna un disegno di qua, ne otteniamo uno dall’altra parte simmetrico*” (T=39:22)

Quindi quello che fa che cosa è?

D3 “*è disegnare la stessa figura due volte..facendo un solo disegno*”

Ok, adesso come potreste dimostrarlo..andando avanti in maniera dettagliata sulla dimostrazione?

D3 “*se a me dicono ..con questa macchina tu puoi fare due disegni utilizzando*..*in una mossa mi dicono..come mai?Perché?*”

D3 “*io vedo questa macchina..mi accorgo che ho due tracciatori*..”

D2: “*come è che diceva il testo..in qualunque modo tu muovi la macchina*..”

D1 “*se muovi il punto sinistro l’altro si muove nello stesso modo*”

D3 “*è uguale anche se muovo il punto destro*..” (T=40:43)

Non si capisce bene

D3 “*e quindi poi?*”

D3 prova a muovere la macchina sia usando un tracciatore che entrambi.

“*se io muovo questo*” muove i tracciatori con entrambe le mani “*vedo che ho la stessa cosa..no?..me ne accorgo*”

(T=41,12)

Discutono sul fatto che i punti ed i disegni formati sono uguali od opposti

D1 “*sono opposti perché sono così..se poi stacchi i fogli e li metti uno di fianco all’altro sono uguali*” (T=41:37)

R fa un esempio per dimostrare che D1 non ha ragione , dice che se i disegni venissero uguali tracciando una linea obliqua sul lato di sinistra (lui traccia una linea immaginaria dal basso a sinistra all’alto a destra), dovrebbe venire una linea dello stesso tipo a destra, invece non è così.

Allegato9_ProtocDelaunayParte1

Protocollo del gruppo filmato

Seconda sessione: biellismo di Delaunay

Prima parte

Introduzione al lavoro e interventi

Anche a questo gruppo viene introdotta brevemente la macchina e consegnati i materiali. Viene fissata la video camera ad un lato del tavolo sul treppiede ed posizionato sul tavolo il registratore vocale. Durante il filmato lo sperimentatore è intervenuto per chiedere di precisare quello che faceva la macchina ai fini di rendere sensata la ricerca di una dimostrazione (altrimenti non potevano sapere cosa dimostrare). E' intervenuto anche per dare un chiarimento sulla domanda relativa alla scelta della migliore rappresentazione grafica della macchina, visto che nei loro criteri di scelta è emersa anche una caratteristica geometrica che non avevamo considerato, ma che non si voleva che influisse sulla loro risposta (questo è stato un errore di progettazione). Infatti per la scelta dello schema hanno osservato che in uno dei disegni proposti un punto non divideva il segmento nelle stesse proporzioni della macchina. Il protocollo che segue è tratto dal primo filmato (Prima parte2; PrimoFilmatoSeconda.MPG), trascrivendo i dialoghi (in certi casi non è stato possibile) e scegliendo immagini degli episodi più significativi.

Protocolli tratti dal filmato

Gli studenti si dispongono in maniera differente rispetto l'ultimo incontro

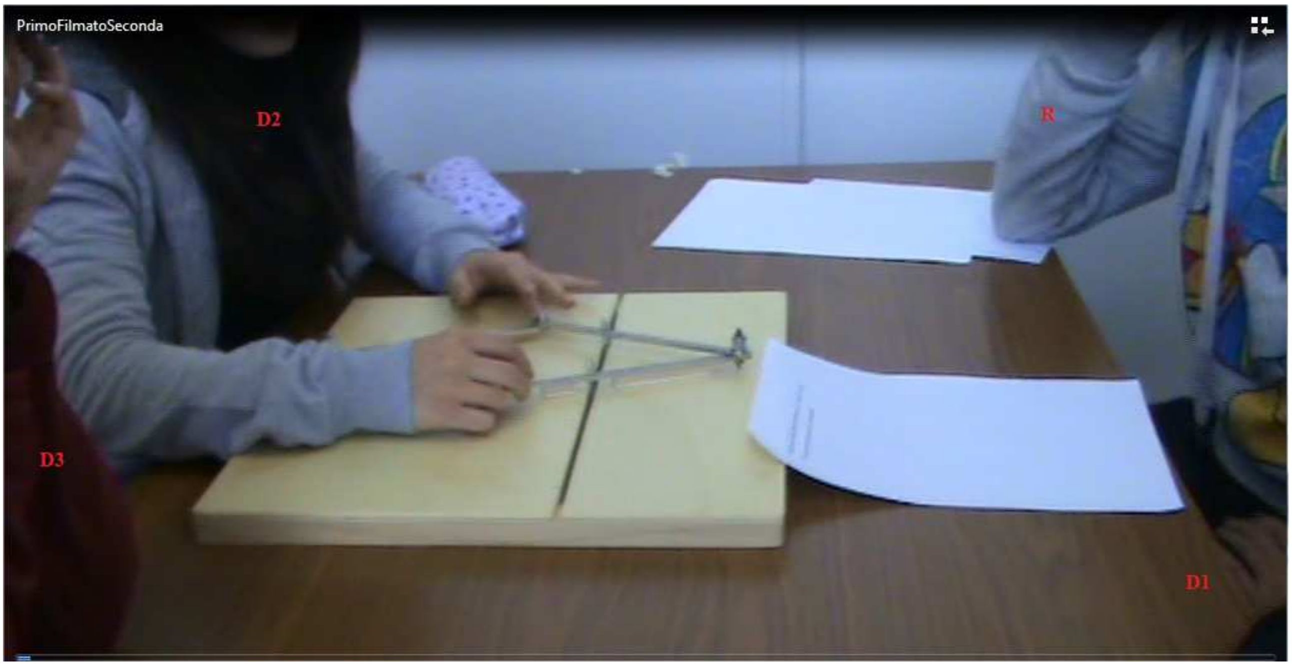


Figura 1: nuova disposizione degli studenti

Consegnata la macchina iniziano subito ad esplorarla e a fare confronti con quella degli incontri precedenti.

D1, R e D2 notano che la scanalatura non è più centrale e provano a misurare con le mani a che distanza si trovi dai bordi.

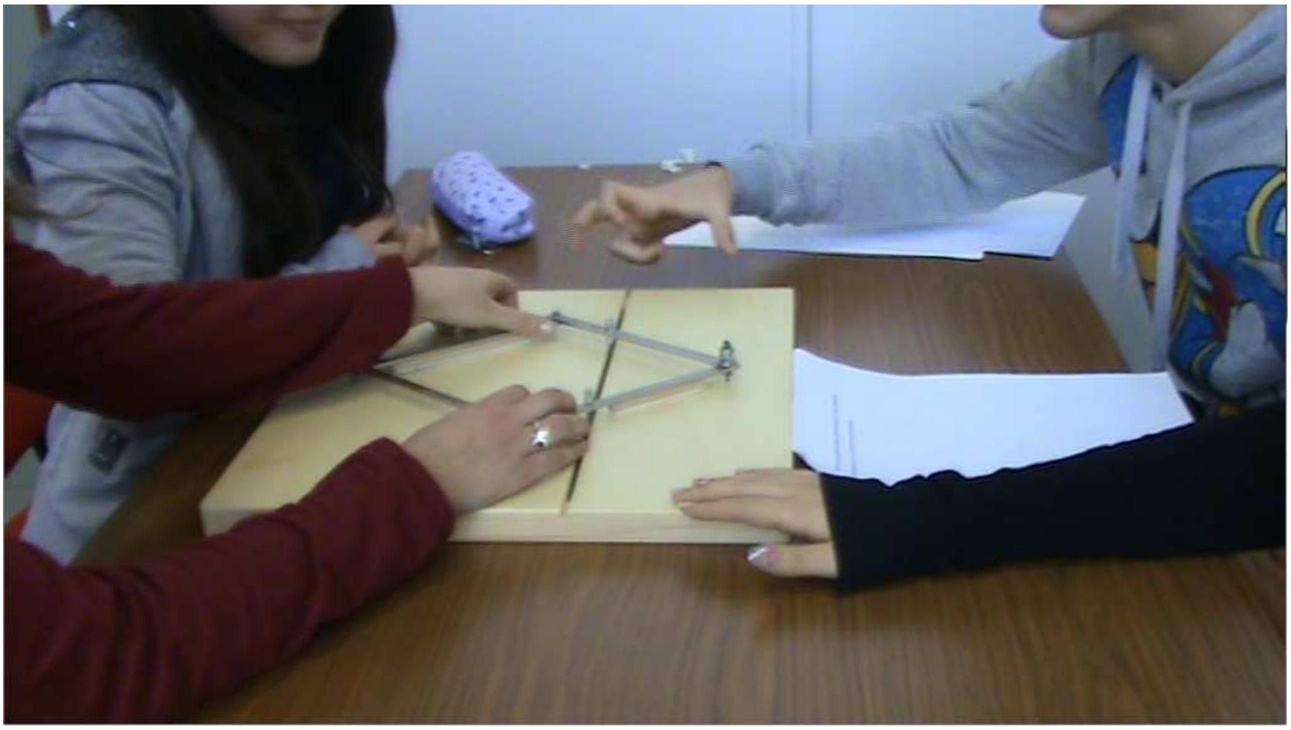


Figura 2: R prova a misurare con la mano

D1 ipotizza che si trovi ad un terzo , misura con le mani poi dice “ *sì, è un terzo*”

Nel frattempo D3 muove la macchina tenendola per il tracciatore prossimo e poi D2 legge il nuovo testo. (T=0:35)

R prende un righello e misura le distanze fra la scanalatura ed i bordi, ma non fanno commenti particolari sulle misure.

D3: legge il testo “..*descrivi come è fatta la macchina*..” poi propone “*partiamo dalla base*” toccando la base di legno, “..*quindi la scanalatura non è in mezzo*..”

Mentre D1 inizia a scrivere la risposta D3 continua a muovere la macchina usando un solo tracciatore, come si mostra nella figura seguente

Figura 3

Io faccio notare i materiali che possono usare: fogli da disegno e nastro adesivo

Quindi fissano i fogli alla base

D1: legge la risposta“..*la macchina non presenta più la scanalatura centrale ma*..”

R “..*non era un terzo*” riferendosi alle misure fatte prima (T=2:35)

Non sanno bene come spiegare questo nuovo fatto.

D3 “ *ma quant’è?*”

D1: “*quasi un terzo*..” riferendosi al rapporto fra la distanza della scanalatura ed il bordo più vicino rispetto alla lunghezza del bordo

D1 continua a scrivere “..*ma si trova a circa un terzo*…”

Non sono ancora convinti. D2 muove la macchina tenendola per i due perni non tracciatori con entrambe le mani.

R “*io direi che..l’elemento* ” D3 “ *che salta agli occhi*” R “*che maggiormente risalta*..” D3 “*che notiamo subito, immediatamente è la nuova posizione della scanalatura.*” (T=3:55)

D3 “*non più al centro*”

R muove la macchina tenendola per i due tracciatori, come mostrato in figura

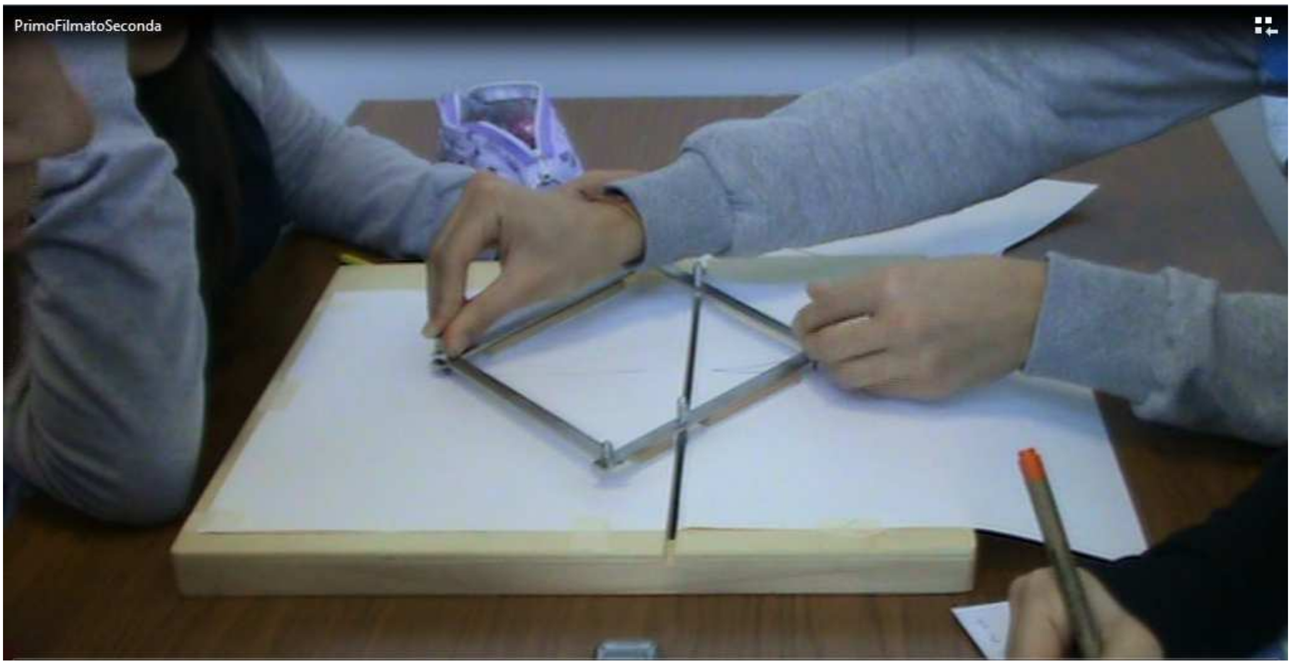


Figura 4

D3 detta “*vediamo immediatamente che la scanalatura non è più al centro* ..*ha una posizione diverso, non è più al centro*”

R commenta qualcosa sul testo ma non si capisce

D3 indicando le aste “*vediamo anche questo come si comporta..poi magari diciamo come fa anche nel senso di figure*” (T=4:45)

R “*secondo me dobbiamo limitarci a dire come è fatta la macchina*”

Iniziano a discutere sul fatto che la macchina non forma più due triangoli come quella precedente ma due figure diverse che identificano in un triangolo ed un pentagono, dato che contano 5 lati.

D2 continua a dettare la risposta “..*e di conseguenza* ” R “..*le figure* ”

D3 “*però se diciamo le figure sembra che siano le figure tracciate, invece sono queste qua*..” indicando le due figure formate dalle asticelle e la scanalatura

D2 “..*le figure date dalle braccia della macchina* ”

R “*ma devi metterci in mezzo anche la scanalatura*” ed indica la scanalatura che permette di distinguere le due figure (T=6:36)

R “ *altrimenti la macchina è un rombo*”

R continua con la costruzione della risposta “*di conseguenza se poniamo come base la scanalatura il lato ipotetico di una ideale figura*..”

D3 “*scrivi così..se poniamo la scanalatura come lato ipotetico* ”

R “*le figure geometriche che otteniamo dalla semplice osservazione della macchina, senza muoverla..* ”

Continuano a discutere ed R dice che non si vedono più due triangoli congruenti (T=7:47)

R “*..possiamo notare dalla semplice osservazione della macchina…non rappresentano più due triangoli congruenti..*”

D1 solleva alcune obiezioni sulla congruenza, cercando di sfruttare alcune degli elementi teorici che avevo spiegato nella lezione teorica sulla macchina precedente.

D3 prova a costruire una scanalatura con la riga e la matita

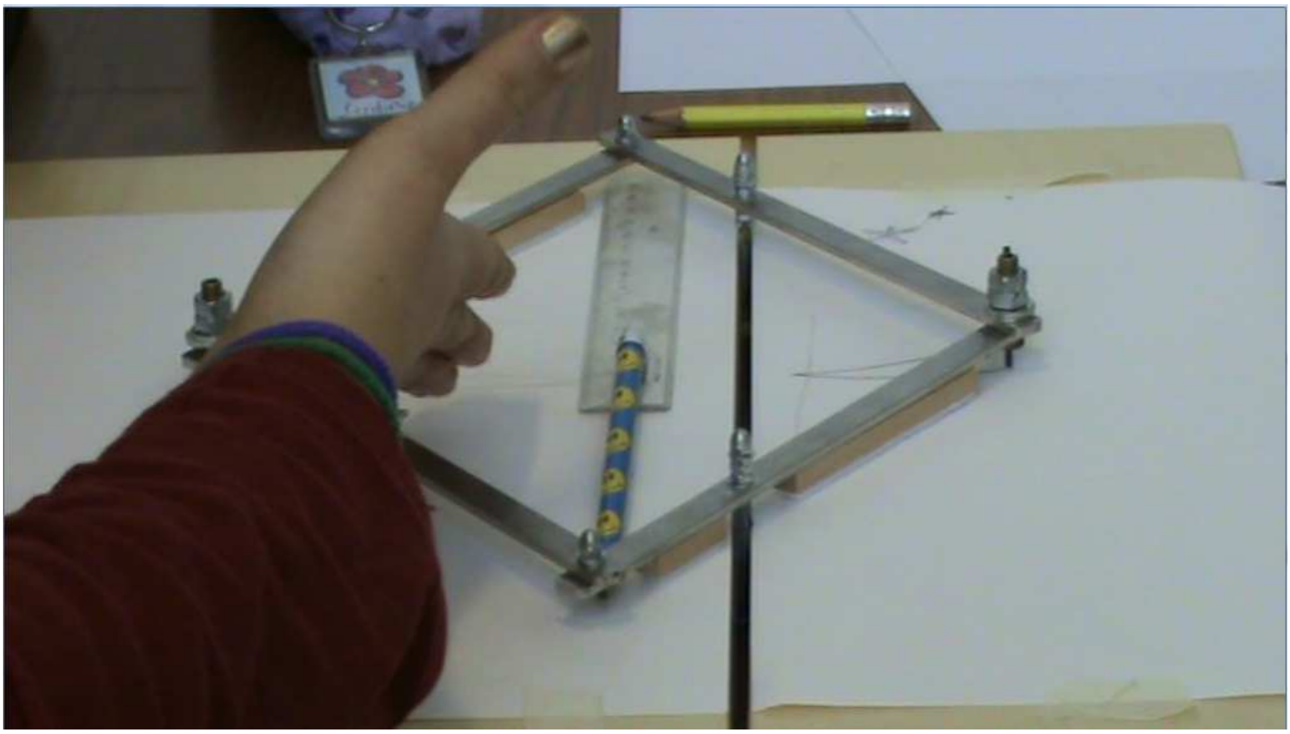


Figura 5

Non si capisce bene cosa dicano

D3 “*metti che questa sia la macchina vecchia*” intende la macchina che si avrebbe considerando il righello e la matita come scanalatura (T=9:50)

D3 “ *la matita ed il righello sono la scanalatura..come sono quindi questi due triangoli?* ” indica i due triangoli nei quali risulta diviso il rombo da matita e righello

Figura 6

D1 "..*sono congruenti*" D2 "..*appunto*"

Poi D1 sposta la macchina (figura sotto) e dice " *per me adesso non lo sono più*"

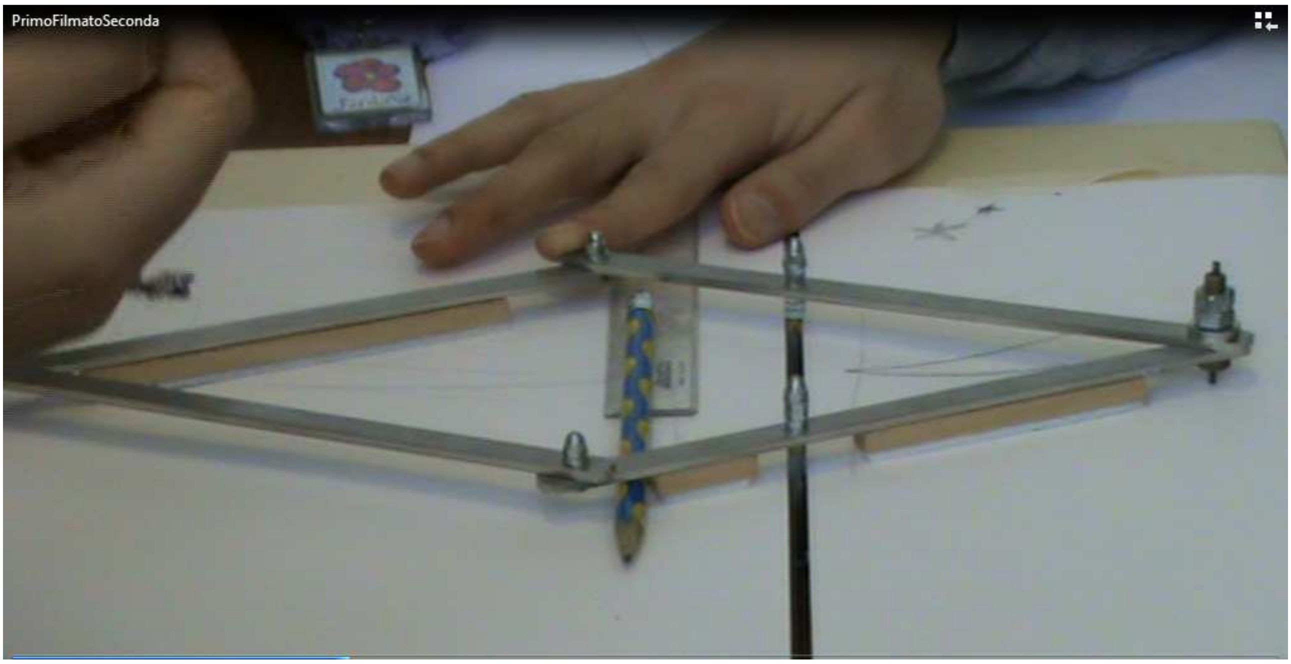


Figura 7

D1 " *bisogna vedere, perché bisogna vedere dove cade il punto dell'altezza* " torna a proporre alcuni concetti che avevo trattato nella parte teorica sulla macchina precedente

Pongono la domanda se le aste siano o meno congruenti e D1 prende il righello per verificarlo

(T=10:41)

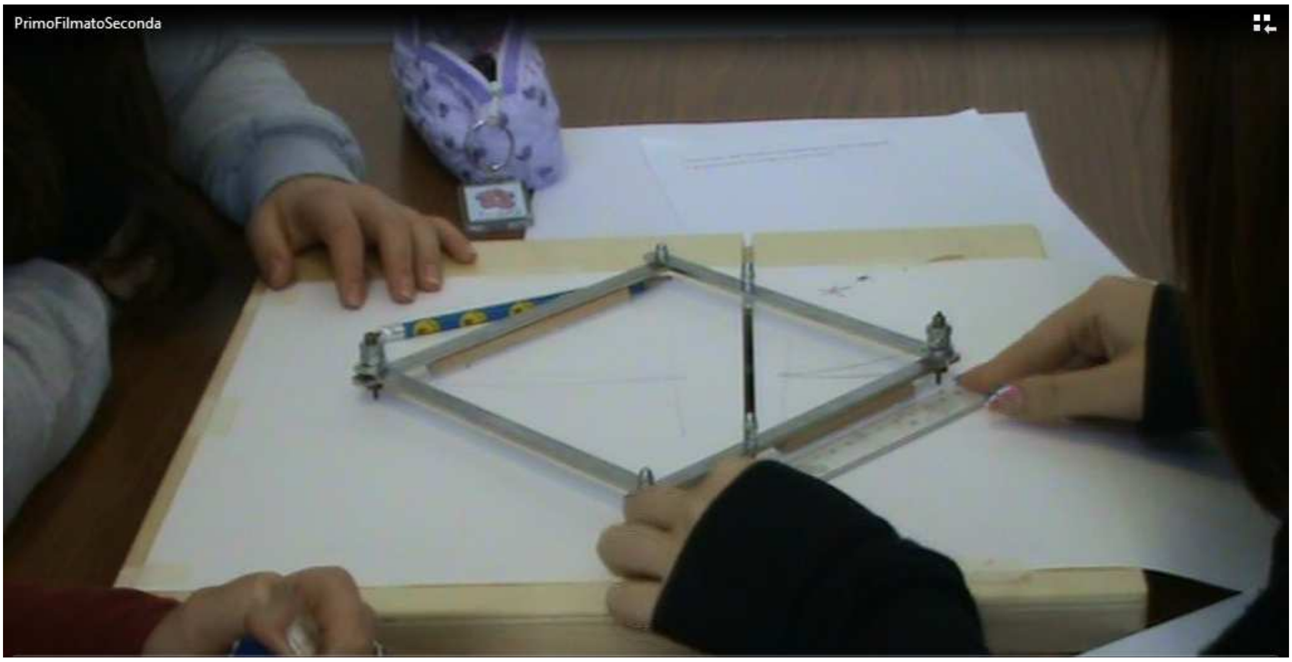


Figura 8

Poi si ferma perché D2 e D3 dicono che si stavano ponendo la domande relativamente all’altra macchina.

Quindi iniziano a vedere altre differenze con la macchina precedente.

D2 “*se tu fai così*” mette la matita come aveva messo D3 a formare due triangoli “*sono congruenti*”

D1 “ *sono uguali o no sti bracci?*” (T=11:07)

Non si capisce bene

D2 sposta la macchina in modo da formare un quadrato ed R misura due lati

R “..*si sono uguali*”

D2 “..*poi se viene un quadrato*..”

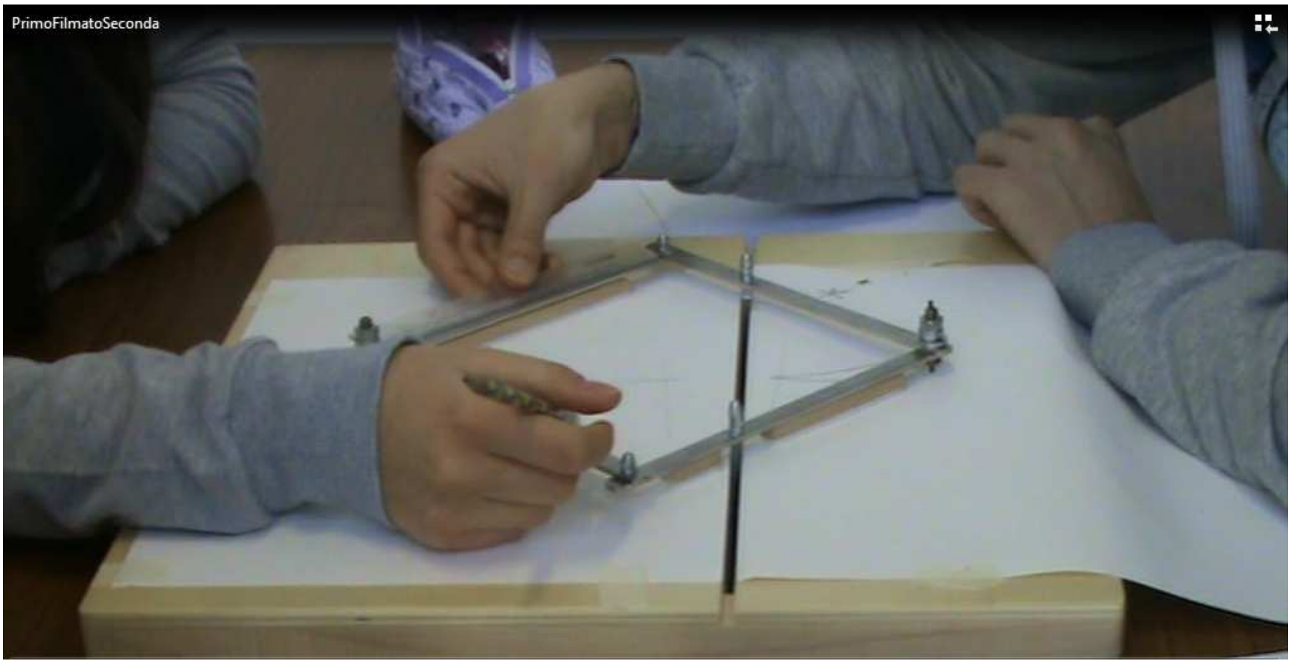


Figura 9

R “*chi è che diceva che non erano uguali?*”

D2 “*no..non dicevo che non erano uguali..è che se li metti così..*” muove la macchina in modo da avvicinare le asticelle

D3 “*..sono i triangoli che si formano che non sono uguali*”

D1 “*..va bene..quindi*” vuole continuare a scrivere la risposta “ *le figure geometriche che possiamo vedere* ”

R “*dalla semplice osservazione lo hai scritto? Cioè..senza muovere sto qua*” muove le asticelle

R “*..non sono più due triangoli ma bensì..un triangolo ed un pentagono*” (T=12:03)

Dicono alcune cose che non si capiscono

D3 “*bene..cosa altro possiamo notare dalla semplice osservazione?*”

D1 “*potremmo dire che a differenza della precedente macchina le figure che verranno da un lato e dall’altro non sono congruenti*” (T=12:48)

R “*tu stai già rispondendo alla seconda domanda..qui chiede come è fatta la macchina*”

D1 “*va bene..ci sono questi che non c’erano*” indica le asticelle di legno che sono fissate sotto le aste di metallo

R “*ah..è vero!*”

D3 “*..come si muove…*”

Discutono sulla possibile funzione delle asticelle di legno.

D3 propone che servano a sostenere le asticelle di metallo ma R e D1 credono che non sia per questo perché nell'altra non c'erano.

Mentre toccano la macchina D3 con le dita decide di confrontare la distanza dai perni vincolati alle giunzioni delle asticelle (figura sotto)

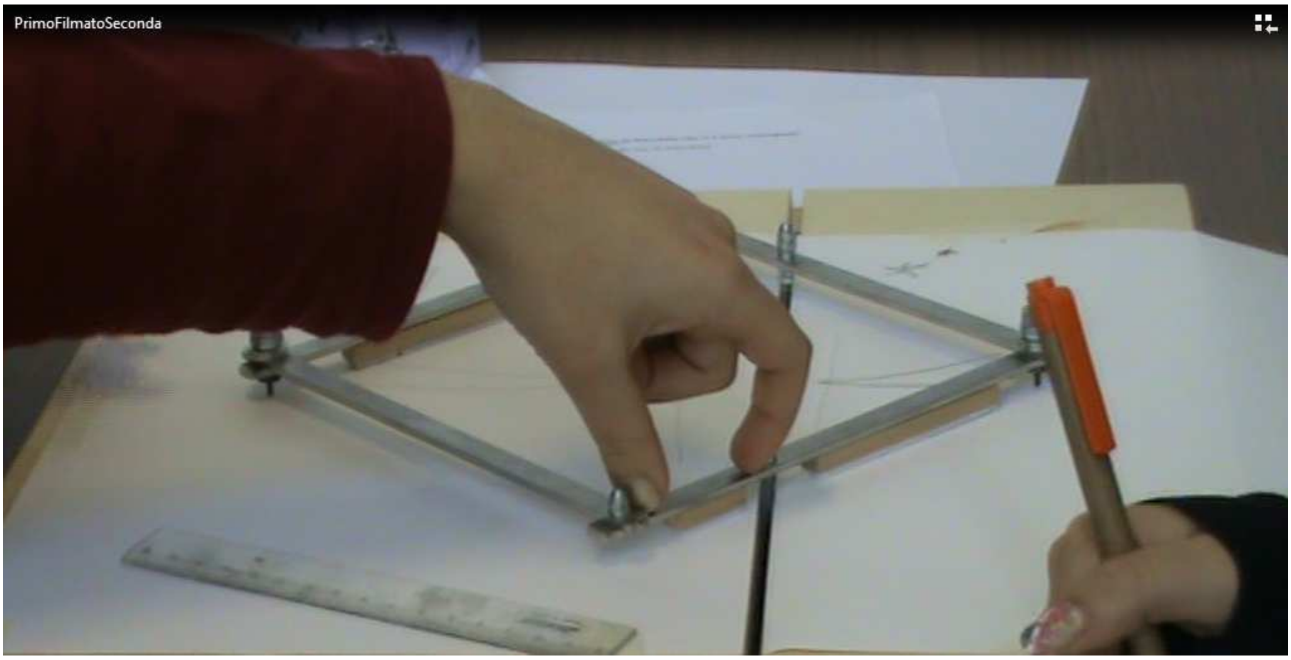


Figura 10

D3 "..*più che altro guardiamo come si muove*.." prende la macchina da uno dei perni vincolati alla scanalatura e la muove (T=13:42)

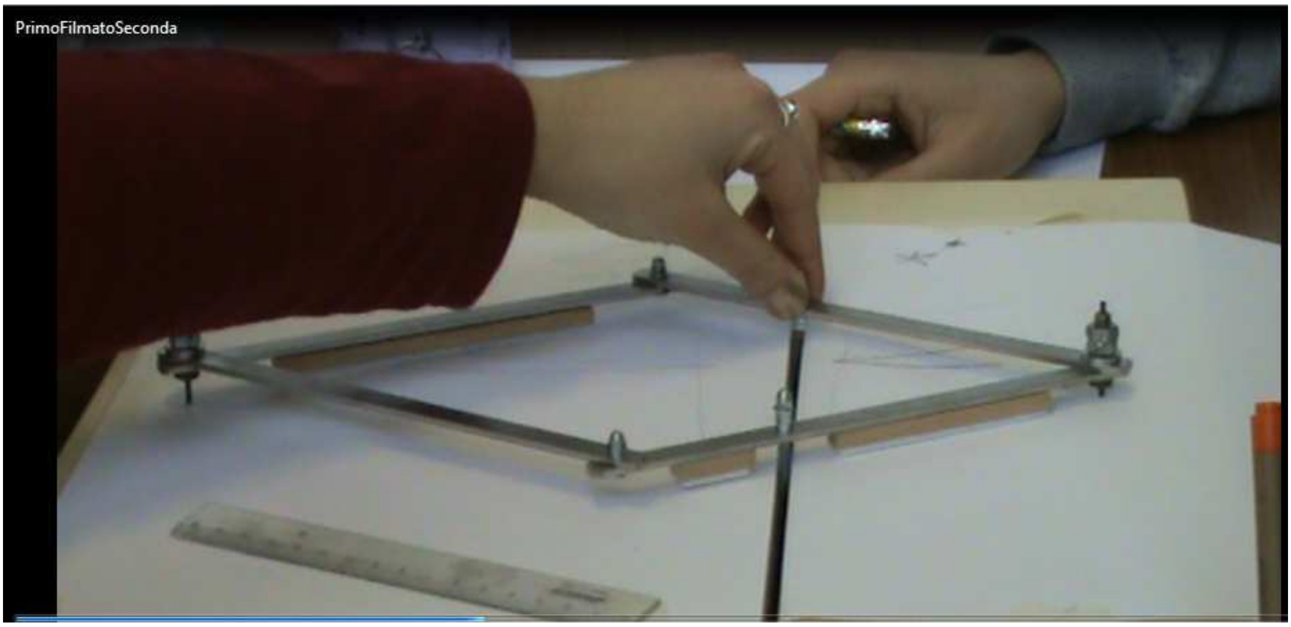


Figura 11

D3 muove la macchina anche usando le giunzioni senza tracciatore

D1 *“..il meccanismo è come quello dell’altra..se tu muovi il lato opposto..*”

Discutono sulle differenze con l’altra macchina

D3 “ *erano i lati o gli angoli l’altra volta?*” riferendosi ai punti vincolati alla scanalatura

(T=14:18)

discutono su quali fossero i punti fissati nella scanalatura ed iniziano a capire che la differenza è che le giunzioni agli angoli erano quelle vincolate a scorrere nella scanalatura.

D3 “*..quindi possiamo dire che le due..questi*” indicando i due perni vincolati “*..non sono più negli angoli ma nei lati*” (T=14:42)

Dicono alcune cose che non si capiscono

D3 detta la risposta a D1 che scrive “ *i..che si muovono nella scanalatura..che sono all’interno della scanalatura..* ”

R “*.però io direi che scorrono..*” D3 “*..che scorrono all’interno della scanalatura..non sono più posti negli angoli..in due degli angoli della figura…* ”

D1 “*..non della figura perché la figura è quella che ti viene qua* ” indicando i fogli

D3 “*..dei bracci*” indicando le asticelle della macchina (T=16:08)

R “*..della macchima oppure..però per macchina non è che si intende solo..si intende anche il legno*”

D3 “*..della parte di metallo* ” ride

D1 “*come si chiama?*”

D3 “*..bracci..diciamo bracci*”

R “*dei bracci della struttura metallica*” continua la frase che D1 sta scrivendo come risposta

D3 “ *…ma ai due lati della stessa*”

D1 “*ok..possiamo anche dire che sono posizionate in maniera uguale..*” si riferisce alla distanza dei due perni dalle giunzioni e prova a verificare con le dita

Figura 12

Discutono su come dire questa cosa, D1 intende dire che i perni sono alla stessa distanza dalle due giunzioni che senza tracciatore.

D3 prende il righello e prova a misurare la distanza.

D3 "..*più o meno*" intende che sono più o meno alla stessa distanza
(T=17:09)

D2: "..*e presentano la stessa distanza dai..dagli…*"

R "..*non c'è altro modo per dirlo?*"

D1 legge la risposta che hanno scritto fino a quel momento

D1 propone di dire che in questa macchina ci sono anche delle asticelle di legno (quelle sotto alle aste metalliche).

D1 " *per ma hanno senso*"

D3 "*per me non servono ad una acca*"

D2 propone che l'utilità sia quella di permettere alle asticelle di metallo di muoversi meglio sulla tavoletta e nota che sotto al legno c'è del feltro e quindi serve a ridurre l'attrito.

D1 "*ma allora perché nell'altra non c'erano?*"

D3 " *l'avrà fatta un'altra persona…*"

D3 "..*ma non ha un valore matematico..geometrico*"
(T=18:34)

D2 inizia a muovere la macchina tenendola per il tracciatore a lei prossimo.

Passano alla seconda domanda

Poi D1 e D2 usano la macchina tenendo ciascuna un tracciatore

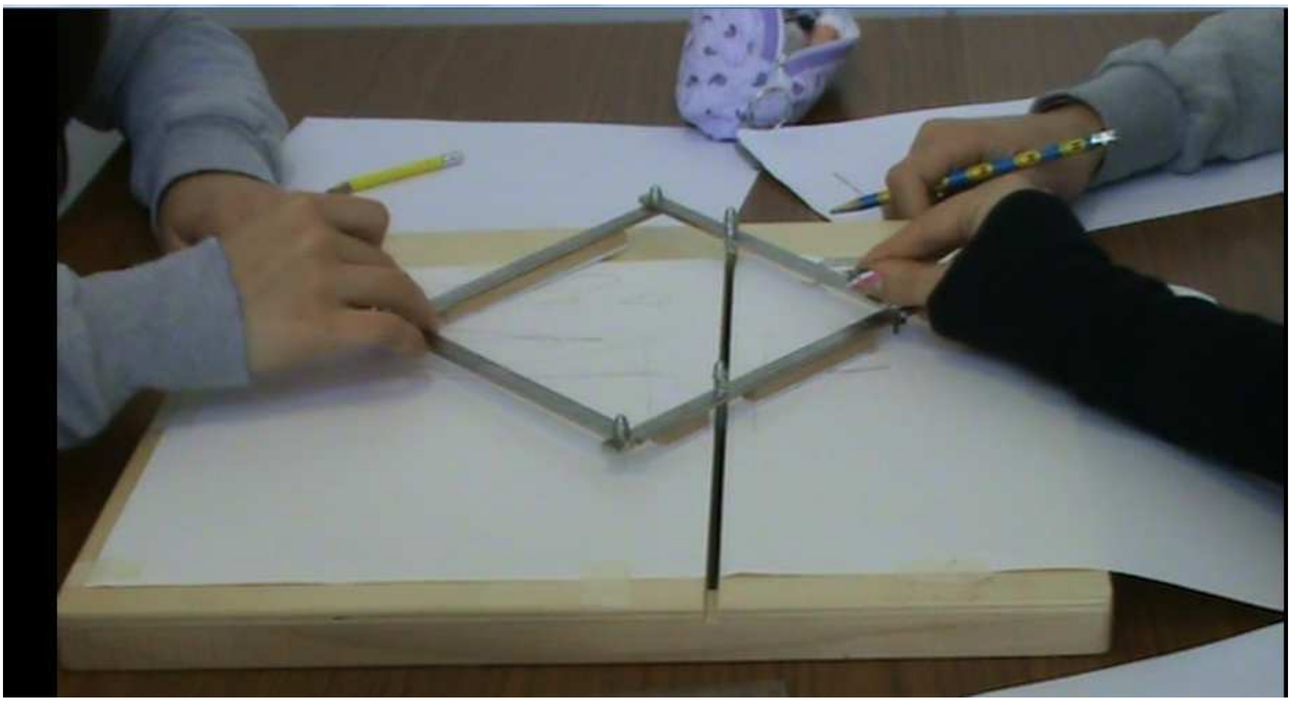


Figura 13

Poi decidono di cancellare tutto e fare nuovi disegni.

D1 : "*Allora..se noi proviamo a fare un disegno lo stesso disegno che facciamo qua* " indica la parte maggiore in cui la scanalatura divide la tavola "*viene anche qua?*" indica l'altra

(T=20:20)

D1 "*..le linee tracciate secondo me sono le stesse però visto che questo*" indica la lunghezza della parte minore di tavoletta "*è più piccolo di questo…*" indica l'altra

D2 e D1 usano la macchina per tracciare una linea

D1 "*tira verso di te che io tiro verso di me*"

Poi muovono la macchina in modo da tracciare due figure quasi triangolari

D1"*..allora il disegno viene lo stesso però..*" (T=21:06)

D2 "*cambiano le dimensioni* "

D1 "*si cambiano le dimensioni* "

D3 "*cambiano le dimensioni per forza..questo è più grande e questo è più piccolo*" indicando le due parti nelle quali è divisa la base di legno (T=21:12)

D1 “*però i bracci sono uguali perché se noi mettiamo questo qua..”* indica i perni vincolati e le giunzioni

Pare dire che la differenza è che i perni sono posizionati diversamente

D1 “*cioè..secondo me cambia perché questi* “indica le giunzioni ”*sono messi qui*” indica i perni vincolati

(T=21:22)

D3 “*..infatti..cambia per la scanalatura e per questi..*”

D1 “*Allora..come la precedente macchina aveva la funzione magari di fare due disegni contemporaneamente, delle stesse dimensioni..uguali, identici..magari questa ha la stessa funzione..magari crea due disegni simmetrici però di dimensione più piccola qua* ” indica la parte minore

D3 “*..si..diciamolo bene*”

D3 “*Come la precedente macchina aveva la funzione* ”

R “*probabilmente..aggiungerei*”

D3 “*togli ‘aveva la funzione’..metti..’rappresentava’ ..due figure* ” (T=22:30)

D3 “*simmetriche ..e di uguale dimensione , notiamo che invece in questa macchina* ”

D1 “*..che la funzione è la stessa, produrre due figure simmetriche, però..*”

D3 “*aspetta..notiamo che vengono create due figure simmetriche ma con diverse dimensioni, ovvero una più grande ed una più piccola*”

D1 “*bene poi? Guarda se va bene*” consegna il foglio ad R

Intanto D3 muove la macchina tenendola per un solo tracciatore con una mano

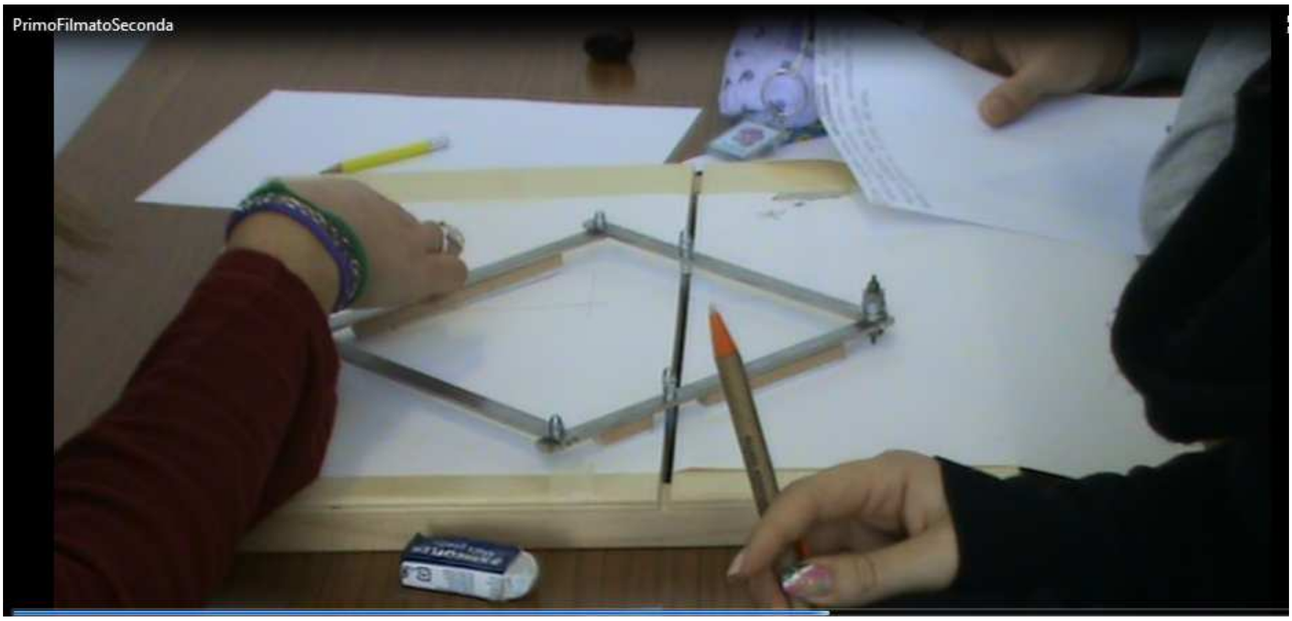


Figura 14

Poi la muove usando una delle giunzioni senza tracciatore

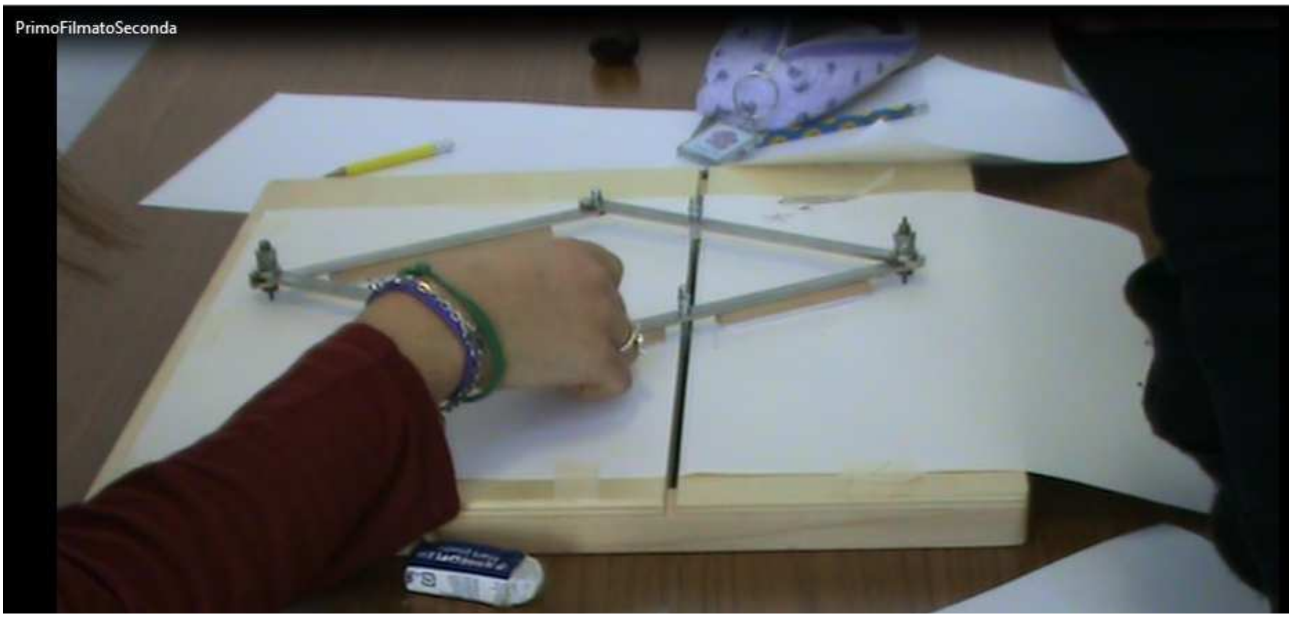


Figura 15

D1 "*nell'altra cosa avevamo detto?*" (T=24:47)

D3 "*se io invece muovo questi?cosa viene fuori?*" sta muovendo una delle giunzioni senza tracciatore (figura 15)

D3 "*ne muovo uno e basta*" con una mano muove la giunzione e con l'altra tiene premuto uno dei tracciatori, mentre D2 ha la mano premuta nell'altro tracciatore (figura sotto)

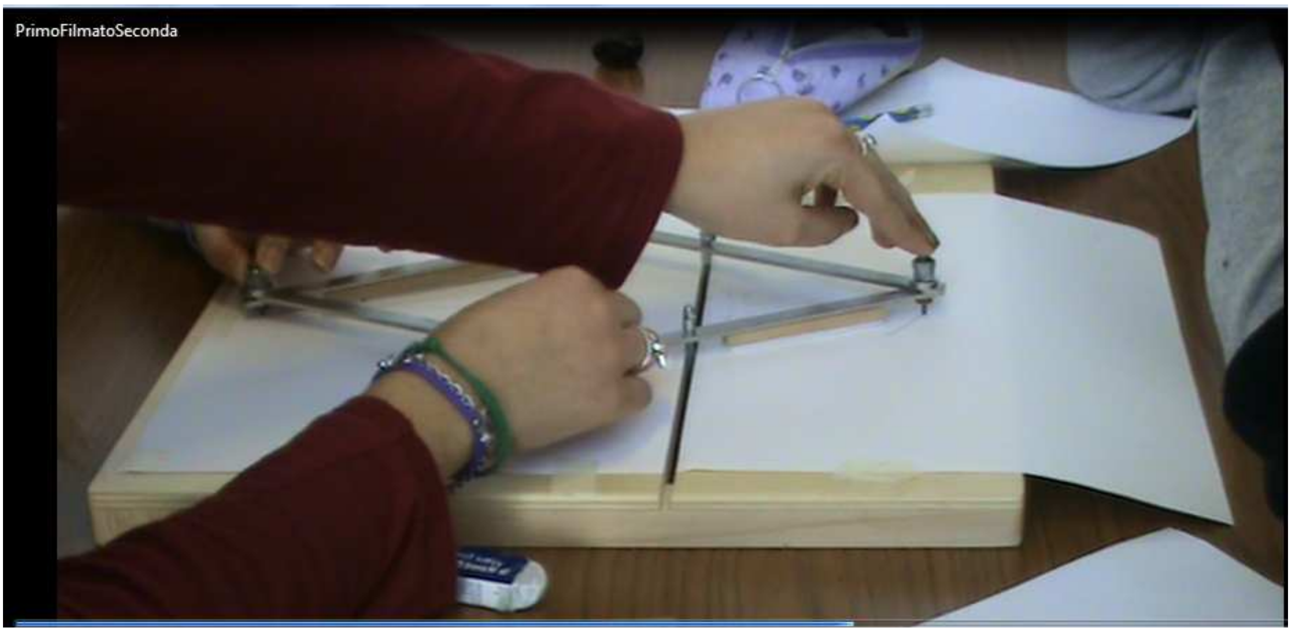


Figura 16

Poi fa la stessa cosa con l’altra giunzione

Figura 17

D2 fa alcuni commenti sui movimenti della macchina ma non si sentono bene (T=25:35)

D1 “*però secondo me cambia qualcosa per il fatto che qui viene un triangolo*” indica il triangolo formato dalle asticelle da una parte della tavoletta” *e qui*..” non si capisce bene

D3 “ *in ogni caso le figure sono le stesse..vabbè una è più grande di quell’altra..però..*”

D1 “*quindi il principio di funzionamento è lo stesso..possiamo creare due disegno contemporaneamente ..poi?*”

D1 muove la macchina usando il tracciatore a lei prossimo, poi la muove D2

Dato che non sanno più cosa scrivere consegno il testo successivo (T=28:02)

D1 legge la domanda (relativa ad un confronto esplicito con la macchina degli incontri precedenti)

D1 "*pensando a tutte le cose che abbiamo visto con la macchina precedente..vediamo le cose che sono uguali, diverse..*"

R "*non è questo che chiede..perché chiede ' quali idee sono utili per l'analisi della macchina'..*"

D2 " *anche quello che accennava lei che avevamo visto con la macchina precedente*" inizia a muovere la macchina tenendola per un tracciatore "*cioè che c'è l'altezza*" ed indica le con le dita dei segmenti che partono dai tracciatori e vanno fino alla scanalatura. Si riferisce alle considerazioni teoriche che avevo fatto durante la lezione teorica sulla macchina precedente. (T=28:40)

D3 "*non possiamo avere le cose dell'altra volta..per confrontare?*"

D1 "*l'altra domanda è..'provate a dimostrare matematicamente quello che fa la macchina ' *"

R "*secondo me con il..coso..come si chiama..il piano cartesiano*"

Dicono alcune cose che non si capiscono bene

D1 "*proviamo a fare le stesse cose che hanno fatto loro per l'altra cosa*"

D3 mi chiede se possono avere i loro lavori degli incontri precedenti ed io rispondo che non li ho portati

D1 "*l'altra macchina..la prima cosa che diceva è..guardate il funzionamento di questa macchina..i due triangoli congruenti..*" (T=29:50)

D3 "*va bene* "

D1 "*qui..*"

D3 "*qui no..ne viene una più grande ed una più piccola*"

R "*avevamo detto che a seconda di dove uno la guardava si vedeva un triangolo o un rombo fondamentalmente..qua* si vede un pentagono" evidenzia con la matita i cinque lati e poi dice "*è un diamante questo!*"

D3 "*si infatti..no io guardavo le strutture di metallo*" e indica con le mani la struttura

D1 "*allora..senza dire della precedente macchina, allora..guardando le due figure che vengono fuori dai bracci..le due figure non sono congruenti* "

D2 "*no perché sono diverse*" si riferiscono alle due figure formate dalla struttura metallica (pentagono e triangolo) (T=31:04)

R "*cosa c'entra?*"

D2 "*c'entra perché*"

Non si capisce

D2 "*qui hai un pentagono ed un triangolo*.."

D1 "*ma avevamo detto che, alla fine, non erano congruenti neanche in quella perché a seconda di come muovevamo i bracci venivano o un triangolo isoscele e non erano congruenti perché questo*" indica il triangolo formato dalle asticelle da una parte della tavoletta "*era più piccolo*"

D1" *si perché noi l'avevamo guardata così" pone la macchina in modo da formare un quadrato*" e quindi erano congruenti" indica le due parti della macchina sui due diversi lati " *se però noi facevamo così*" schiaccia le aste in modo da formare una rombo sottile " *questo è un triangolo isoscele che ha due lati uguali ed uno diverso e quindi alla fine non erano congruenti*"

D3 "*ma se questa qua è la scanalatura* " indica un segmento ideale che congiunge le due giunzioni senza tracciatori "*questi non sono congruenti?*" indica i due triangoli ideali formati dalle asticelle e la scanalatura

D1 "*non hanno le altezze uguali..com'era il discorso?*"

(T=31:59)

D1 "*bisognava vedere dove cadeva il punto* " traccia con la matita una altezza ideale

D3 "*e cade in due punti diversi?*"

D1 "*..va bene ..ma quello era un problema di quello prima no?*"

D1 "*c'è anche un'altra cosa..qua*" indicando il tracciatore della parte più estesa "*se io lo metto al massimo*" e schiaccia le aste "*qua viene a una distanza minore*" intende che quando la macchina è schiacciata e quindi i tracciatori sono alla massima distanza dalla scanalatura, il tracciatore della parte più estesa è più vicino al bordo rispetto all'altro

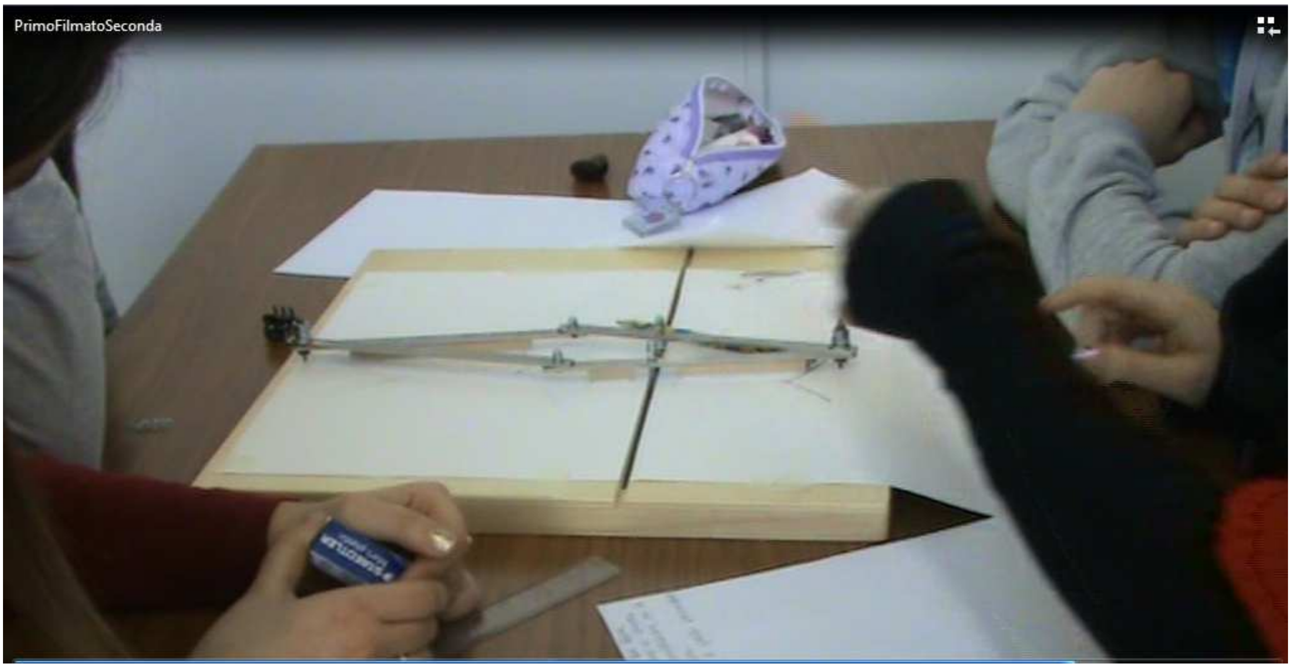


Figura 18

D3 " *se la scanalatura fosse qua*" intendendo la congiungente delle giunzioni senza tracciatore " *se questi fossero i perni della scanalatura..boh*"

D1 "*va bene..le due figure che possiamo creare ..non saranno mai congruenti fra loro?*"

D3 "*in questa macchina no perché vedi..*" muove la macchina poi indica una parte con la mano " *da una parte..questa le figure sono più piccoli..qui sono più grandi..anche per il semplice fatto che qua abbiamo un triangolo e qua un pentagono*" indica le due figure formate dalla struttura metallica

(T=33:49)

D3 "*..guarda solo il numero degli angoli*"

D1 " *ok allora sono diverse sia le misure dei lati sia degli angoli..quindi come scriviamo?Cioè noi dobbiamo prendere le cose che venivano dette in quella e vedere se sono uguali..o diverse.le idee*"

R "*dice quali idee sono utili*"

D3 "*una osservazione che ci può aiutare per analizzare questa macchina..* "

R "*alla luce di quanto osservato con l'attrezzo precedente..per non ripetere macchina* "

D1 "*con..lo strumento..osservato grazie allo strumento precedente..*"

D3 " *..attraverso lo strumento precedente*"

R "*..tramite* " (T=36:51)

D3 "*..allora..in qualsiasi modo noi muoviamo i bracci* "

D2 muove la macchina tenendo il tracciatore a lei prossimo, mentre stanno discutendo su come scrivere la risposta

D1 "*..dai bracci però..*"

D3 "*non tracciando quindi..*"

D1 "*non tracciando..disegnando..proprio dai bracci*"

(T=37:40)

R "*le figure ottenute dal semplice movimento dei bracci*"

D2 "*no..*"

R "*eh no..*"

D3 "*si perché non è che noi facciamo così*" e muove la macchina tenendola per un tracciatore " *noi guardiamo solamente i bracci..e notiamo le figure che vengono fuori..*"

(T=37:59)

D1 “..*dal semplice movimento dei bracci*..” continua a scrivere la risposta

R “..*dal semplice movimento dei bracci*”

D3 “..*le figure che otteniamo*”

R “..*che vediamo..perché se non le vediamo*.. ”

D3 “*ok*”

D1 “..*non sono congruenti*”

Chiedo a quali figure si stiano riferendo (T=38:56)

Dicono che si stanno riferendo alle figure formate dai bracci, senza muoverli. Chiariscono che si riferiscono alle figure formate dalle asticelle della macchina e la scanalatura, non ai disegni che si possono tracciare.

Allegato10_ProtocDelaunayParte2

Protocollo del gruppo filmato

Seconda sessione: biellismo di Delaunay

Seconda parte

La seconda parte avviene nella stessa giornata della prima, dopo l'intervallo. Il protocollo che segue è tratto dal secondo filmato (Seconda parte2; SecondoFilmatoSeconda.MPG), trascrivendo i dialoghi (in certi casi non è stato possibile) e scegliendo immagini degli episodi più significativi.

Protocolli tratti dal filmato

La disposizione degli studenti in questa seconda parte è uguale a quella della prima (è la seconda ora e non una giornata diversa).

D3 "*dove eravamo rimasti?*"

D1 "*dovevamo dire che i lati e gli angoli delle figure che vengono*" indicando la struttura metallica "*non sono uguali..*"

R "*però gli angoli..*" avvicina fra loro i tracciatori ed indica i due angoli

Figura 19

R "*..sono uguali e questo e questo pure*" indica gli altri due angoli opposti del rombo formato dalla struttura

Poi discutendo con D3 e D1 fa notare che anche i due angoli che la scanalatura (parte di essa) forma con le asticelle, sono uguali.

D1 "*no ma io intendo da questa figura a questa*" indica il triangolo ed il pentagono formati dalle asticelle

D3 "*sono due figure diverse*"

D1 "*ma scusa ..questo angolo che è nel triangolo e questo angolo che è nel triangolo*" indica gli angoli dei tracciatori "*non hanno la stessa forma* "

(T=1:36)

Discutono sulle differenze relative agli angoli fra le due figure, R fa notare anche che nel triangolo ce ne sono tre e nell'altro cinque (li conta) e nel primo caso la somma è 180 mentre nel secondo non lo sa.

R " vabbè..*comunque dobbiamo prendere le idee..che abbiamo preso* "

D3 "*precedentemente*"

D1 "*si ma era per chiudere il discorso..le figure non sono congruenti ed hanno lati ed angoli diversi..*"

D3 "*secondo me gli angoli li possiamo lasciare perdere..perché se noi abbiamo due figure..abbiamo comunque due angoli che sono uguali questo*" un angolo su un tracciatore " *e questo* " l'angolo sull'altro tracciatore "*questa figura*" indicando la struttura metallica "*ha i lati congruenti..è la scanalatura che a noi ci scombussola..perché qua abbiamo un triangolo e qua un pentagono..però questo angolo e questo angolo sono uguali*" indica i due angoli sui tracciatori "*come poi nel pentagono questo angolo e questo angolo sono uguali*" indica i due angoli sulle giunzioni senza tracciatore

R "*bene..allora altre idee sennò facciamo l'altra*"

D1 "*poi c'era il fatto che il ragazzo diceva 'se noi muoviamo'…com'era?* "

(T=3:09)

D1 "*..il lato sinistro?...si muove anche quello destro..*"

D3 "*qui però devi guardare qui*" indica la scanalatura

Non si capisce bene

R nel frattempo muove la macchina tenendola da una giunzione senza tracciatore e da un perno vincolato

D3 " *perché come lato sinistro non so se si intenda il punto che è nella scanalatura o l'angolo*"

D2 muove la macchina tenendola sia dalla giunzione senza tracciatore destra che dal perno vincolato destro

D1 "*il ragazzo poi diceva che lui non vedeva ..*" non si capisce bene

D3 "*io qua il triangolo lo vedo..e un pentagono qua..voi cosa vedete?*"

(T=4:21)

R “*io andrei alla domanda dopo..poi se ci vengono in mente delle cose le aggiungiamo*”

D3 “*si magari lascia un po’ di spazio*”

R legge la domanda successiva

R “*cosa si intende per dimostrare matematicamente?*”

(T=4:53)

D3 e D1 “ *con un piano cartesiano*”

Dico che prima dovrebbero arrivare a dare una formulazione più precisa di quello che fa la macchina. Noto che qualcosa hanno detto prima, da una parte la figura è più grande. Chiedo di precisare questo fatto. Prima di dimostrare si deve avere chiaro che cosa.

Decidono di fare nuovi disegni e cancellano i fogli.

D3 “*vediamo cosa otteniamo facendo delle figure e poi analizziamo le figure che otteniamo*”

(T=5:26)

R “*secondo me le due figure sono una più grande dell’altra ma le proporzioni sono identiche*” poi prova a spiegare tracciando con la matita

D1 e D3 prendono ciascuna un tracciatore e muovono la macchina

D2 “*fate un triangolo*”

(T=6:57)

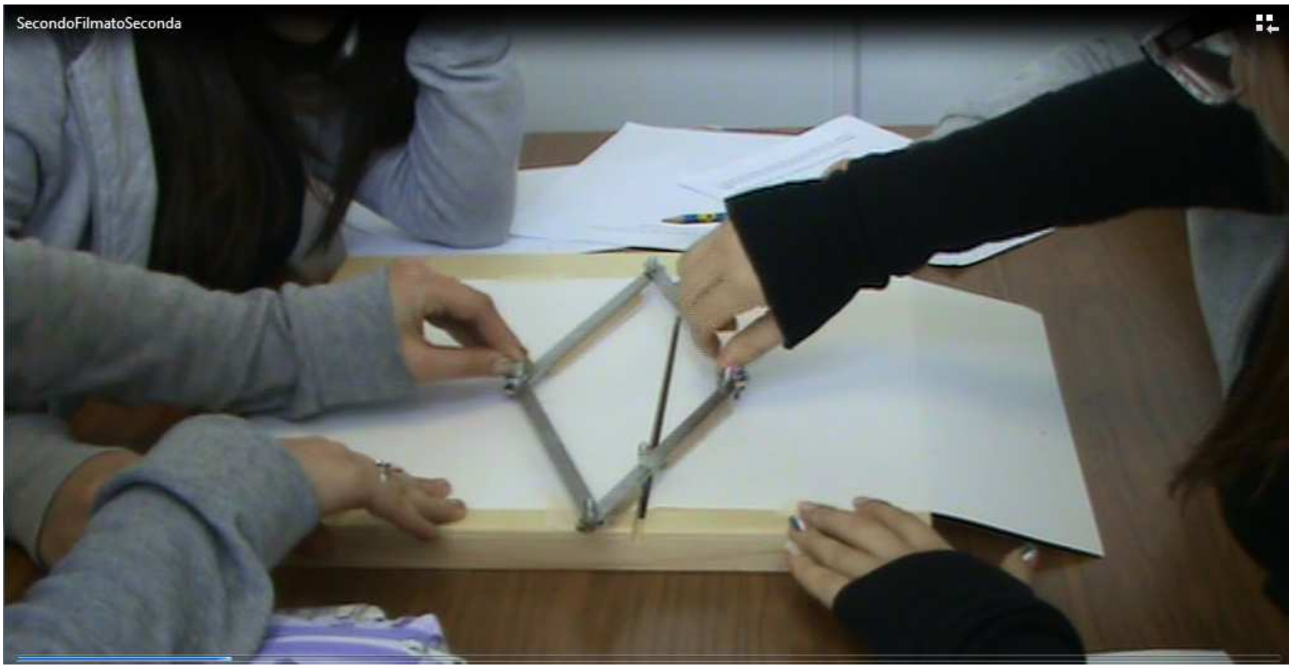


Figura 20

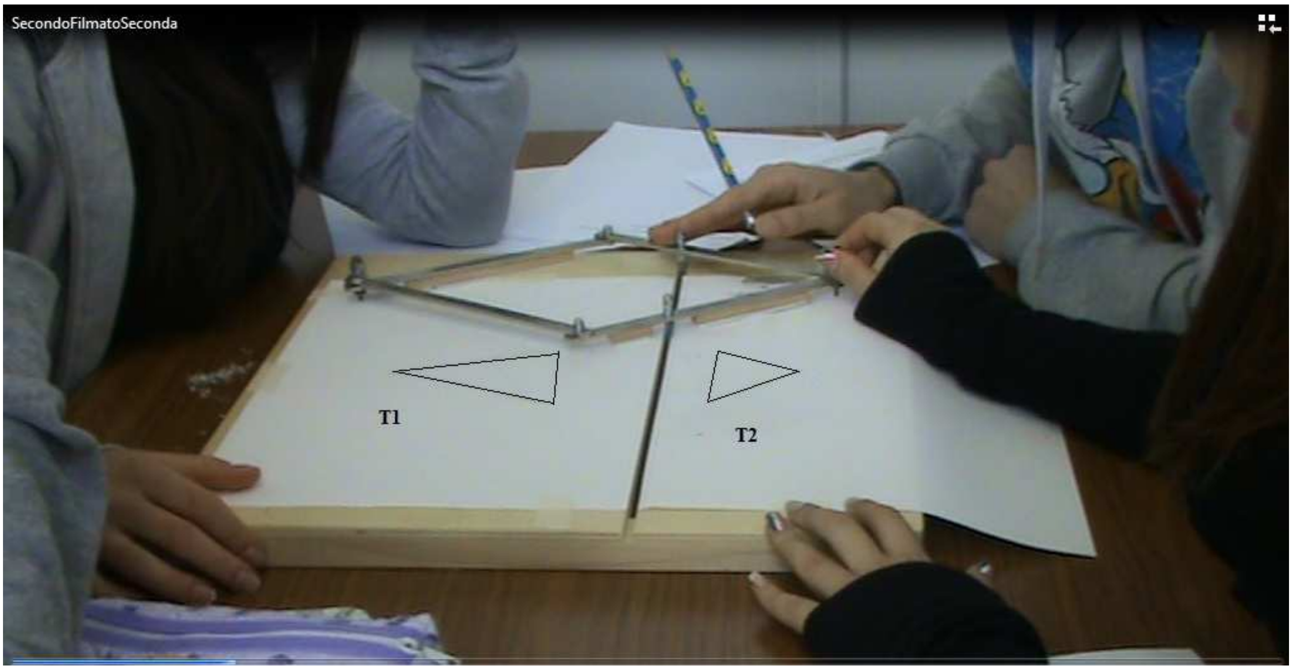


Figura 21

R “*secondo me le proporzioni dovrebbero venire esattamente identiche*”

D3 “*però perché a me è venuto così e a lei no?*”

D1 “*secondo in questo* “indica il triangolo T2” *i lati sono uguali, invece in questo no*”

R prova a disegnare e dice che non ci riesce

D3 “*bisogna farlo in due* ”

Cancellano per fare altri disegni

D3 “*proviamo a disegnare un altro triangolo*”

D1 e D2 disegnano tenendo ciascuna un tracciatore ma non riescono a coordinare i movimenti

Fanno poi altri due triangoli

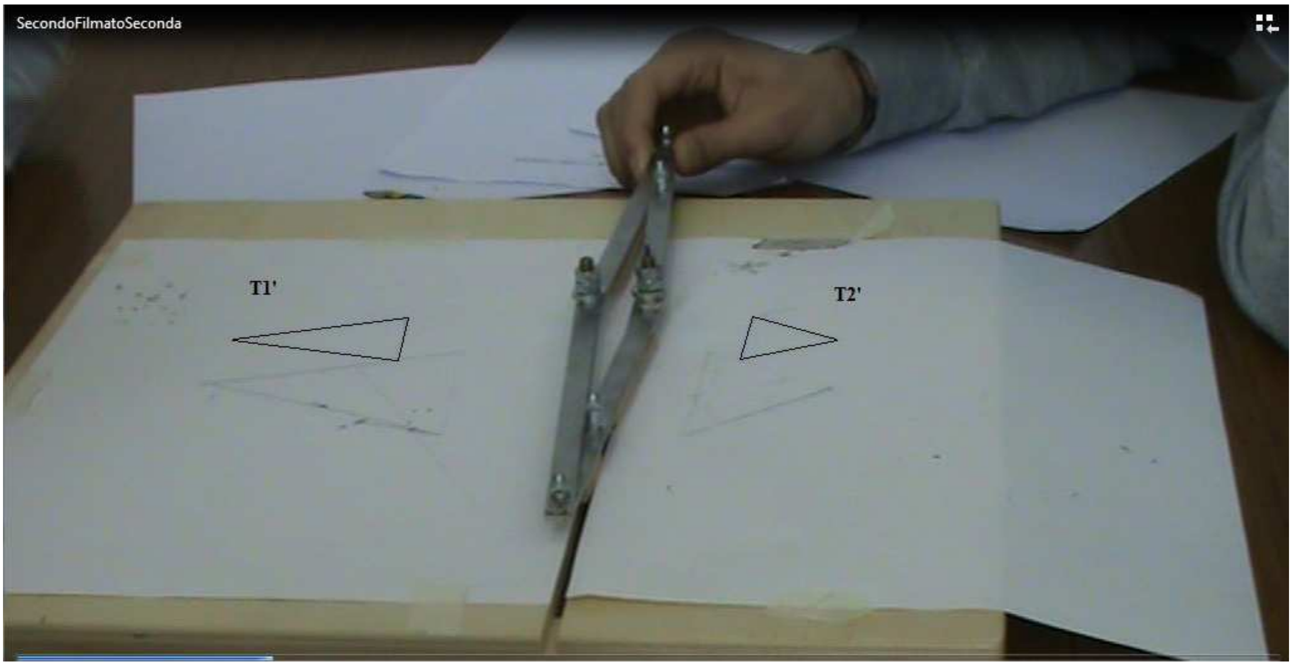


Figura 22

D2 “*dov’è il righello?*”

D1 prova a misurare le lunghezze dei lati di T2 e poi quelle di T1.

D1 “*..questo è equilatero*” riferendosi a T2 “quello li è isoscele” (T=9:02)

D3 “*quindi ok..una immagine ..una figura è più grande rispetto all’altra..però la figura più grande, ad esempio, sarà un triangolo isoscele e l’altra un triangolo equilatero..*”

D1 “*ma per forza..come fanno a venire figure uguali se ..non solo uguali*” non si capisce bene “*cioè questo*” indica la parte di asticella fra il perno vincolato e la giunzione senza tracciatore “*questa differenza ..secondo me..*”

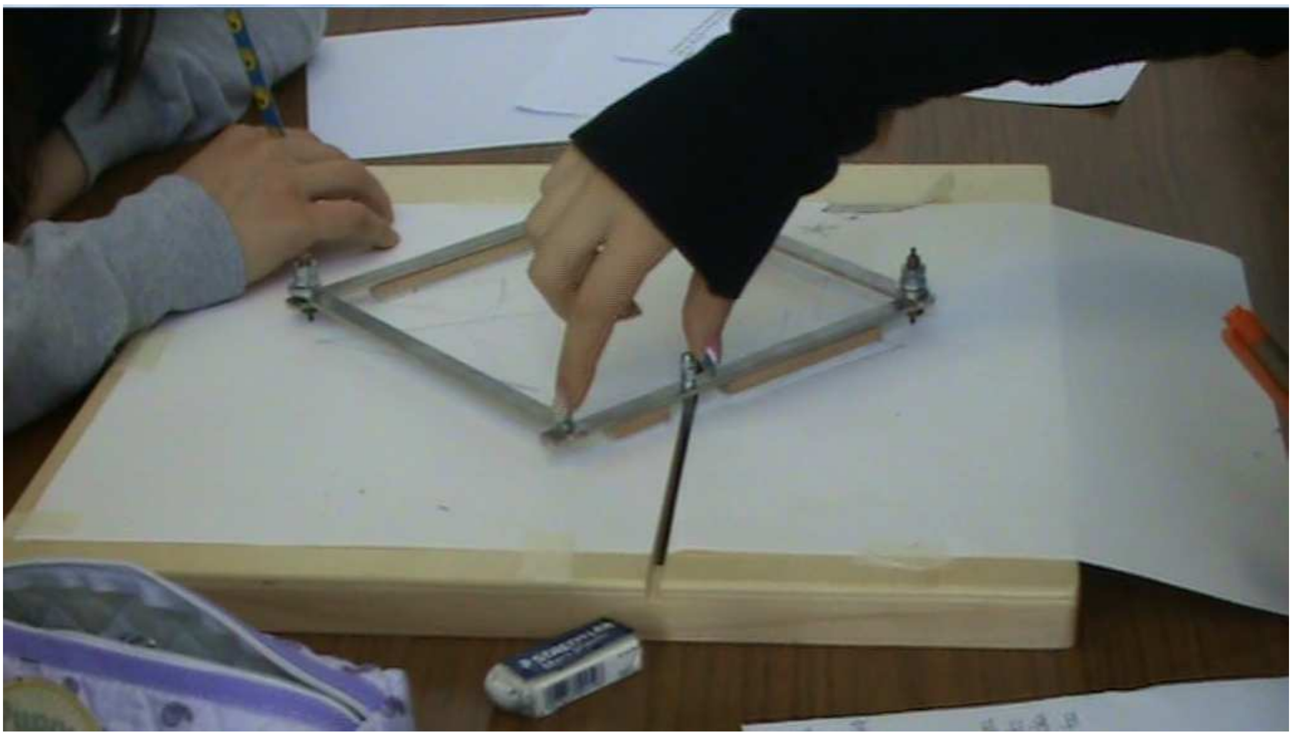


Figura 23

D1 “..*che fa venire le figure più.*.” indica il triangolo T1

D1 e D3 discutono e convengono che questo fatto è la ragione per cui vengono figure di dimensioni diverse, rispetto alla prima macchina

(T=10:12)

D1 “*com’era quella cosa del grafico che avevi fatto te?* ” chiede ad R

D1 e D3 tengono un tracciatore ciascuna e provano a tracciare delle linee, R gira la macchina per provare ad utilizzarla e traccia diverse linee

Figura 24

Poi prova D1 che tiene i tracciatori con entrambe le mani.

D3 "*secondo me possiamo fare degli esempi con delle figure..ad esempio..il triangolo l'abbiamo già visto..quello più grande è isoscele e l'altro è equilatero..magari facciamo un rettangolo e vediamo com'è..*" (T=11,54)

D2 ed R iniziano ad usare la macchina tenendo ciascuno un tracciatore, tracciano un rettangolo.

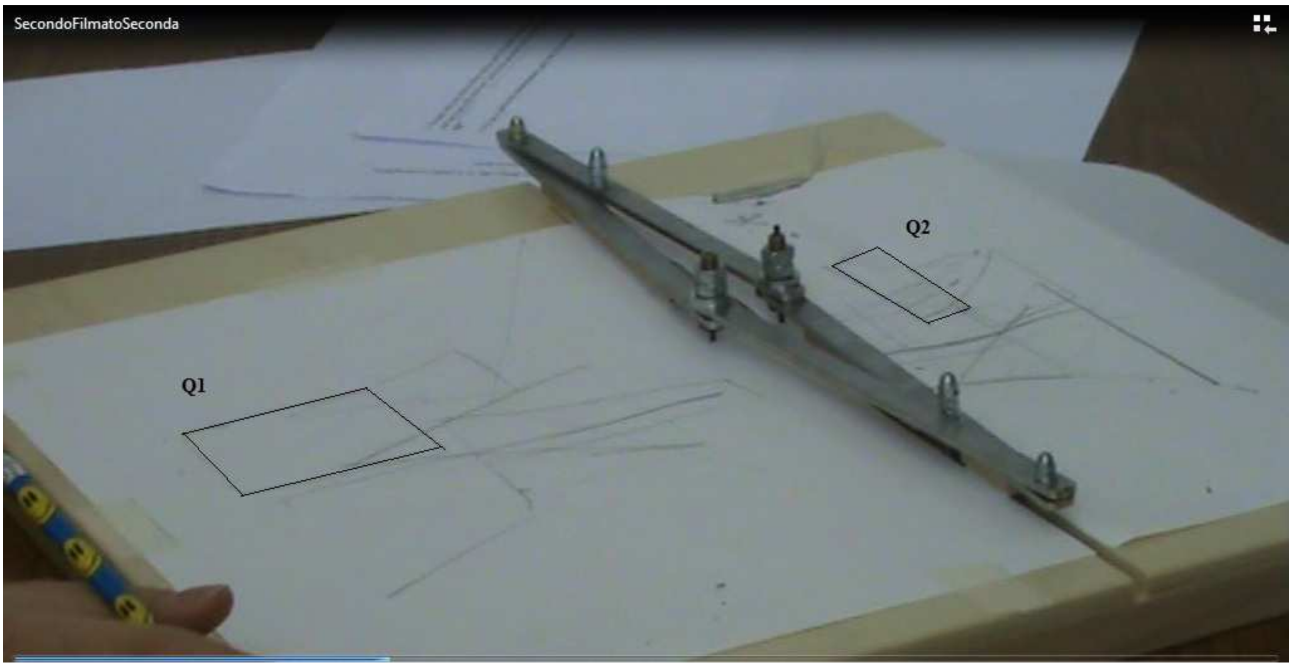


Figura 25

D3 "*quello cos'è? È un quadrato..*" riferendosi a Q1

Dicono qualcosa che non si capisce bene

R “*è ribaltato..*”

D3 “*si è più un rettangolo che un quadrato*”

R “*quindi le proporzioni sono diverse..io dicevo che erano uguali*” (T=12,44)

D1: “*ma allora abbiamo sbagliato a dire che sono simmetriche*”

R “*rispetto a questa*” intende la scanalatura “*le figure sono simmetriche* ”

(T=12:59)

Figura 26: R dice che le figure sono simmetriche

R “*nel senso è come se fosse uno specchio*” intende la scanalatura

D3 “*però..uno specchio diverso* ” (T=13:11)

R “*uno specchio diverso*”

D3 “*perché se qua è più grande è là* ” D1 “*più piccolo*”

D1 “*possiamo dire che le figure, oltre che ad avere dimensione diversa..*”

R e D2 parlano ma non si capisce e D2 muove la macchina tenendola per il tracciatore a lei prossimo, poi tengono ciascuno un tracciatore e provano a fare una figura circolare muovendo velocemente la macchina

D3 “*..ascolta iniziamo a scrivere che il triangolo più grande è un triangolo isoscele..facciamo i vari esempi che abbiamo fatto..*”

R “*però due esempi è un po’ poco*”

D2 "*proviamo a rifare il rettangolo*"

D3 "*prova a rifarli tutti*"

Cancellano il foglio. Poi R e D2 iniziano a fare nuovi disegni tenendo ciascuno un tracciatore. Disegnano un rettangolo.

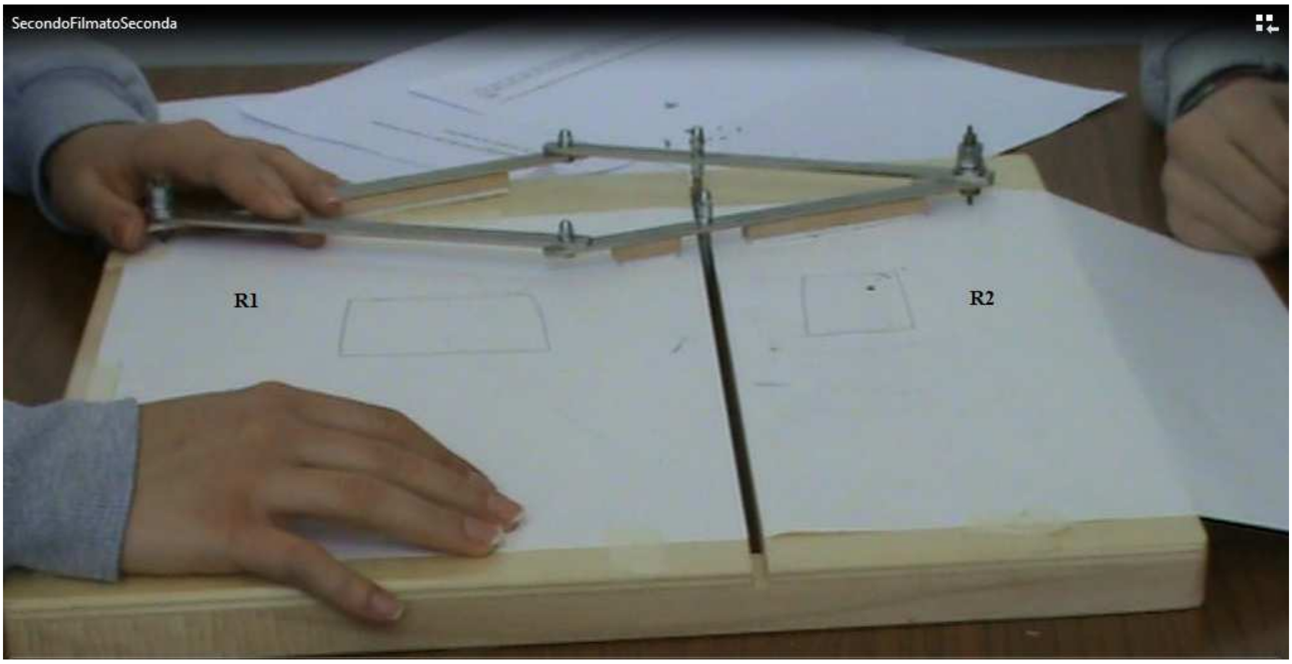


Figura 27

D3 "*questo qua*" R2 "*possiamo dire che è visto in orizzontale e questo*" R1"*in verticale*"

(T=15:08)

D1 "*ma non è ribaltato?*" indica con le mani un movimento che indica come R2 si potrebbe ribaltare per diventare R1

D3 "*..questo è orizzontale* " R2 " *e questo è verticale*"

R prende il righello e prova a misurare le lunghezze dei lati

Verifica che il lato di R1 che dovrebbe corrispondere, in un ipotetico ribaltamento, al lato di R2, ha una lunghezza diversa da R2.

D3 "*no..è ribaltato però è di dimensioni più piccole*"

(T=15:32)

D2 ed R tracciano un triangolo

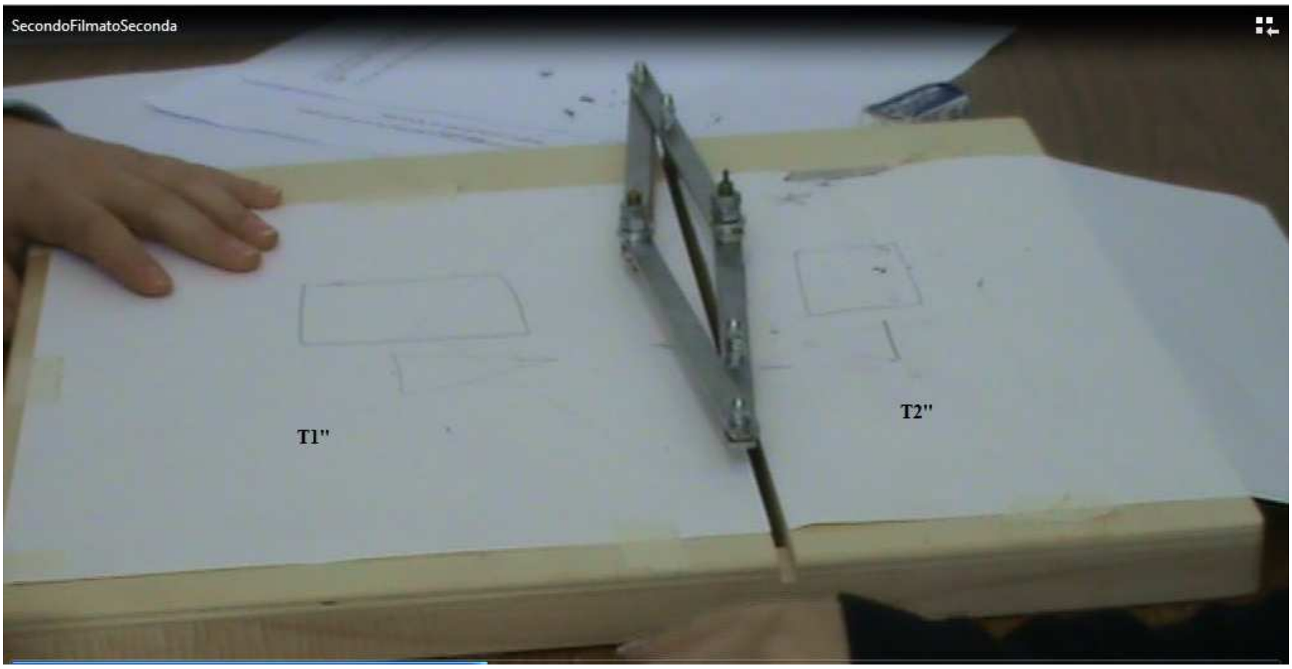


Figura 28

R “*mi pare che uno sia equilatero e l’altro isoscele*”

D1 prova a leggere la risposta“ *abbiamo realizzato un triangolo da entrambe le parti ed abbiamo notato che..* ”

D3 “*osserviamo che i due triangoli che abbiamo ottenuto sembrano isosceli..*”

D1 “*ma come..questo è isoscele*” T1’’ “*questo è equilatero*”

D3 “*allora..pare che uno sia isoscele e l’altro equilatero..io ‘pare’ ce lo voglio mettere*”

R “*si si..però bisogna anche mettere che quello equilatero appare dove..* ”

(T=17:27)

D3 “*nella parte più piccola*”

Discutono su come esprimere questa idea

D3 “*abbiamo provato a realizzare un triangolo da entrambe le parti della macchina..ed abbiamo notato che..nella parte con maggiore ampiezza..*”

R “*nella parte di piano più ampia..*”

D3 “*..il triangolo* ”

R “*i triangoli risultano isosceli..uno è isoscele* ”

D3 “*..isoscele..mentre nella parte di piano opposta il triangolo risulta equilatero*”

D2 fa ancora alcune osservazioni sull’utilità delle asticelle di legno sottostanti quelle metalliche.

D3 “*parliamo anche dei rettangoli?*”

D1 “*secondo me il rettangolo è proprio opposto..cioè ribaltato*”

(T=20:14)

D3 “*in effetti anche secondo me*”

R *“però non sono le stesse le misure..questo lato non corrisponde a questo*” indica i due lati maggiori dei rettangoli

D3 “*per forza perché il più grande è il doppio no?*”

D3 “*magari le misure di questo triangolo* ” T1’’ “*non sono proprio il doppio delle misure di quell’altro però sono più grandi..noi non siamo stati precisissimi..quindi magari..anche per quello..non so.*”

Dico che dopo avere completato questa parte possono provare a fare l’ultima

(T=20:46)

D2 inizia a leggere l’ultima domanda (sulla scelta della rappresentazione migliore)

R ruota la macchina

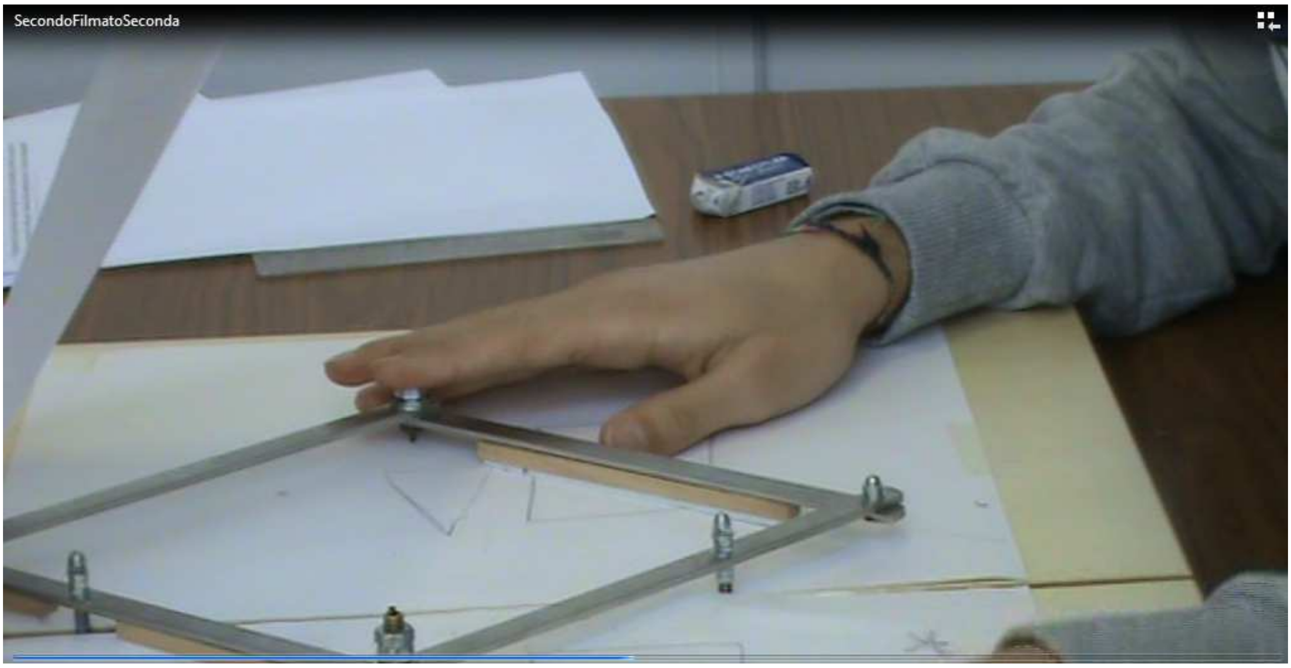


Figura 29

E poi la ruota ancora di 180°

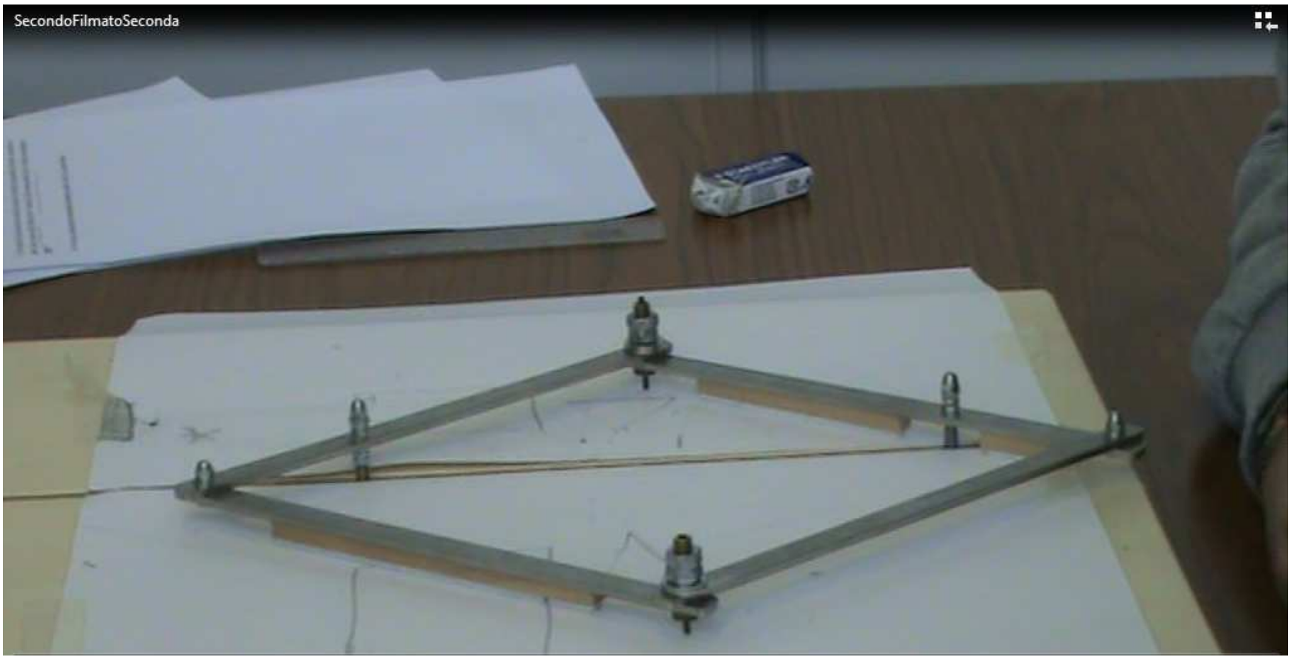


Figura 30

D3 “*qual è il modo migliore per rappresentarla fra quelli proposti nella pagina seguente e perché?*”

R “*la A la escludiamo*”

D3 “*si*”

D1 “*perché?*”

D3 “*qual’ è il modo migliore..quindi ce n’è solo uno*”

(T=22:01)

Cambiano la forma della macchina

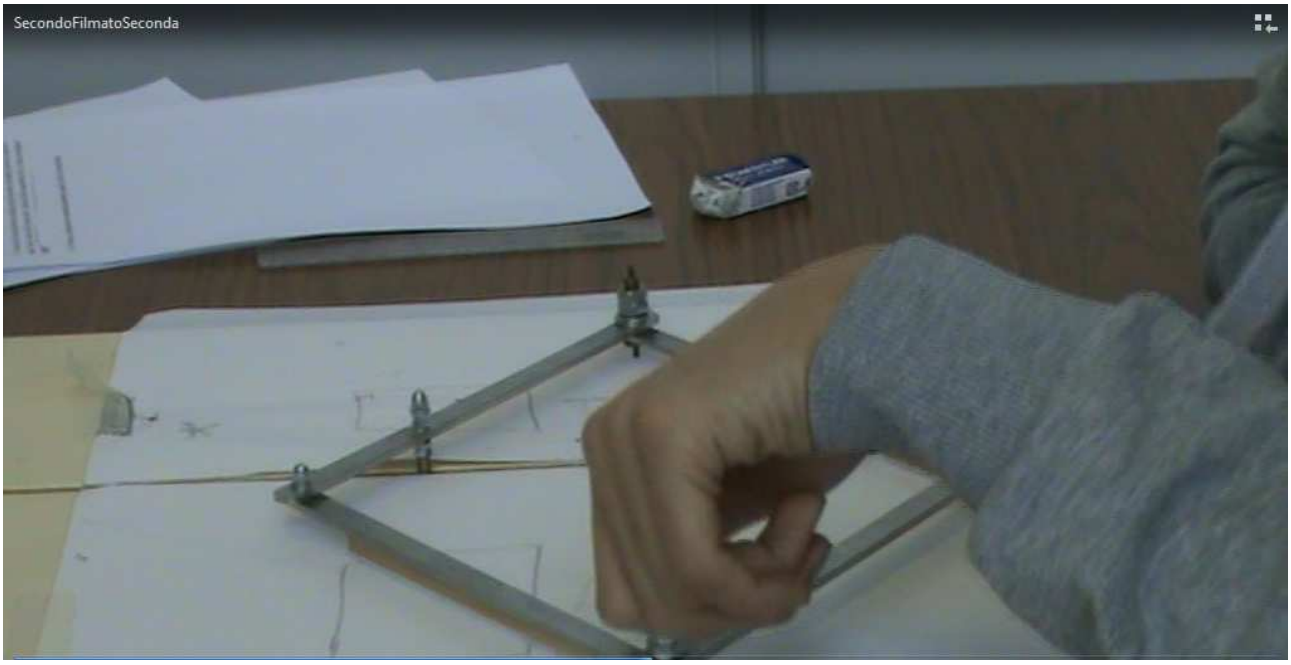


Figura 31

D3 “*per me è la C*”

Non si capisce bene (T=22:22)

R “*eh no..non è la C..perché qua taglia nettamente a metà*” indica il punto in cui nel disegno viene collocato il perno “*qua non è a metà..è un terzo e due terzi*” indica le due parti dell’asticella che vengono formate dal perno vincolato “*quindi la C non può essere*”

(T=22:39)

R “*allora..la C l’abbiamo eliminata..gli altri..*”

D1 “*la D no..perché questo* ” non si capisce bene “*non è un terzo*” pare indicare il segmento fra il perno e la giunzione senza tracciatore nella figura

R “*per me è la D o la A…..o la B*”

Non si capisce bene

D3 “*o la B o la D..quindi la A è esclusa*”

D3 gira la macchina

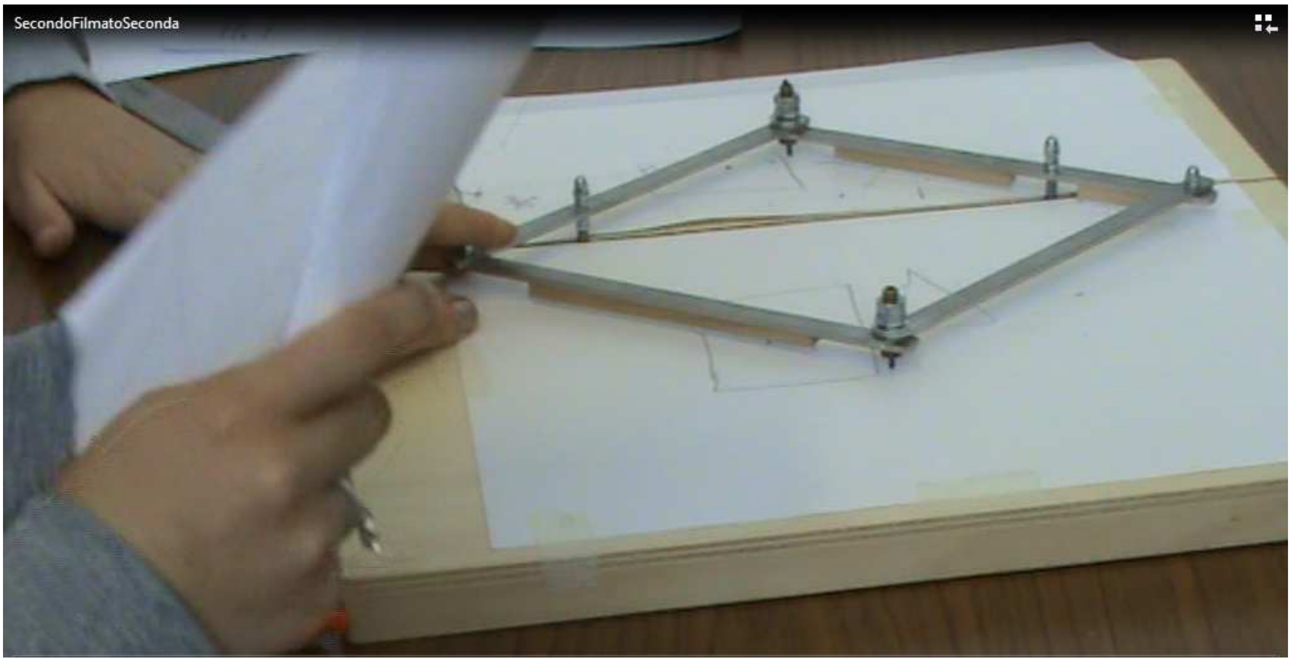


Figura 32

D3 “*..la B no?*”

D2 “*..secondo me è la B*”

R “*considerate anche tutti i cosi P1, P2*” si riferisce ai tracciatori (T=24:25)

D3 legge “*in tutti i casi i tracciatori sono rappresentati dai punti P e P’*”

R e D3 iniziano a fare corrispondere i punti della macchina a quelli dei disegni

R “*..non può essere di sicuro questa*” indica la D “*deve essere per forza la B*”

R “*ok..è la B*”

D1 “*ma non è detto che non possa essere la A*”

R “*l’abbiamo esclusa a prescindere la A*”

D2 “ *ma se tu la guardi così*” gira la macchina di 180 ° ed indica lo schema D

R “*ma non vedi che è proprio diversa la struttura?*”

D3 “*allora questa è la scanalatura*” indica la figura poi traccia sul foglio della macchina un ideale asse come quello presente nello schema D

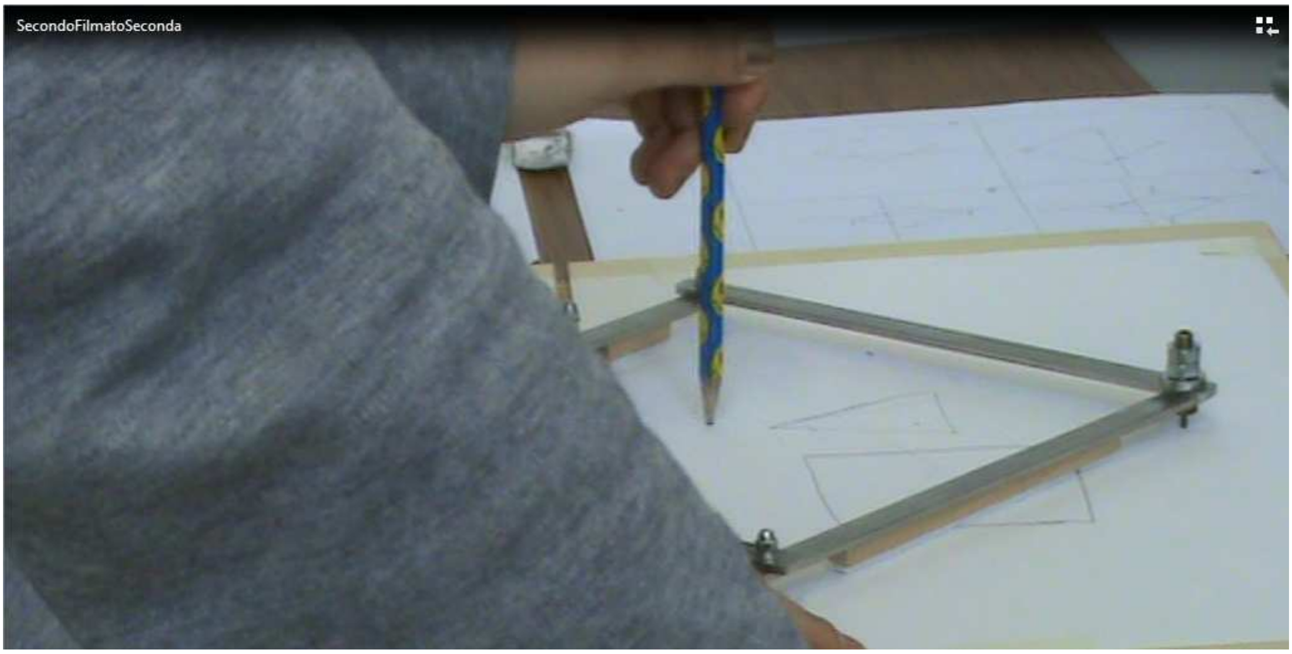


Figura 33

R , D3 e D2 discutono sulla correttezza della rappresentazione D, D2 sostiene che è giusto quello che sta facendo D3.

(T=26:35)

Non si capisce bene

R "*..ti dico subito perché non va bene questa*" si riferisce alla D " *perché qua taglia a metà precisamente* "

si riferisce alla posizione del perno vincolato nello schema D "*qua invece no*" si riferisce al perno analogo della macchina reale

A questo punto intervengo per chiarire che non devono tenere conto di questa differenza per la valutazione, chiarisco che nella mia rappresentazione non intendevo mettere il perno con le stesse proporzioni che sono nella macchina. Quello che mi interessa è che discutano il tipo di rappresentazione senza tenere conto le proporzioni. **Riformulo chiedendo quale è dei quattro che qualitativamente è migliore.**

(T=27:14)

D1 "*Allora questo noi lo prendiamo come asse delle y o delle x?..delle x*" indicando la scanalatura

R gira la macchina

D3 "*dipende da come lo giri..da*"

D2 "*in questo caso l'asse delle x*" indicando lo schema B

R gira ancora la macchina di 180°

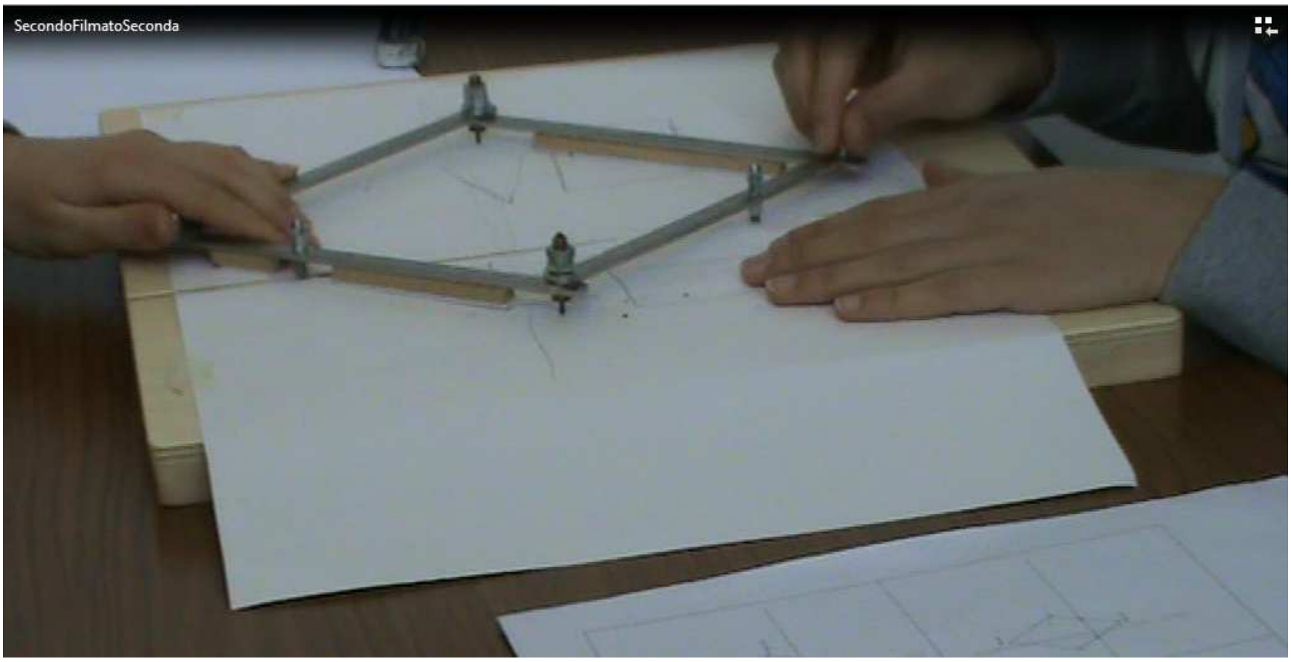


Figura 34

D2 “*questo è l’asse delle y*” indica l’asse y della figura B

R “*per me questa è più aderente..io sostengo la D..facciamo un sondaggio*” indica lo schema D

R chiede a D3 se è aderente la B

Dicono alcune cose ma non si capisce bene (T=28:15)

D2 “*adesso se tu lo giri viene questo* ” indica la D

R “*no..viene la A al massimo, perché ha la scanalatura*” fa un gesto per mostrare la stessa direzione della scanalatura

D3 “*quali sono i tracciatori?*” cerca di individuare i tracciatori nella figura A, si è alzata ed è in piedi in una posizione differente

Figura 35

R “*no..la A non torna!*”

D3 “*no..non torna*” (T=28:40)

R gira ancora la macchina

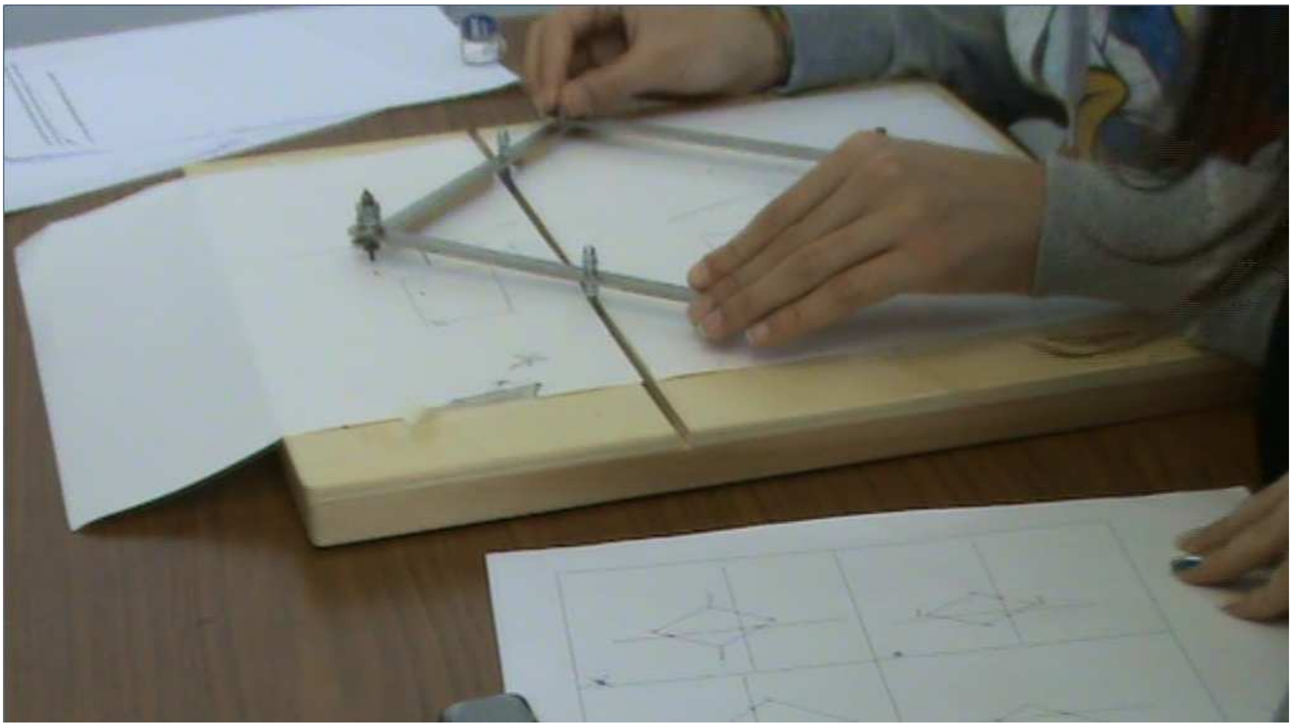


Figura 36

R “*boh..io metterei la B..facciamo un sondaggio*”

D3 “*per me è la A*”

D1 “*secondo me bisogna considerare questo*” indica la scanalatura della macchina reale “*come asse delle x perché l’altra volta avevamo considerato come asse delle y…*” non si capisce bene

D2 “..a questo punto..*se noi consideriamo questo come asse delle x..cioè questo* ” indica l’asse dello schema D “ *vedi che ti viene la parte..*”

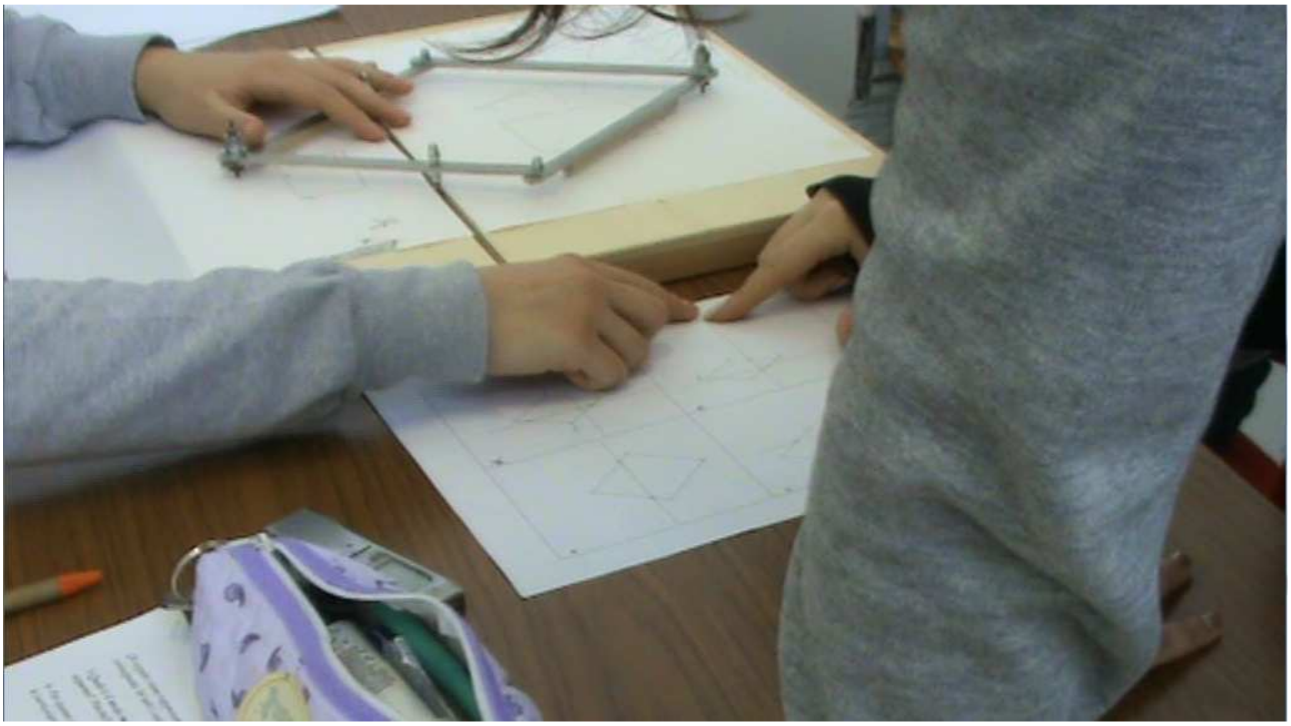


Figura 37

R “*non va bene..se noi consideriamo questo come asse delle x va bene solo la A ma se lo consideriamo come asse delle y secondo me la migliore è la B*”

D2 confronta la D con la macchina reale indicando alcune lunghezze

D1 “ *la D secondo me va bene..se consideriamo questa* “la scanalatura ” *come asse x*”

(T=29:34)

Girano la macchina

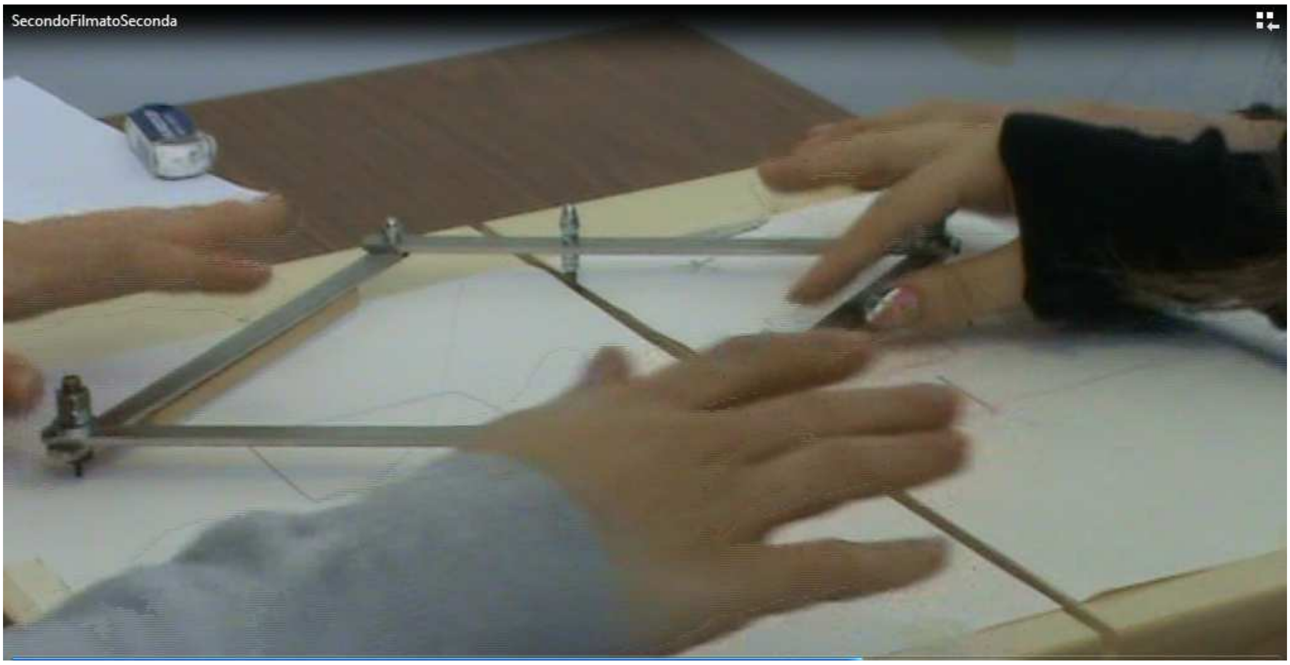


Figura 38

D1 inizia a nominare sulla macchina reale i punti come sono nominati negli schemi P, P’, B, A

D3” *e deve esserci solo un modo?*”

Chiarisco che devono dire se, secondo loro, c’è un modo che è migliore oppure se alcuni sono equivalenti per rappresentarla e per la dimostrazione.

D1 chiede dove sia nella macchina reale un punto che compare nello schema B.

D1 “*allora aspetta..noi stiamo parlando solo di come deve essere rappresentata*..”

D3”*si ..non stiamo parlando di dimostrazioni*”

Discutono ancora su quale sia la migliore rappresentazione R sfrutta la possibile rappresentazione mancante di un punto per preferire lo schema B rispetto al D.

(T=31:49)

D1 “*ok..se noi consideriamo la scanalatura come asse delle y è questa* ” indica la B “*se la intendiamo come asse delle x è questa* ” indica la D

Girano la macchina ancora

Figura 39

R dice che può essere corretta anche la A se si interpreta la scanalatura come asse delle x

D1 “*allora questa invece?* ” indicando la C e gira la macchina in modo che la figura appaia uguale a quella dello schema C

R “ *secondo me vanno tutte bene*” (T=32,32)

D3 propone di fare un confronto fissando il significato della scanalatura, come asse x o come asse y

D1 “*se questa* ” la scanalatura *” è l’asse x vanno bene tutte tranne la B*”

R gira ancora la macchina

R “*perché la B non andrebbe bene?*”

D1 “*..abbiamo detto teniamo la scanalatura come asse delle x…se tu ce l’hai così*” gira ancora la macchina in modo da confrontarla bene con la B “*non va bene*” mostra che non si riescono ad interpretare tutti i punti che sono nella macchina

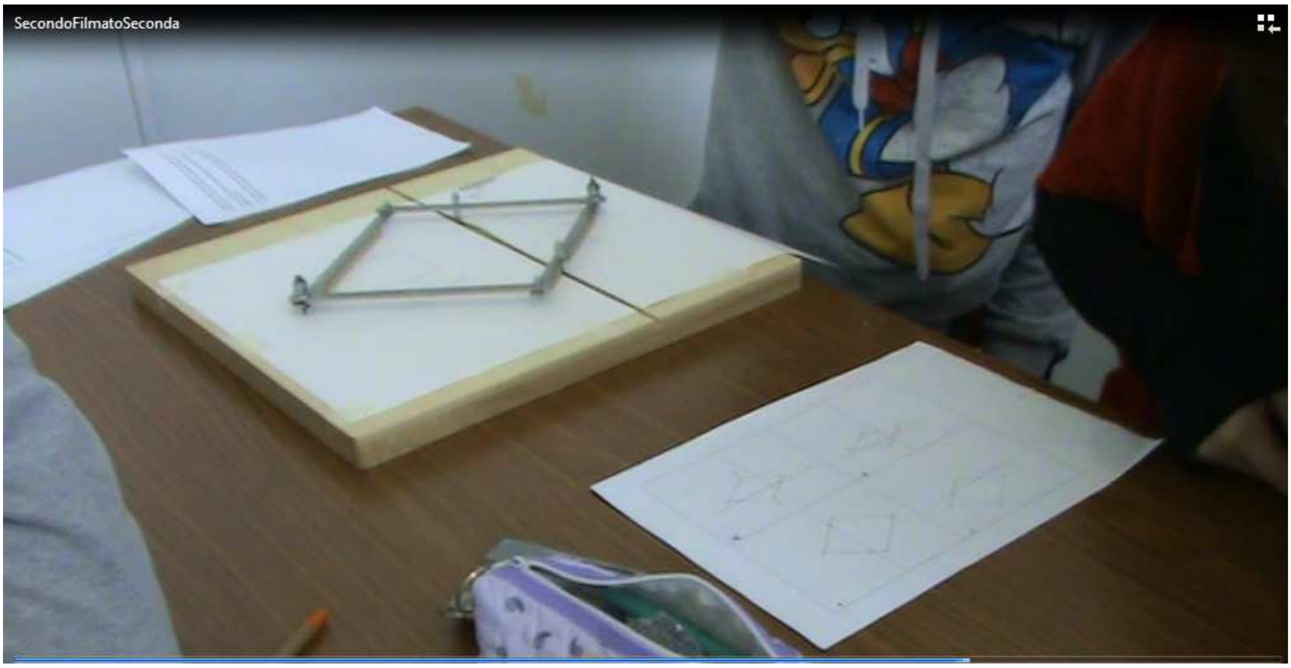


Figura 40: D1 mostra che B non rappresenta bene la macchina se la scanalatura viene considerata come asse x

R “*invece questa..è giusta*” indica la D

D1, D3 “*si*”

R “*questa non può andare bene*” indica la C e gira il foglio

D1 gira la macchina ed interpreta sulla macchina i punti dello schema

Nella discussione notano che nello schema A non c’è un piano cartesiano e discutono su cosa sia la retta che si vede

(T=34:10)

D3 “*..sarà x perché è messa così..altrimenti la potevano mettere così*” indica una direzione perpendicolare

D3 “*..certo queste due ti chiarificano di più la cosa*” indicando gli schemi B e D

D1 “*secondo me sono più giuste quelle sul piano cartesiano perché ti danno un’idea di dove si trovano gli assi*” non si capisce bene

R “*scriviamo che sono entrambe corrette..*”

D1 “*..si, nessuna è sbagliata dipende da come tu giri la macchina e da come la guardi*”

(T=34:47)

R “*però una è più precisa dell’altra..la B è più precisa*”

D3 “*allora..la scanalatura è l’asse x…se io guardo la D io ho il punto C ed il punto..* ” indica i punti della macchina con le mani interpretando la figura D

Figura 41: D3 interpreta lo schema D

D3 “..*e qua ci sono i tracciatori..e ci sta*..”

R “*andrebbe benissimo*”

D3 “*se io guardo questa*” indica la B

R “ *non torna*..”D2 “*no..ma scusa* ”

D3 “*se io la giro così..ho i due tracciatori qua*” prende anche una matita da usare per simulare la linea assente sulla macchina

(T=35:47)

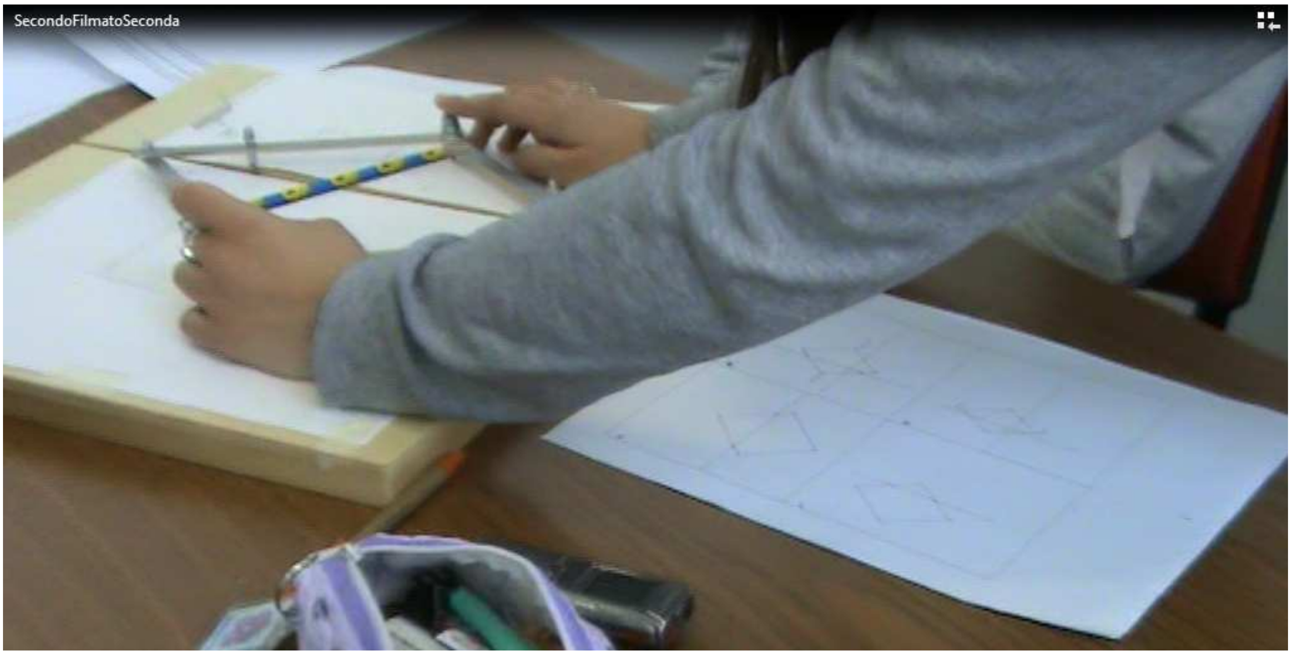


Figura 42

Poi ruota la macchina di 180° e continua con il confronto

D3 "..*allora secondo me vanno bene B e D..sono più chiari perché hanno già il piano cartesiano e a seconda di come giri la macchina sono validi entrambi*"

D2 gira ancora la macchina ed il foglio e confronta la B con la macchina interpretando i punti dello schema

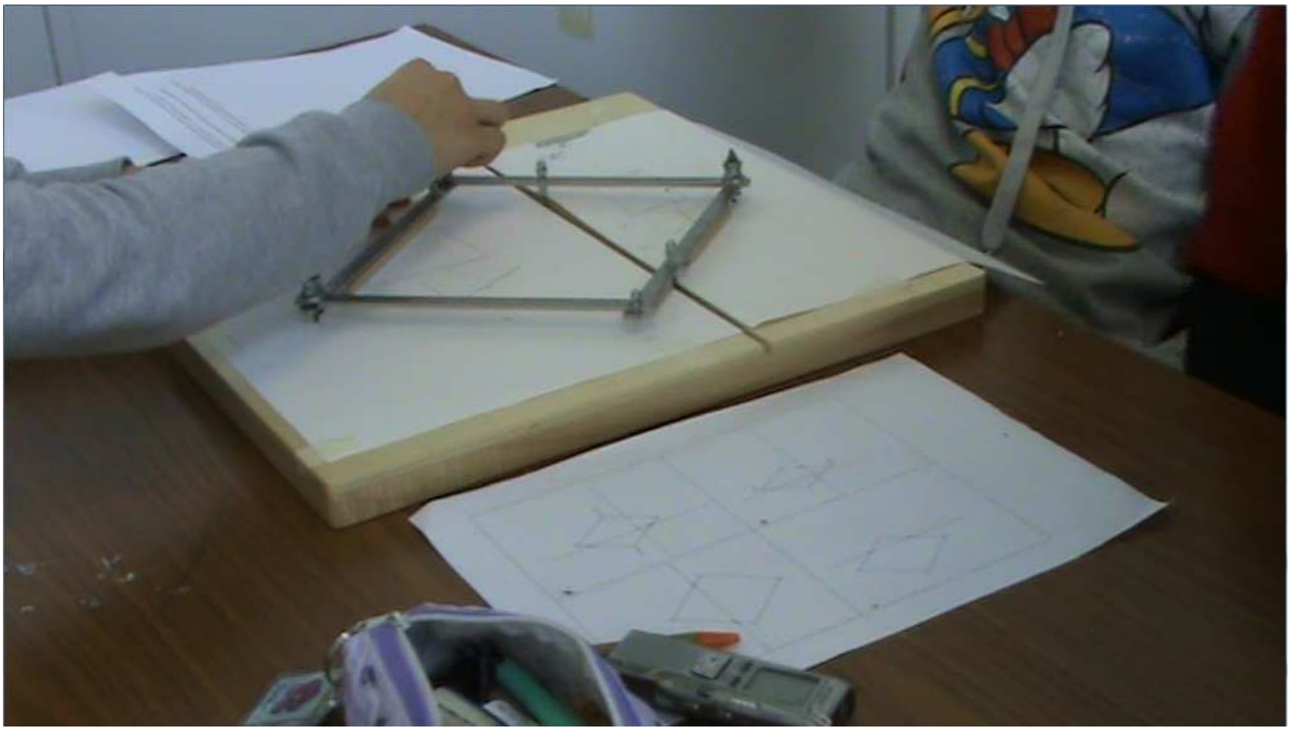


Figura 43

D2 nota che non si riesce ad interpretare il punto B, c'è una differenza fra la macchina e lo schema

D1 non è d'accordo. (T=36:52)

D1 "..*tu la stai guardando male*"

D2 "*no..io la sto guardando dalla vostra parte*"

Poi D2 si sposta

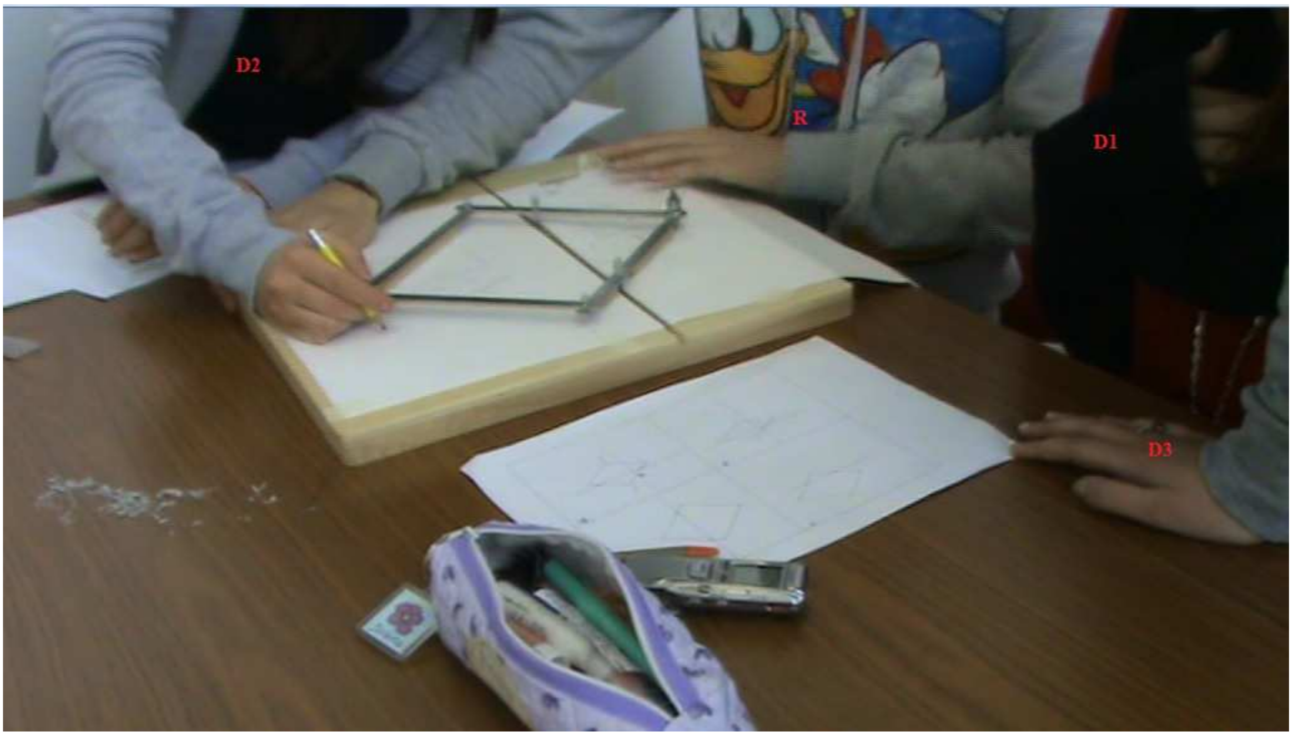


Figura 44

R ruota la macchina di 90° in modo da avere la scanalatura perpendicolare alla direzione che aveva prima

R "*vedi che è giusta*"

D1 ruota ancora di 90°

D1 "*però se questa la calcoli come asse x*"

D3 "*allora vedete che è come dico io..cioè B e D sono uguali ma dipende da come si guarda la macchina*"

R "*dipende da quale asse assegno alla scanalatura*"

Iniziano a scrivere la risposta

D1 "*Allora..secondo noi i metodi migliori per rappresentare la macchina sono la B e la D perché..*"

D3 “..*intanto hanno un piano cartesiano*”

D1 “..*un piano cartesiano già definito*..”

D3 “..*metti..il piano cartesiano è ben definito*”

(T=39:37)

D1 “..*nel quale sono rappresentate le braccia (o tracce non si capisce bene)..le figure, sono validi entrambi a seconda*..”

R “*a seconda di che asse si assegni alla scanalatura* ”

D1 “*due punti, se la intendiamo come asse y la B è più corretto, se la intendiamo come asse x la D è più corretta* ”

Passano alla domanda sulla dimostrazione

D3 “*allora qua noi cosa avevamo detto? Avevamo fatto i nostri esempi..ci mancava però il rettangolo*”

(T=42:42)

D3 “..*un altro esempio lo otteniamo* ”

Fine del tempo

Allegato11_ ProtocolliScritti

Protocolli scritti del secondo esperimento

Prima sessione

Gruppo 1 ***Prima Sessione***

GRUPPO 1

(1)

Parte 1

- È UN ROMBO EQUILATERO QUINDI GLI SPOSTAMENTI SI INFLUENZANO A SPECCHIO COME SE FOSSE UN TRIANGOLO CON LA BASE APPOGGIATA SU UNA SUPERFICIE RIFLETTENTE
- SUL GRAFICO SI POSSONO FORMARE CERCHI, E FIGURE ~~[illegible]~~ PIANE (QUADRATI, TRIANGOLI)
- SI POSSONO FARE STELLINE E CUORICINI, QUINDI DISEGNI NON GEOMETRICI
- L'AFFERMAZIONE DI CHIARA È UTILE PER CAPIRE CHE, QUALSIASI COSA SI DISEGNI DA UN LATO SI RIFLETTE SULL'ALTRO LATO
- TUTTE LE FIGURE SI POSSONO DISEGNARE ENTRO UN CERTO ~~[illegible]~~ LIMITE DEL PIANO IN CUI I PERNI ~~[illegible]~~ NON TOCCANO GLI ESTREMI DI ESSO
- NON È POSSIBILE DISEGNARE ALL'INTERNO DEI SEMICERCHI CHE SI FORMANO FACENDO ~~[illegible]~~ TOCCARE I PERNI CON GLI ESTREMI DEL PIANO
- ~~[illegible]~~ LA ZONA IN CUI SI PUÒ DISEGNARE È IRREGOLARE

• INIZIALMENTE L'AFFERMAZIONE DI ALBERTO POTREBBE SEMBRARE CORRETTA E GIUSTIFICABILE, IN QUANTO POICHE' P' E P SI MUOVONO A SPECCHIO, ALL'AUMENTARE O DIMINUIRE DEL VALORE DI UNO, L'ALTRO ASSUMERA' SEMPRE IL VALORE OPPOSTO;

Parte 2

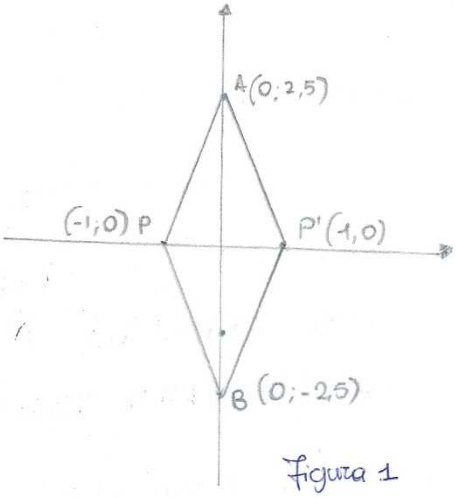


Figura 1

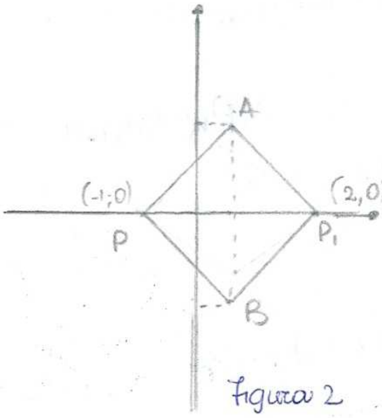


Figura 2

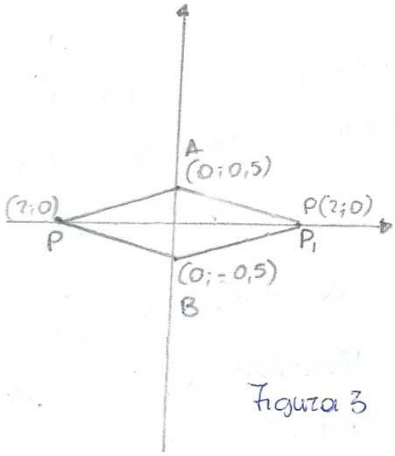


Figura 3

PERO'

• OSSERVANDO IL MODO IN CUI PERO' SI MUOVONO I PERNI DELLA MACCHINA, GIUNGIAMO ALLA CONCLUSIONE CHE ALL'AUMENTARE DEL VALORE DI P', I PUNTI A E B SI MUOVONO DIAGONALMENTE, IN QUANTO IN QUALSIASI MODO VENGA MOSSA, LA FIGURA CHE I VERTICI CREANO E' SEMPRE UN ROMBO EQUILATERO;

• CHIARA DUNQUE HA RAGIONE: POICHE' I DUE TRIANGOLI SONO CONGRUENTI LE LORO ALTEZZE SARANNO SEMPRE UGUALI

GRUPPO 3

1

1) Chiara e Alberto fanno le loro osservazioni perché ~~se~~ se muovo un vertice con la mina, si muove anche il vertice opposto e facendo ciò vedono che i due triangoli che si formano sono sempre congruente.

2) Sono utili entrambi perché l'opinione di Chiara è la conseguenza di ciò che dice alberto.

NOSTRE OSSERVAZIONI

1) Sia a dx che a sx otteniamo due disegni simmetrici, questo accade perchè la struttura di ferro ha tutti i lati uguali.

2) Un vertice senza mina rimane sempre fermo fino a quando non siamo noi che tiriamo l'intera struttura; mentre se muovo un vertice con la mina, tutti i vertici si muovono.

2

Siamo d'accordo con chiara perchè osservando la macchina, se noi muoviamo un vertice otteniamo 2 triangoli con la stessa altezza; trasferendo questo ragionamento sul piano cartesiano, vediamo che le altezze rimangono sempre uguali perchè se idealmente allunghiamo i 2 vertici P le x aumentano e le y diminuiscono. Quindi l'equazione di alberto risulta corretta perchè considerando i 2 punti P osserviamo che hanno ordinata uguale e positiva mentre l'ascissa del punto P_1 è positiva e l'ascissa del punto P è negativa. x_1 sarà sempre uguale a $-x$ ~~se~~ perché qualsiasi x che diamo al triangolo di dx sarà sempre positiva mentre la x del punto P che diamo al triangolo di sx sarò sempre negativa. Le y saranno sempre positive perchè i punti P sono rappresentati nei quadranti I e II dove le y sono positive.

GRUPPO 4 ①

CONSIDERAZIONI IN BASE ALLE OSSERVAZIONI DI ALBERTO E CHIARA

① Alberto, dopo aver osservato la macchina, è in grado di stabilire che in seguito al movimento del tracciatore sinistro, lo stesso movimento viene effettuato contemporaneamente dal tracciatore destro. La differenza che è possibile notare tra i due movimenti è riscontrabile nel fatto che il tracciatore destro effettua il movimento opposto del tracciatore sinistro.
La successiva affermazione da parte di Chiara, la quale sostiene la natura congruente dei due triangoli che si vengono a formare in seguito al movimento di entrambi i tracciatori, la possiamo considerare corretta/veritiera: le braccia del tracciatore sinistro risultano essere simmetriche analogamente a quelle del tracciatore destro in modo tale da formare due triangoli isosceli con base identificabile nel segmento che determina la divisione della tavola in due parti uguali. *

② Ogni studente esprime la propria considerazione basandosi sull'applicazione del metodo scientifico - sperimentale: Alberto, partendo dall'osservazione della macchina matematica è in grado di confermare e verificare la sua ipotesi attraverso il movimento dei due tracciatori. Chiara afferma che i due triangoli sono congruenti sia per quanto riguarda gli angoli, che per quanto riguarda i lati perché ha prestato molta attenzione alle tesi sostenute da Alberto, grazie alle quali è in grado di cogliere la formazione di due figure geometriche aventi uguali caratteristiche.
Bruno afferma di non vedere nulla e di non capire perché preferisce soffermarsi sulla parte geometrica relativa alla realizzazione del disegno, preferendola all'osservazione meccanica della macchina matematica.

* Osservando il movimento della macchina, Bruno non capisce perché i suoi due amici effettuano considerazioni a livello meccanico e preferisce, anziché intravedere una rappresentazione prettamente pratica, concentrarsi sulle figure geometriche che realizza

② É più corretta l'affermazione di Alberto in quanto Chiara non tiene in considerazione che avvicinando le braccia della macchina matematica queste finirebbero per sovrapporsi e sovrapponendosi i triangoli non sarebbero più congruenti.

Giustifichiamo la teoria di Alberto in quanto in seguito alla divisione in quattro quadranti del piano; x' risulta positi in quanto si trova nel primo quadrante; x risulta negativo in quanto si trova nel secondo quadrante; y' e y sono entrambi positivi. In conclusione possiamo affermare che il metodo che giustifica il movimento della macchina è quello di Alberto,

GRUPPO 2

①

② per capire il funzionamento della macchina è più utile l'osservazione che fa Alberto perché esplica in maniera più intuitiva il meccanismo della macchina, e per comprendere la sua affermazione non serve nessun tipo di ~~competenza~~ conoscenze dei principi base della geometria, ~~cosa che invece è~~ ~~È comunque importante sapere anche che~~
mentre per intendere l'osservazione di Chiara è necessario sapere la definizione di triangolo congruente, seppur essa sia una nozione elementare.

NOSTRA OSSERVAZIONE:
Dato che i due triangoli sono congruenti, il disegno che si ottiene muovendo la macchina in quasiasi modo è simmetrico rispetto alla scanalatura della macchina.

① l'osservazione di ogni personaggio dipende dalla posizione in cui sono disposti attorno alla macchina.
Rispetto alla posizione in cui sono seduti Alberto e Chiara ~~trovano davanti a lato un rombo, la macchina~~ la macchina assume la forma di un rombo, mentre Bruno dalla sua posizione vede (nella macchina) un quadrato.

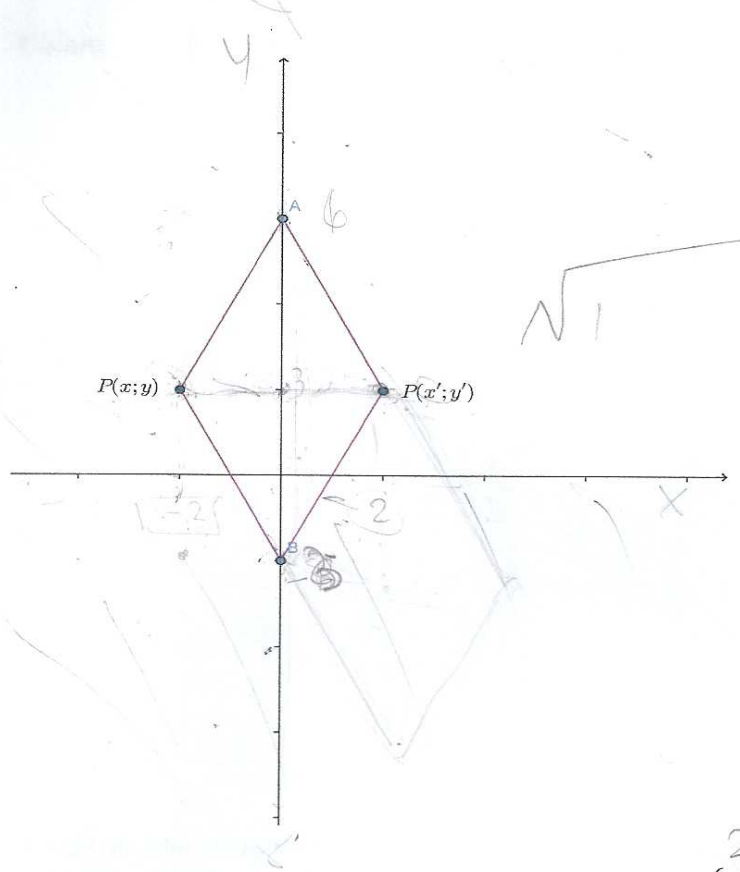
③ A nostro parere per dimostrare unicamente ciò che la macchina fa è sufficiente il metodo di Chiara (I° METODO), ci mostra come i due triangoli siano congruenti e di conseguenza, aventi la stessa base, la stessa altezza e lo stesso valore dell'area. Utilizzando questo metodo, riusciamo a ~~rappresentare~~ dimostrare come la macchina si comporta intuitivamente.

OSSERVAZIONI: Crediamo che Alberto utilizzi il piano di riferimento cartesiano per poter ricavare dai punti del grafico, la misura dei segmenti che compongono la figura e di conseguenza, l'area della stessa.
Da un punto di vista grafico, l'equazione di Alberto risulta essere corretta, poiché per ottenere la figura del grafico occorre il valore opposto della x.
In realtà abbiamo appurato che nemmeno questa è del tutto corretta poiché per ottenere il grafico occorrono anche i valori negativi della y. La y non è la stessa, ma opposta. →

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Che cosa fa la macchina?
Una delle funzioni
~~La funzione principale~~ della macchina è quella di costruire qualsiasi tipo di
Le figure che si ottengono
forma geometrica da ambe le parti. sono simmetriche rispetto
alla
scanalatura. della macchina. Utilizzando questa macchina possiamo
anche ottenere grafici con corrispondenti funzioni di vario tipo allo
ex:
scopo di ~~realizzarli~~ (parabola, funz. esponenziale, funz. log.).
Da un punto di vista pratico questa macchina può essere
utilizzata per dimostrare/verificare le ipotesi/teorie fatte
mediante altri strumenti.

Alberto: *"..ma non basta dimostrare che sono uguali le altezze....poi come prosegui? Secondo me è meglio utilizzare un sistema di riferimento cartesiano..poi scriviamo le coordinate di uno dei tracciatori in funzione delle coordinate dell'altro... così...*



la x è opposta e la y è la stessa, quindi direi che si può scrivere $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$ "

2=-2 3=3 $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

..

Bruno:" *non ho capito... che significano quelle equazioni?"*

Chiara: "*... ti dicono come cambiano le coordinate dei due punti P e P'... ad esempio se hai P(-2;3) allora P' avrà coordinate (2;3).... il problema è che anche tu, caro Alberto, stai dando per scontate alcune cose..come arrivi a quelle equazioni? Come le giustifichi?.*"

.

-2=-(2)

Bruno: "*..ma non si poteva anche scrivere* $\begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases}$ **?"**

3=3

Voi cosa ne pensate? Quale metodo si può usare per dimostrare ciò che la macchina fa? Riuscite a dimostrarlo?

Seconda sessione

Gruppo 1

GRUPPO 1

1-Descrivete come è fatta la macchina che vi è stata consegnata

2-Spiegate cosa fa, secondo voi, la macchina

1) LA MACCHINA È DIFFERENTE DA QUELLA PRECEDENTE:
L'ASSE DI SCORRIMENTO È SPOSTATA, NON PIÙ CENTRALE E I PERNI
SU CUI SCORRE LA MACCHINA NON SONO PIÙ POSTI SUI
VERTICI DEL QUADRILATERO MA SONO BENSÌ POSTI SU, PIÙ
O MENO, UN TERZO DEL LATO.
A CAUSA DELLE NUOVE POSIZIONI DELL'ASSE DELLO SCORRIMENTO
E DEI PERNI, LA FIGURA COMPOSTA NON È PIÙ UNA
CONGRUENZA DI DUE TRIANGOLI MA È FORMATO DA UN
TRIANGOLO E UN PENTAGONO.

2) I PERNI TRACCIANO COMUNQUE FIGURE SIMMETRICHE
DA ENTRAMBI I LATI. L'AREA DENTRO ALLA QUALE È
POSSIBILE TRACCIARE ~~LE~~ FIGURE È PIÙ ~~...~~ AMPIA
DI CONSEGUENZA C'È MAGGIORE LIBERTÀ GRAFICA.

GRUPPO 1

3- *Pensando alla macchina studiata negli incontri precedenti, provate a pensare a quali idee siano utili anche per l'analisi della macchina che vi è stata consegnata oggi.*

4- *Provate a dimostrare matematicamente quello che fa la macchina.*

- Le idee di Chiara di considerare l'altezza delle due figure non può più essere presa in considerazione in quanto le altezze non sono più uguali; ma quella del pentagono è il doppio di quella del triangolo

GRUPPO 1

Di seguito viene rappresentata in quattro modi diversi la macchina che vi è stata consegnata. In tutti i casi i tracciatori sono rappresentati con i punti P e P'.

5-Quale è il modo migliore di rappresentarla fra quelli proposti nella pagina seguente? Perché?

6- Per quanto riguarda la dimostrazione di ciò che la macchina fa, spiegate quale fra le particolari rappresentazioni proposte nella tabella può essere più utile.

5 LA RAPPRESENTAZIONE MIGLIORE PUÓ ESSERE LA FIGURA A O LA FIGURA B

Prima pagina non scannerizzabile

3- *Pensando alla macchina studiata negli incontri precedenti, provate a pensare a quali idee siano utili anche per l'analisi della macchina che vi è stata consegnata oggi.*

4- *Provate a dimostrare matematicamente quello che fa la macchina.*

3) A differenza della macchina precedente l'asse di scorrimento è posizionata lateralmente per questo motivo è possibile prendere in considerazioni le altezze delle f[illegible] perchè queste non sono più uguali.

4)

Di seguito viene rappresentata in quattro modi diversi la macchina che vi è stata consegnata. In tutti i casi i tracciatori sono rappresentati con i punti P e P'.

5-Quale è il modo migliore di rappresentarla fra quelli proposti nella pagina seguente? Perché?

6- Per quanto riguarda la dimostrazione di ciò che la macchina fa, spiegate quale fra le particolari rappresentazioni proposte nella tabella può essere più utile.

5) il modo migliore per rappresentarla è il grafico "C".

Gruppo 4

1) Esattamente come nell'altra macchina, il piano cartesiano è diviso in 2 parti, con quella sinistra che è il doppio della parte destra. I 2 tracciatori sono posti anche in questo caso alle estremità della macchina, rispettivamente uno a destra ed uno a sinistra. I 4 lati (braccia) sono congruenti, posti in maniera parallela e opposta l'uno all'altro. Le due braccia destre, presentano entrambe, in un terzo della loro lunghezza, due ulteriori tracciatori posti sulla linea che delimita le 2 parti del piano

2) Questa macchina ci consente di disegnare su due fogli differenti però è più statica rispetto alla macchina precedente perché a livello dell'asse è fissata. Di conseguenza, nel disegnare le figure geometriche sui fogli, esse sono meno simmetriche.

3) Il funzionamento di questa macchina, rispetto alla macchina ~~precedemente~~ precedentemente studiata, è esattamente lo stesso, nel senso che anche questa, viene utilizzata per creare figure geometriche utilizzando uno strumento preciso con l'unica differenza che le che le figure rappresentate saranno differenti, questo perché l'asse che divide la parte destra e la parte sinistra è spostato verso destra e quindi la parte sinistra del piano sarà maggiore rispetto a quella destra, questa differenza si noterà anche nelle figure che si verranno a creare, le quali saranno più estese nella parte dove il piano è più ampio.

1) La nuova macchina che ci è stata assegnata non presenta più una scanalatura centrale,.

L'elemento che notiamo immediatamente che la scanalatura ha una posizione diversa: non è più al centro. Di conseguenza se poniamo la scanalatura come un lato ipotetico, le figure geometriche che possiamo notare dalla semplice osservazione della macchina non raffigurano più due triangoli, bensì un triangolo e un pentagono.

I perni che sono posizionati e che scomono all'interno dello scanalatura non sono più posti in due dei quattro angoli dei bracci della struttura mettalica, ma in due lati della stessa.

② come la precedente macchina, ~~aveva la funzione~~ rappresentava due figure simmetriche e di uguali dimensioni, notiamo invece in questa macchina che vengono create due figure simmetriche, ma di diverse dimensioni: una più piccola dell'altra.

Il principio di funzionamento è uguale a quello precedente

<u>ESEMPI</u>: Abbiamo provato a realizzare un triangolo in entrambe le parti e abbiamo notato della macchina che nella parte di piano più ampia il triangolo risulta isoscele, mentre nella parte di piano opposta il triangolo risulta equilatero. Un altro esempio ~~~~ possiamo ottenerlo ~~~~ ~~~~ rappresentando un rettangolo. (*)

③ un'osservazione che può esserci utile per l'analisi di questa macchina, alla luce di quanto osservato ~~con~~ tramite lo strumento precedente, è la seguente: dal semplice movimento dei bracci le figure che vediamo non sono congruenti tra loro.

④

Di seguito viene rappresentata in quattro modi diversi la macchina che vi è stata consegnata. In tutti i casi i tracciatori sono rappresentati con i punti P e P'.

5- Quale è il modo migliore di rappresentarla fra quelli proposti nella pagina seguente? Perché?

6- Per quanto riguarda la dimostrazione di ciò che la macchina fa, spiegate quale fra le particolari rappresentazioni proposte nella tabella può essere più utile.

5) SECONDO NOI IL METODO MIGLIORE PER RAPPRESENTARE LA MACCHINA SONO LA B E LA D PERCHÉ HANNO UN PIANO CARTESIANO BEN DEFINITO NEL QUALE SONO RAFFIGURATI I BRACCI DELLA FIGURA. SONO VALIDI ENTRAMBI A SECONDA DI CHE ASSE SI ASSEGNA ALLA SCANALATURA: SE LA INTENDIAMO COME ASSE Y, LA B È PIÙ CORRETTA, SE LA INTENDIAMO COME ASSE X, LA D È PIÙ CORRETTA.

6)